0 120712 640001

12-07-12-64
(129.8)

# МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 4

Место проведения Калининград
город

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наименование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Абдумажитова Артёма Руслановича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«29» марта 2026 года

Подпись участника

90 (девяносто) фигу

12-07-12-64
(129.8)

№1

ОДЗ: $\boxed{\text{чистовик}}$

$\sqrt{6(1-ctg^2x)} = 4\cos x$

$1-ctg^2x \geq 0 \iff ctg\,x \leq 1$
$\cos x \geq 0 \qquad ctg\,x \geq -1$

$6(1-ctg^2x) = 16\cos^2 x$

Сразу заметим, что $\cos x = 0$ – не подходит, т.к. $\sqrt{6} \neq 0$

$\Rightarrow \cos x \neq 0. \Rightarrow tg^2x + 1 = \frac{1}{\cos^2x}$; $\cos^2 x = \frac{1}{tg^2x+1}$

Получаем: $6(1-ctg^2x) = \frac{16}{tg^2x+1}$; $ctg^2x = \frac{1}{tg^2x}$. $tg^2x + 1 \neq 0$ т.к. $tg^2x \geq 0$

$6\left(1-\frac{1}{tg^2x}\right) = \frac{16}{tg^2x+1} \quad | \cdot (tg^2x+1)$

$6\left(1-\frac{1}{tg^2x}\right)(tg^2x+1) = 16$

$6\left(tg^2x + 1 - 1 - \frac{1}{tg^2x}\right) = 16$

$6\,tg^2x - \frac{6}{tg^2x} - 16 = 0 \quad | \cdot tg^2x \neq 0$ (не входит в ОДЗ)

$3tg^4x - 8tg^2x - 3 = 0$; $t = tg^2x$, $t > 0$.

$3t^2 - 8t - 3 = 0$

$D = 64 + 4\cdot3\cdot3 = 10^2$; $\cancel{tg^2x}$ $t = 3$

$t = -\frac{2}{3}$ – не подходит $t>0$.

$t = 3$; $tg^2x = 3$

$tg\,x = \pm\sqrt{3}$

$x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

но в ОДЗ подходит только:

$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

№2 Чистовик

Пусть в множестве A элементы $a_i$

Тогда ~~но~~ их сумма чисел $S_i$, по условию имеем: $\frac{a_i}{S_i} = b_i$, где $b_i \vdots 9$. Тогда

$a_i = b_i S_i \Rightarrow a_i \vdots 9$. Известно, что по mod 9:

$S_i \underset{9}{\equiv} 0 \xleftarrow{\text{Тогда}} a_i \underset{9}{\equiv} 0 \xleftarrow{\text{но}} a_i \underset{9}{\equiv} S_i$

То есть $S_i \vdots 9$

$\Rightarrow a_i = b_i S_i \vdots 81$.

Выберем все трехзначные числа $\vdots 81$:

162, 243, 324, 405, 486, 567, 648, 729, 810, 891, ~~972~~. Тут условие НЕ выполняется ~~тоже~~ для ~~чисел~~ чисел: 567, 729, 891. Тогда требуемая сумма:

~~$324 + 486 + 972 = 1782$~~

$324 + 486 + 810 = 810 \cdot 2 = 1620$

№3

Будем считать кол-во треугольников так:

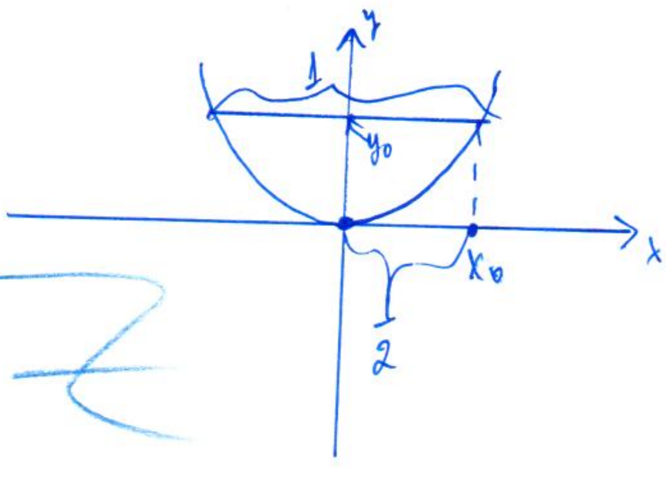
1) Выбор осей, которым будут параллельны катеты
2) Выбор точки, выступающей за прямой угол
3) Выбор длин и направлений катетов.

(1): $C_3^2 = 3$ (2): В общем ~~ви~~ фигура ограниченная множеством F — ~~это~~ куб, со стороной 7. Тогда общее кол-во точек $7^3$. (3) для каждой точки по направлению оси есть еще $7-1=6$ точек, которые могут выступать за вершины острых углов. Тогда нужная величина $6^2 \Rightarrow$ Общее кол-во $3 \cdot 7^3 6^2 = 37044$

12-07-12-64 (129.8)

№5 $\boxed{\text{чистовик}}$

рассмотрим параболу вида $f(x) = cx^2$ ~~на плоскости~~ в системе координат

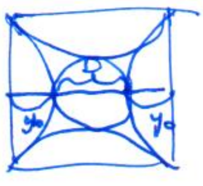



нам известно, что на какой-то высоте $y_0$ — два корня, расстояние между которыми 1. т.к. парабола симметрична относительно оси $y \Rightarrow x_0$, в которой достигается $y_0$, $x_0 = \frac{1}{2}$

Также, если посмотреть на квадрат, мы знаем, что углы у него по 90 (у обычного) а т.к. у этого квадрата углы по 0°, ~~во время~~ то в точке соприкосновения парабол, их производные совпадут. А ~~т.к.~~ в силу симметрии производная будет под углом 45° к оси Ox. т.е. $tg\,\alpha = 1 = f'(x_0)$. Найдем $f'(x) = (cx^2)' = 2cx$

$f'(x_0) = 1 = 2c \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow c = 1$. Т.е. $f(x)$ имеет вид $x^2$. Тогда

$y_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$




сторона ~~квадрата~~ равна средней линии квадрата, а та в свою очередь равна $y_0 + 2R + y_0$, где R — радиус необходимой. $2(y_0 + R) = 1$

$\frac{1}{4} + R = \frac{1}{2} \Rightarrow R = \frac{1}{4}$

№04 (чистовик)

Чтобы расчитать кол-во областей, на которое делят плоскость эти ~~арх~~ функции нам нужно знать кол-во точек пересечения.

Пусть $\sin 11\pi x = \sin 13\pi x$ имеет A решений
$\sin 13\pi x = \sin 17\pi x$ имеет B решений
$\sin 17\pi x = \sin 11\pi x$ имеет C решений

---

$\sin 13\pi x - \sin 11\pi x = 0$; $2\sin\pi x\cos 12\pi x = 0$
$\sin 17\pi x - \sin 13\pi x = 0$; $2\sin 2\pi x \cdot \cos 15\pi x = 0$
$\sin 17\pi x - \sin 11\pi x = 0$; $2\sin 3\pi x \cdot \cos 14\pi x = 0$

В первом: $\sin\pi x = 0$
$x = 0, 1$

$\cos 12\pi x = 0$
$12\pi x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ $\boxed{A = 14}$
$12x = \frac{1}{2} + k$ $\boxed{A' = 12}$
$x = \frac{2k+1}{24}$
$x = \frac{1}{24}; \frac{3}{24}; \frac{5}{24}; \frac{7}{24}; \frac{9}{24}; \frac{11}{24}; \frac{13}{24}; \frac{15}{24}; \frac{17}{24}; \frac{19}{24}; \frac{21}{24}; \frac{23}{24}$

(2): $\sin 2\pi x = 0$
$2\pi x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$
$2x = k$
$x = 0; \frac{1}{2}; 1$

(3): $\sin 3\pi x = 0$
$3\pi x = \pi k$
$x = \frac{k}{3}$
$x = 0; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 1$

---

$\cos 15\pi x = 0$
$15x = \cancel{\frac{1}{2}k}\ \frac{2k+1}{2}$ $\boxed{B' = 16}$
$x = \frac{2k+1}{30}$; имеем 15 решений
$\frac{1}{30}; \frac{3}{30}; \frac{5}{30}; \frac{7}{30}; \frac{9}{30}; \frac{11}{30}; \frac{13}{30}; \frac{15}{30}; \frac{17}{30}; \frac{19}{30}; \frac{21}{30}; \frac{23}{30}; \frac{25}{30}; \frac{27}{30}; \frac{29}{30}$ $15 + 3 \Rightarrow \boxed{B = 18}$

---

$\cos 14\pi x = 0$ $\boxed{C' = 16}$
$x = \frac{2k+1}{28}$ $\boxed{C = 18}$ решений
имеем 14 решений.

Заметим, что решения между собой не пересекаются т.е. нет точек пересечения кроме 0 и 1 у всех трёх графиков

~~Каждая точка пересе~~ кол-во новых областей равно кол-во точек пересечения + 1. ~~т.к. каждая~~ (не учитывая $x = 0$ и 1 за точки пересечения) т.к. каждая делит область на 2 и добавляет одну. т.е. изначально областей и мест.

12-07-12-64 (129.8)

если был график $\sin(11\pi x) = y$. (ниистовик)

$11\pi x = \frac{\pi}{2} + \pi k$   Пусть D, E, F – кол-во решений ($\sin(k\pi x)$) $+2 \Rightarrow$

$11x = \frac{2k+1}{2}$

$x = \frac{2k+1}{22}$; имеет 11 решений. т.е. областей

изначально ~~D = 11+2 = 13.~~

$D = 13$

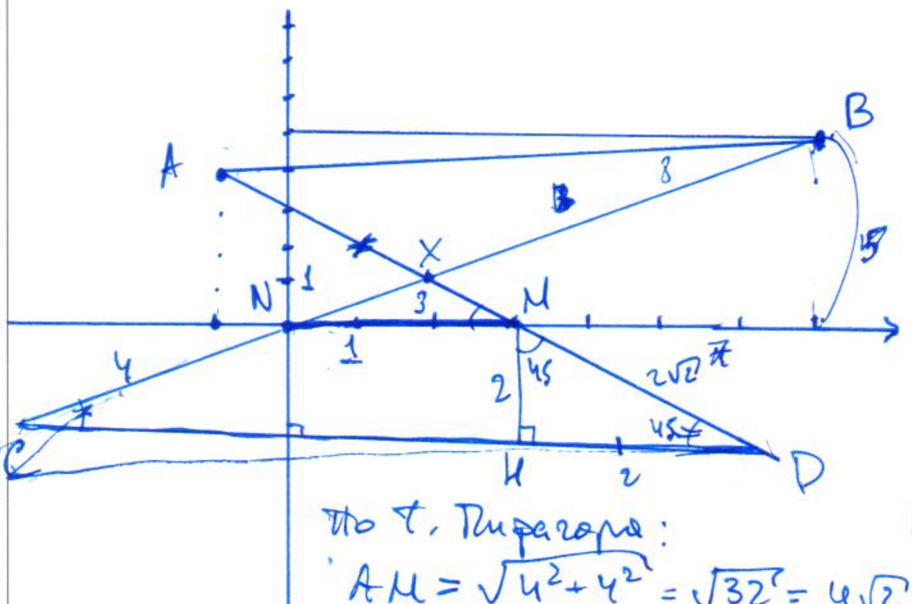
$F = 15$   $x = \frac{2k+1}{26}$

$E = 17+2 = 19$

И то, что нам нужно: $D+E+F+(A'+B'+C')+3$

$13+15+19+12+16+16+3 = 16\cdot3+12+19+15$

$48+12=60$, $60+15=75$, $75+19=94$   Ответ: 94




Найти S(MNDC)

известно, что

$\frac{AD}{MD} = \frac{6}{2}$

$\frac{AM+MD}{MD} = \frac{6}{2}$

$\frac{AM}{MD} = \frac{4}{2}$

$MD = \frac{2AM}{4} = \frac{1}{2}AM$

По т. Пифагора:

$AM = \sqrt{4^2+4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \Rightarrow MD = 2\sqrt{2}$

Находим $NC \Rightarrow \frac{BC}{NC} = \frac{6}{2} \Rightarrow \frac{BN}{NC} = 2$; $BN = \sqrt{7^2+5^2} = 8$

$NC = 4$

~~изподобия~~

~~т.к. светлячок летел на одной высоте =>~~

~~$tg\angle ADC = tg\angle AMN = \frac{4}{4} = 1 \Rightarrow \Delta MHD - P/б \Rightarrow$~~

~~$MH = 2 = HD$~~

~~↓ см лист 2~~

~~CD ∥ AB =>~~

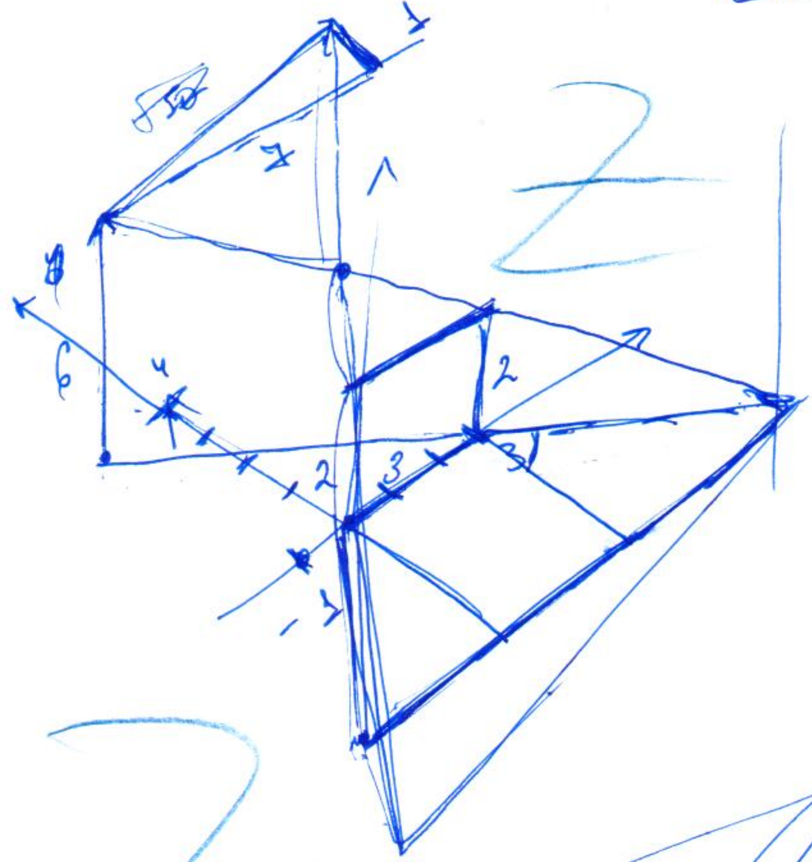
$y = x \log_a x$ монотонно возрастает / убывает

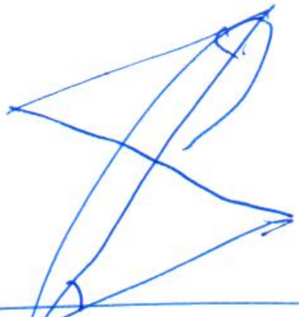
$y' = 1 \cdot \log_a x + \frac{x \cdot 1}{x \ln a} = \log_a x + \frac{1}{\ln a} = 0$

$> 0$

производная имеет 1 решение. Д.е.

черновик





$3x^2\log_a x - \log_x a - 2x \geq 0$

$x>0$
$x \neq 1$
$a \neq 1$
$a>0$

$3x^2\cdot\log_a x - \frac{1}{\log_a x} - 2x \geq 0$

$\frac{3x^2\cdot\log_a^2 x - 2x\cdot\log_a x - 1}{\log_a x} \geq 0$

$\frac{3t^2-2t-1}{\log_a x} \geq 0$

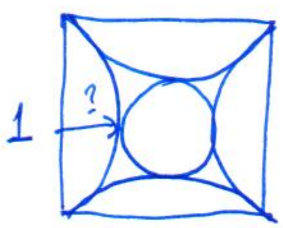
$D = 4+4\cdot 3 = 4^2$

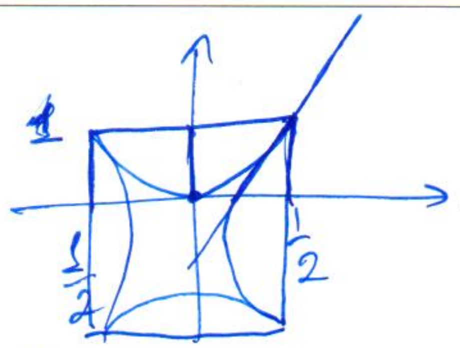
$t_1 = \frac{2+4}{6} = 1$

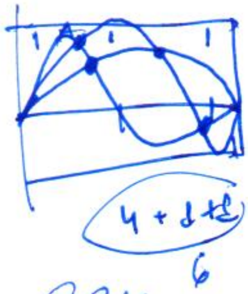
$t_2 = \frac{2-4}{6} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$

$\frac{3(t-1)(t+\frac{1}{3})}{\log_a x} \geq 0$

$\frac{3(x\log_a x - 1)(x\log_a x + \frac{1}{3})}{\log_a x} \geq 0$




~~1 = C~~

$f'(x_0) = 1$

$f(x) = \frac{C}{4}x^2$

$f'(x_0) = 2Cx$

$f'(x_0) = 1$

$2C \cdot \frac{1}{2} = 1$

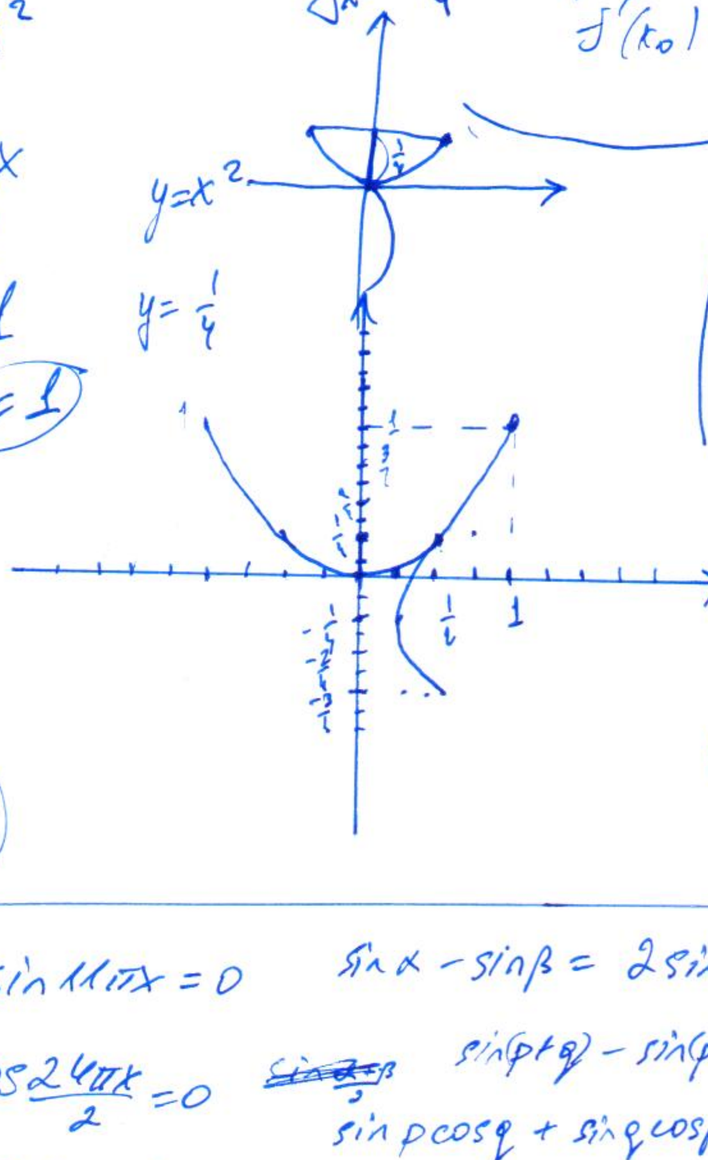
$C = 1$

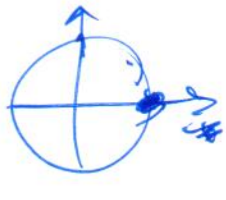
$y_x = \frac{C}{4}$

$f'(x) = 2Cx$

$f'(x_0) = 2C \cdot \frac{1}{2} = C$

$C = 1$



$R = \frac{1}{4}$

$\sin 13\pi x - \sin 11\pi x = 0$ $\qquad$ $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

$= 2\sin\frac{2\pi x}{2} \cdot \cos\frac{24\pi x}{2} = 0$ $\qquad$ $\sin(p+q) - \sin(p-q)$

$\sin p\cos q + \sin q\cos p - \sin p\cos q + \sin q\cos p$

$\sin\pi x \cdot \cos 12\pi x = 0$ $\qquad$ $2\sin q\cos p$

$\sin\pi x = 0$ $\qquad$ $\cos 12\pi x = 0$

$\pi x = \pi k,\ k \in Z$

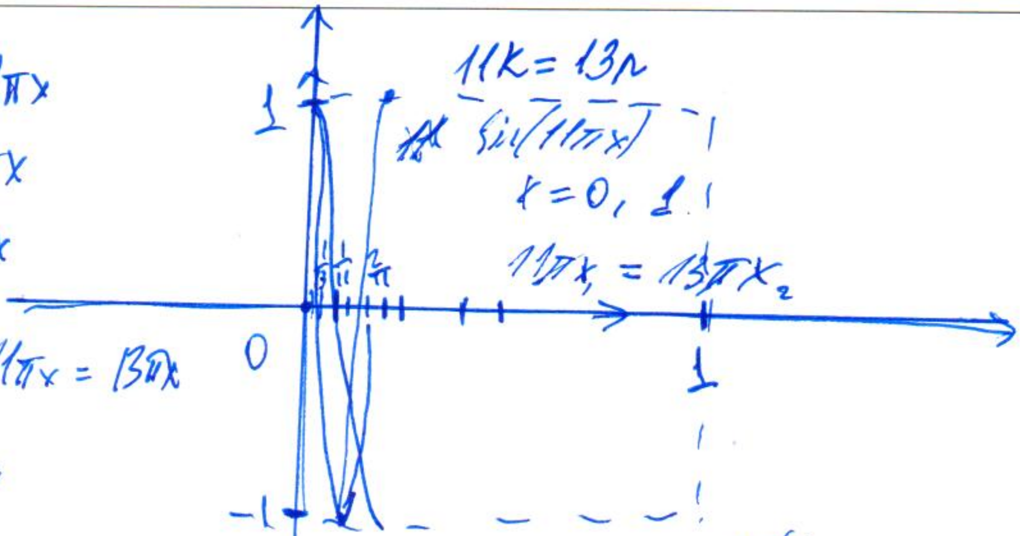
$x = 0, 1$

черновик

$y = \sin 11\pi x$

$y = \sin 13\pi x$

$y = \sin 17\pi x$



$11k = 13n$

$\sin(11\pi x)$

$x = 0, 1$

$11\pi x_1 = 13\pi x_2$

$11\pi x = 13\pi x$

$x = \frac{1}{11}$

$11\pi \cdot x = 2\pi$

$x = \frac{2}{11}$

$11\pi x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$

$11x = \frac{1}{2} + 2k$

$x = \frac{1}{22} + \frac{2k}{11}$

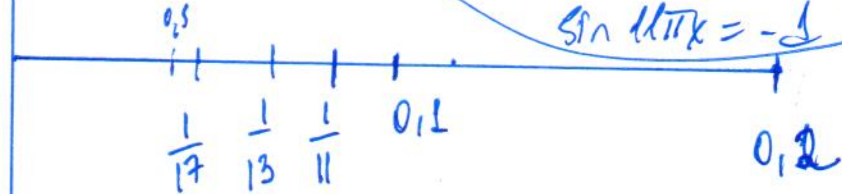
D+A B+C

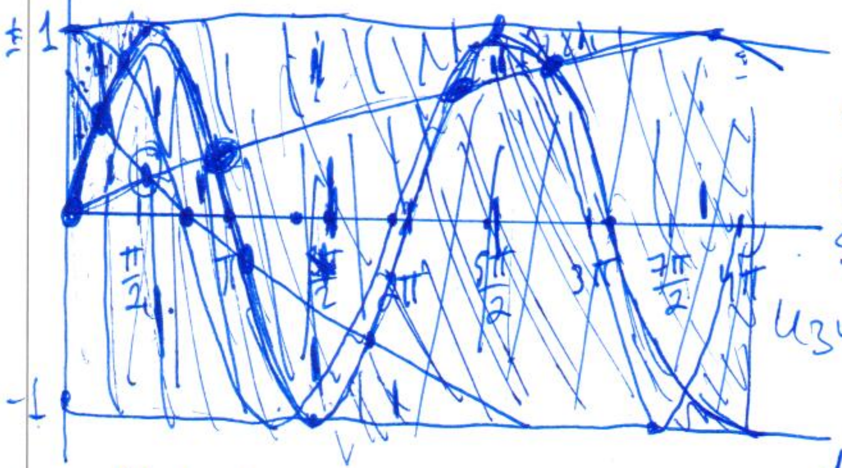
$\sin 11\pi x = 1$

$\sin 11\pi x = -1$

$= D$

D+A





т.е. надо посчитать кол-во решений

$\sin 11\pi x = \sin 13\pi x = A$

$\sin 11\pi x = \sin 17\pi x = B$

$\sin 17\pi x = \sin 13\pi x = C$

Изначально областей:

$14 = \cancel{4 \cdot 2 +}$ $4 + 5 + 5 = 14$

~~11~~ 11 - 5

3 точки

~~3+2~~

5 областей дает

~~5 · 2 = 10~~

3+1

2

~~4 · 2 + x~~

D+A + B + C

$n \cdot 2 + x - n$

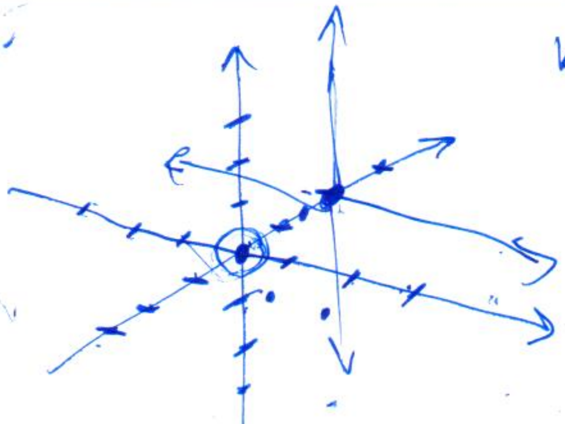
D + A +

$n + x$

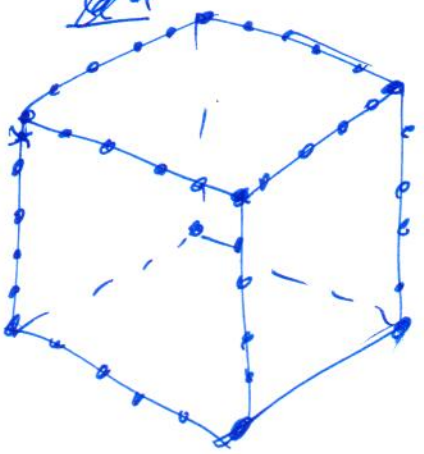
$n =$ точки $+1$

$R + x + 1$

черновик



куб со сторонами
~~7~~ 7



~~Длина катета:~~

$C_3^2$ – найти на одну ось и домножить

6·6 $6^2$ треугольников
на каждую точку приходится
$6^2$ треугольников, где эта точка
~~???~~ прямой угол треугольника

точек в общем $7^3$

=> в общем треугольников: $C_3^2 \cdot 6^2 \cdot 7^3$

$3\cdot 6^2\cdot 7^3 = 3\cdot 36\cdot \cancel{243}\ 343$

$343 \cdot 108 = 37044$

$36 \cdot 3 = 108$; $3\cdot 12\cdot 3$; $9\cdot 12 = 108$

$49 \cdot 7 = 343$

$343 \cdot 3 = 1029$

$343 : 7 = 49$

$36 \cdot 29 = 1044$

Ответ: 37044

черновик

$\sqrt{6}\left(1-\frac{1}{3}\right) = 4 \cdot \frac{\ell^2}{2}$ $\quad ctg\, 60 = \frac{1}{\sqrt{3}} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

$\cancel{6} \cdot \frac{2}{\cancel{3}}$ ✓ Ответ: $x = \frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

---

$A \in \{a_1; \dots a_n\}$ $\quad \frac{a_1}{S_1} = b_1,\ \in \mathbb{Z}$

$a_1 \vdots S,\quad b_1 \vdots 9$

$a_1 = b_1 S$ $\quad$ все числа $\vdots 9$

$a_1 \vdots 9$

$a_1 \underset{9}{\equiv} S$ $\quad 17 \underset{9}{\equiv} 8$

$\cancel{b_1 = 9k}$

$24 \underset{9}{\equiv} 6$

$a_1 = 9k + S$

$9k \vdots S$ $\quad S \vdots 9$ $\quad a_1 \vdots \cancel{27}\ 81$

$81k < 1000$

$k < \frac{1000}{81} = 12, \dots$ $\quad$ $1000 : 81 = 12$, $-81$, $190$

$12 - 2 + 1 = 11$ чисел

$2 \leq k \leq 12$

| $n$ | | $S$ | |
|---|---|---|---|
| $81 \cdot 2$ | 162 | = 9 | ✓ |
| $81 \cdot 3$ | 243 | = 9 | ✓ |
| $81 \cdot 4$ | 324 | = 9 | ✓ |
| $81 \cdot 5$ | 405 | = 9 | ✓ |
| $81 \cdot 6$ | 486 | = 18 | ✓ |
| $81 \cdot 7$ | 567 | 18 | нет |
| $81 \cdot 8$ | 648 | 18 | ✓ |
| $81 \cdot 9$ | 729 | 18 | – нет |
| $81 \cdot 10$ | 810 | 9 | ✓ |
| $81 \cdot 11$ | 891 | 18 | – нет |
| $81 \cdot 12$ | 972 | 18 | ✓ |

$81 \cdot 12$: $162 + 81\_ = 972$

$81 \cdot 11$: $891$; $891 + 81 = 972$

162, 243, 324, 405, 486, 648, 810, 972

$324 + 486 = 810$; $810 + 972 = 1782$

$81 \cdot 10 + 81 \cdot 12 = 81 \cdot 22$

Ответ: 1782

черновик

$\sqrt{6(1-ctg^2x)} = 4\cos x$

ОДЗ
$\cos x \geq 0$
$1-ctg^2x \geq 0$
$1 \geq ctg^2x$
$ctg\,x \leq 1$
$ctg\,x \geq -1$

45

$6(1-ctg^2x) = 16\cos^2x$

$6-6ctg^2x = 16\cos^2x$

$6-6\left(\frac{1}{\sin^2x}-1\right) = 16\cos^2x$

$\sin^2x+\cos^2x = 1 \;|:\cos^2x$

$6-\frac{6}{\sin^2x}+6 = 16\cos^2x$

$tg^2x + 1 = \frac{1}{\cos^2x}$

$12 - \frac{6}{1-\cos^2x} = 16\cos^2x \;|\cdot(1-\cos^2x)$ $ctg^2x+1 = \frac{1}{\sin^2x}$

$\cos^2x = \frac{1}{tg^2x+1}$

$12-12\cos^2x-6 = 6\cos^2x-6\cos^4x$

$6\cos^4x-6\cos^2x+6=0$

$6(1-ctg^2x) = \frac{16}{tg^2x+1}$

$t^2-t+1=0$

$<0$
нет решений
чисел cos.

$tg\,60^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}\sqrt{3}$

$6(1-ctg^2x)(tg^2x+1) = 16$

$ctg^2x = \frac{1}{tg^2x}$

$6\left(1-\frac{1}{tg^2x}\right)(tg^2x+1) = 16$

$x = \frac{\pi}{3}+\pi k$

$6\left(tg^2x+1-1-\frac{1}{tg^2x}\right) = 16$

$tg^2x_1 = \frac{8\pm10}{6}$

$6\left(tg^2x-\frac{1}{tg^2x}\right) = 16 \quad |\cdot tg^2x \neq 0$

$tg^2x_2 = \frac{8-10}{6}$

$6(tg^4x-1) = 16tg^2x$

$tg^2x = 3$

$6tg^4x-16tg^2x-6=0$

$tg^2x = -\frac{2}{3}$ — нет т.к. $t>0$

$3t^2-8t-3=0$

$tg\,x = \sqrt{3}$
$tg\,x = -\sqrt{3}$

$D = 64+4\cdot3\cdot3 = 100 = 10^2$

$\begin{array}{r} 64 \\ +36 \end{array}$

черновик