0 104386 850003

10-43-86-85
(124.4)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 5

Место проведения г. Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Абдалашева Мухаммада Джабраиловича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«29» марта 2026 года

Подпись участника

 100(сто)

10-43-86-85 (124.4)

Черновик

~~$12-3tg^2x=2\sin x$~~

$^3 6(1-tg^2x)=\overset{8}{16}\sin^2x$

$3-3tg^2x=8\sin^2x$

$8\sin^2x+3tg^2x-3=0$

$8\sin^2x+3\frac{\sin^2x}{\cos^2x}-3=0 \mid \cos^2x \neq 0$ $tg^2x=\frac{\sin^2x}{\cos^2x}$

$8\sin^2x\cdot\cos^2x+3\sin^2x-3\cos^2x=0$

$8\sin^2x\cdot\cos^2x+6\sin^2x-3=0$ $\cos^2x=(1-\sin^2x)$

$8\sin^2x(1-\sin^2x)+6\sin^2x-3=0$ $\cos x\neq 0 \Downarrow \sin x\neq\pm1$

$\frac{99}{18}=$

ТТП:

прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной, перпендикулярная к её проекции на эту плоскость, перпендикулярна и самой наклонной.

$\begin{cases}\sin x\geq 0\\ \sin x\neq 1\end{cases}$

A

1

$16\sin^2x\cdot\cos^2x+6-6\cos^2x-6\cos^2x=0$

$16\sin^2x\cdot\cos^2x-12\cos^2x+6=0$

$16\sin^2x\cdot\cos^2x$

$\frac{18}{9}=9$ $\frac{81}{9}=9$ $\frac{999}{36}$ $=36 \cdot 30 = 1080$

$26\cdot 27=252$ $32\cdot3=96$ $196+96=292$

$\sqrt{6(1-tg^2x)}=4\sin x$

$6-6tg^2x=16\sin^2x$ $4\sin x\geq 0$ $73\cdot4=292$

$16\sin^2x+6tg^2x-6=0$ $\sin x\geq 0$

$tgx=\frac{\sin x}{\cos x}$

$tg^2x=\frac{\sin^2x}{\cos^2x}$

$14\cdot14=56$, 196

$\sin x=tgx\cdot\cos x$

$\cos^2x=(1-\sin^2x)$

$-6\cos^2x=-6(1-\sin^2x)$

$-6+6\sin^2x$

$16\sin^2x+6\frac{\sin^2x}{\cos^2x}-6=0 \mid \cdot\cos^2x$ $2\sqrt{73}$ $\cdot 12 = 96$

$16\sin^2x\cdot\cos^2x+6\sin^2x-6\cos^2x=0$

~~$8\sin^2x+6\sin^2x-6\cos^2x=0$~~

$\sin^2x=1-\cos^2x$

$6\sin^2x=6(1-\cos^2x)$

$6-6\cos^2x$

$8t^2-14t+3=0$

$D=196-96=100$

$16\sin^2x\cdot\cos^2x+6\sin^2x-6+6\sin^2x=0$ $t=\frac{14\pm10}{16}=$

$1{,}5$ $0{,}25$ $\sin^2x=t$ $\frac{24}{16}$ $\frac{4}{16}$

$16\sin^2x\cdot\cos^2x-6=0$

$8t^2-14t-3=0$

$D=196+96=292$

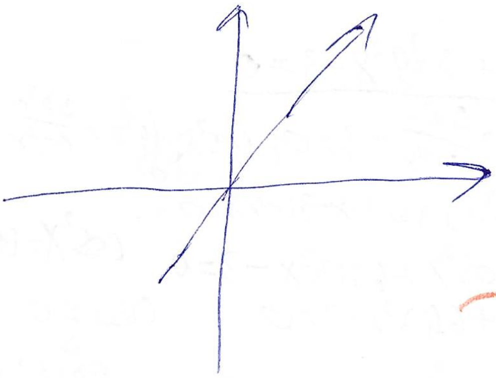
~~$8\sin^2x$~~

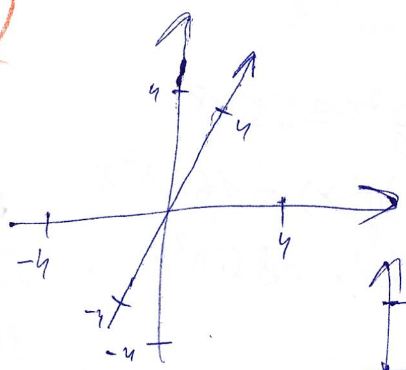
$8\sin^2x-8\sin^4x+6\sin^2x-3=0$

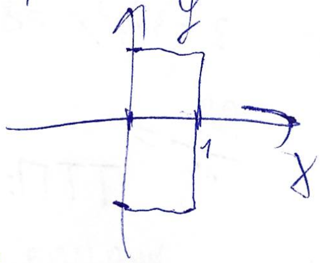
$x=\frac{14\pm\sqrt{292}}{16}=\frac{7\pm\sqrt{73}}{8}$

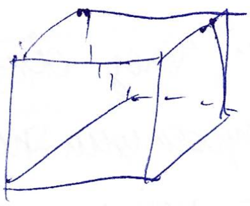
$8\sin^4x-14\sin^2x+3=0$

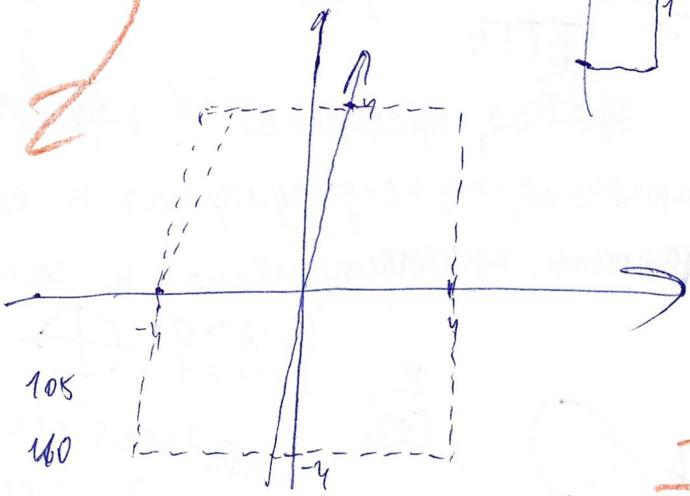
Черновик











100 101 102 103 104 105

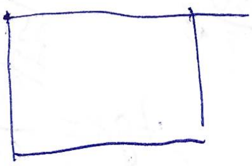
106 107 $\boxed{108}$ 109 110

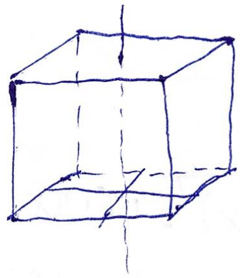
$\frac{108}{9}$

$\frac{112}{4}$ $\frac{113}{4}$

$\frac{117}{9}$

$\frac{126}{9}$





$\frac{189}{18}$

36
18
+4

πr^2

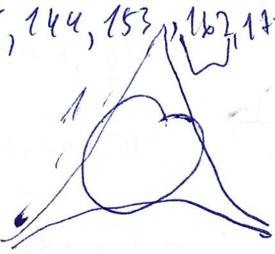
108, 126, 135, 144, 153, 162, 171, 180, 189

$2\pi r$

900 918 936 954

972

990



$\frac{108}{9}$ $\frac{999}{36}$ $\frac{999}{36}$

36
27
252
72
972

$\frac{999}{27}$

18
5
900

18
55
90
990

$\frac{998}{38}$

38
27
245
70
945

$\frac{990}{18}$

98

$\frac{972}{18}$

54
18
432

$\frac{912}{18}$

972

10-43-86-85
(124.4)

Чистовик

Задача 1.

$\sqrt{6(1-tg^2x)}=4\sin x$

возведем в квадрат обе части, причем $4\sin x \geq 0 \Rightarrow \underline{\sin x \geq 0}$

$6(1-tg^2x)=16\sin^2x$

$3(1-tg^2x)=8\sin^2x$

$3-3tg^2x-8\sin^2x=0$

$8\sin^2x+3tg^2x-3=0$

$tg^2x=\frac{\sin^2x}{\cos^2x}$

$8\sin^2x+3\frac{\sin^2x}{\cos^2x}-3=0 \mid \cdot\cos^2x\neq0$ (т.к. $\cos x\neq0 \Rightarrow \underline{\sin x\neq\pm1}$)

$8\sin^2x\cdot\cos^2x+3\sin^2x-3\cos^2x=0$

$\cancel{\cos^2x=1-\sin^2x}$

$\cos^2x=1-\sin^2x$

$\cancel{8\sin^2x-8\sin^4x}$

$8\sin^2x\cdot\cos^2x+3\sin^2x-3+3\sin^2x=0$

$8\sin^2x(1-\sin^2x)+6\sin^2x-3=0$

$8\sin^2x-8\sin^4x+6\sin^2x-3=0 \mid\cdot(-1)$

$8\sin^4x-14\sin^2x+3=0$

Пусть $\sin^2x=t$, тогда:

$8t^2-14t+3=0$

$D=196-96=100$

$t_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{14+10}{16}=1,5$ $\varnothing$

$t_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{14-10}{16}=0,25$

$\cancel{\sin^2x=1,5}$ $\cancel{x=\pi-\arcsin\sqrt{1,5}+2\pi n, n\in Z}$

$\cancel{\sin x=\sqrt{1,5}} \Rightarrow \cancel{x=\arcsin\sqrt{1,5}+2\pi k, k\in Z}$

$\cancel{\sin x=-\sqrt{1,5}} \Rightarrow$ ~~не подходит под огр. ($\sin x\geq0$)~~

$\sin^2x=0,25$

$\sin x=0,5 \Rightarrow x=\frac{\pi}{6}+2\pi m, m\in Z$

$x=\frac{5\pi}{6}+2\pi l, l\in Z$

$\sin x=-0,5 \rightarrow$ не подходит под огр. ($\sin x\geq0$)

Ответ: $\cancel{\pi-\arcsin\sqrt{1,5}+2\pi n, n\in Z}$; $\cancel{\arcsin\sqrt{1,5}+2\pi k, k\in Z}$; $\frac{\pi}{6}+2\pi m, m\in Z$; $\frac{5\pi}{6}+2\pi l, l\in Z$.

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Чистовик.

Задача 2.

Дано: множество А;
~~abc~~ ~~abc~~:
$abc\ (\frac{abc}{\overline{abc}} \vdots 9) \in A$

Найти:
~~все abc~~ Сумму 2-го, 6-го и последнего.

~~Свойство :9:~~
~~если abc :9 => abc :81~~
число abc :81

Решение:
свойство :9:
если $\overline{abc} \vdots 9 \Rightarrow abc \vdots 9$
$\frac{abc}{\overline{abc}}$ – такое число, что ~~его~~ сумма его цифр :9
$\frac{abc}{\overline{abc}}$:

abc должно быть :9
$\overline{abc}$ должно быть :9 | =>

=> ~~такие трех~~ найдем первые шесть таких чисел (abc):
~~108~~, ~~117~~, 126, ~~135~~, ~~144~~, ~~153~~.

	162	405	810
abc :9	243	486	972
$\overline{abc}$:9	324	648	

~~Второе число: 117~~
~~Шестое число: 153~~

Последнее такое число из трехзначных – 972:

~~abc~~ :9 abc (972) :9 | =>
$\overline{abc}$ (279) :9

=> $\frac{abc}{\overline{abc}}$ (54) :9 18

сумма (~~117 + 153~~ 243 + 648 + 972) =
1863

~~972 + 153 + 117 = 1242~~

Ответ: ~~1242~~ 1863

10-43-86-85
(124.4)

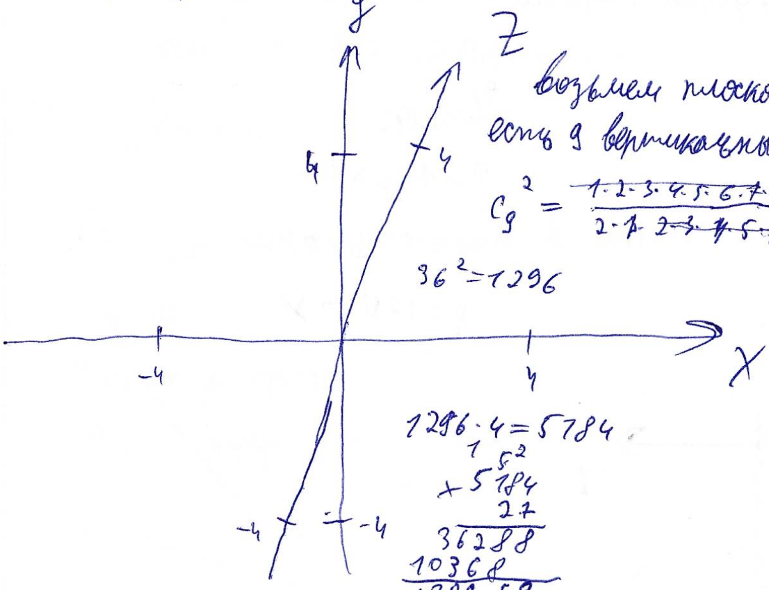
Чистовик

Задача 3.

Дано: F – множество точек; координаты которых ∈ Z; ≤ |4|.

Найти: кол-во прямоуг. Δ-ов, вершины которых ∈ F, каждый из катетов ∥ одной из трех координатных осей.

Решение:



возьмем плоскость ∥ z = 0
есть 9 вертикальных и 9 горизонтальных прямых

$C_9^2 = \frac{\cancel{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} \cdot 8 \cdot 9}{2 \cdot 1 \cdot \cancel{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}}$

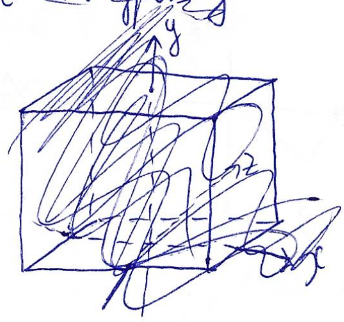
$36^2 = 1296$

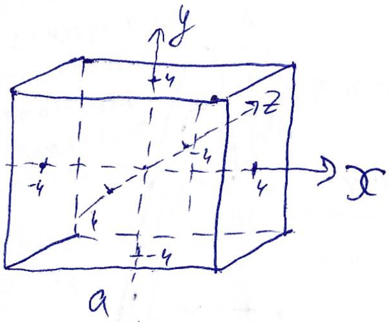
$1296 \cdot 4 = 5184$

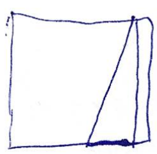
$$\begin{array}{r} 5184 \\ \times\ 27 \\ \hline 36288 \\ 10368\ \\ \hline 139968 \end{array}$$

~~F ∈ кубу с ц (0;0;0), a = 8~~

~~F ∈ квадрату~~







~~бесконечное кол-во п/у Δ-ов ∈ F и каждый из катетов ∥ одной из трех координат.~~

~~Ответ~~

Ответ: 139968

Чистовик

Задача 4. ~~x0~~ прямоуг. полоска;

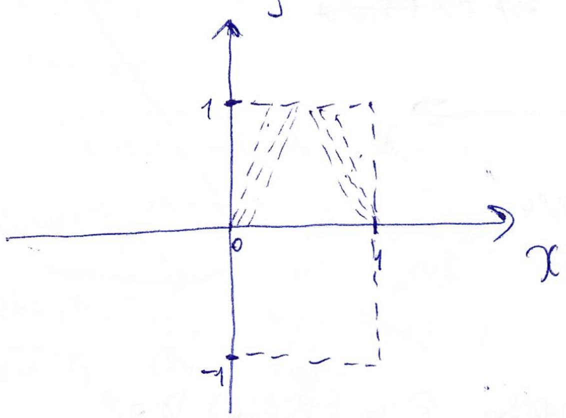
Дано: $0 \le x \le 1,\ -1 \le y \le 1$,

$y = \sin k\pi x$;

$k \in \{11, 15, 17\}$.

Найти: на сколько непересекающихся областей окажется разделена полоска

Решение:

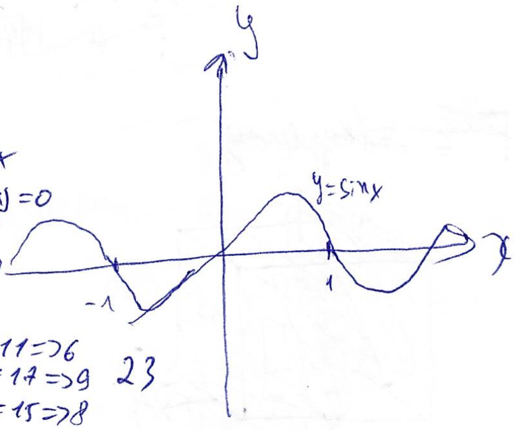


Имеем:

$y = 11 \sin \pi x$

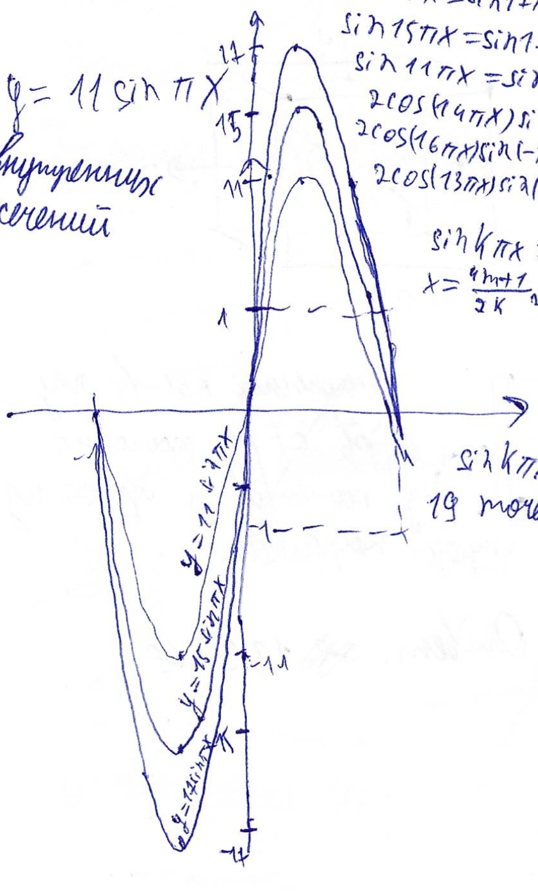
$y = 15 \sin \pi x$

$y = 17 \sin \pi x$



$y = 11 \sin \pi x$

43 внутренних пересечений



$\sin 11\pi x = \sin 17\pi x$

$\sin 15\pi x = \sin 17\pi x$

$\sin 11\pi x = \sin 15\pi x$

$2\cos(14\pi x)\sin(-3\pi x) = 0$

$2\cos(16\pi x)\sin(-\pi x) = 0$

$2\cos(13\pi x)\sin(-2\pi x) = 0$

$\sin k\pi x = 1$

$x = \frac{4m+1}{2k}$ 23

$k = 11 \Rightarrow 6$

$k = 17 \Rightarrow 9$ 23

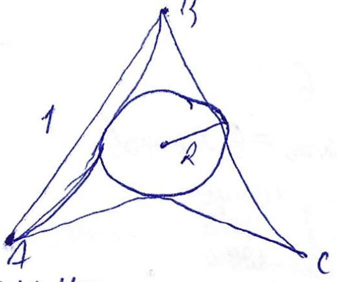
$k = 15 \Rightarrow 8$

$\sin k\pi x = -1$: 19 точек

~~Полоска разделена на 7 непересекающихся частей.~~

Ответ: ~~7~~ 91

Чистовик.



Задача 5.

Дано: $y = Cx^2$ повернули и состыковали так, что получился р/с симметричный Δ-к с нулевыми углами

$\rho(A;B) = 1$

Найти:

R впис. в Δ-к окружности

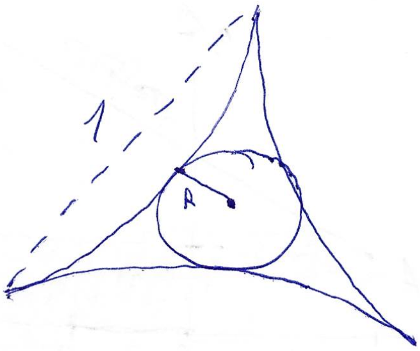
Решение:

Как мы можем узнать R окр.:

Формулы:

Площадь круга $= \pi R^2$

Длина окружности $= 2\pi R$



найдем R, вписанной в р/с Δ-к со стороной 1.

$S_\Delta = p \cdot r$

$S_\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$S_\Delta = \sqrt{1{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}$

$S_\Delta = 0{,}5 \cdot \sqrt{0{,}75}$; $p = \frac{1+1+1}{2} = 1{,}5$

$S_\Delta = p \cdot r \Rightarrow r = \frac{S_\Delta}{p} = \frac{\sqrt{0{,}75}}{2} : \frac{1{,}5}{1} = \frac{\sqrt{0{,}75}}{2} \cdot \frac{1}{1{,}5} = \frac{\sqrt{0{,}75}}{3}$

$R = \frac{1}{2} r = \frac{\sqrt{0{,}75}}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{0{,}75}}{6}$

Ответ: $\frac{\sqrt{0{,}75}}{6}$

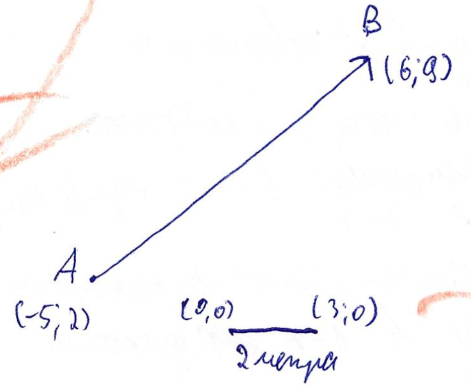
Чистовик.

Задача 6.

h светлячка = 6 метров

h забора = 2 метра

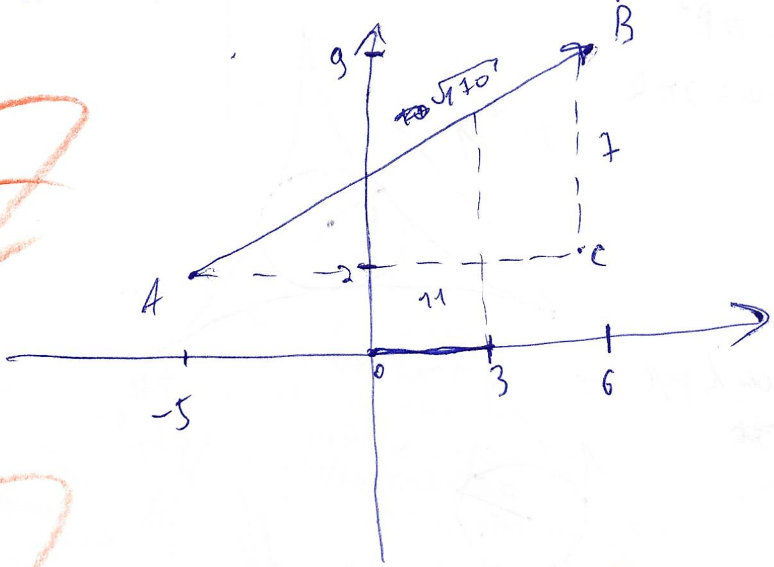
$\vec{AB}$ – путь светлячка

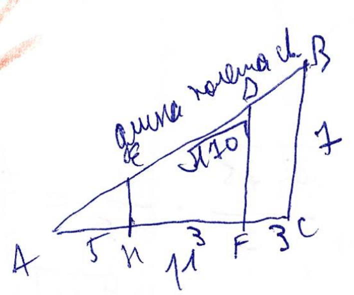


Решение:

Высота забора – 2 метра

Высота полета светлячка – 6 метров | => разница = 4 метра





ED =

По т. Пиф:

$AB^2 = BC^2 + AC^2$

$AB^2 = 121 + 49$

$AB^2 = 170$

$AB = \sqrt{170}$

$= \dfrac{3\sqrt{170}}{11}$

~~$S_{трап} = \frac{B}{2} AB + B$~~

$S_{HEDF} = \dfrac{HE + DF}{2} \cdot HF$

$S_{ABC} = \dfrac{11 \cdot 7}{2} = 38,5$

S трапеция оказавшейся затененной $= \dfrac{1}{3}$ от S трапеция. $=$

$= \dfrac{38,5}{3}$

Ответ: $\dfrac{38,5}{3}$

Чистовик.

Задание № 7.

Дано: $y = \pm\frac{x^2}{2} + c$, $c \in \mathbb{Z}$

начало системы координат, в которой записаны уравнения, находится в центре листа.

Размер тетрадной стр.: 210 × 297 мм.

Найти: наибольшую из S

Диагонали 1-ны у получившихся четырехуг.

$\begin{cases} y = \frac{x^2}{2} \\ y = 1 - \frac{x^2}{2} \end{cases}$ $1 - \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2}$ $x^2 = 1$ $x = \pm 1$ $S_4 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 1$

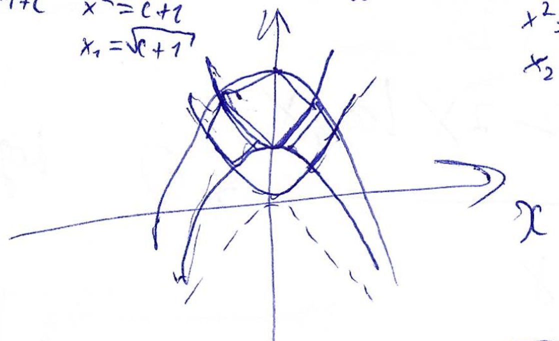
$y = \frac{\pm x^2}{2} + c$

~~Решение~~:

$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 \\ y = -\frac{1}{2}x^2 + 1 + c \end{cases}$ $\frac{1}{2}x^2 = -\frac{1}{2}x^2 + 1 + c$ $x^2 = c + 1$ $x_1 = \sqrt{c+1}$

$y \begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 + 1 \\ y = -\frac{1}{2}x^2 + c \end{cases}$ $\frac{1}{2}x^2 + 1 = -\frac{1}{2}x^2 + c$ $x^2 = c - 1$ $x_2 = \sqrt{c-1}$

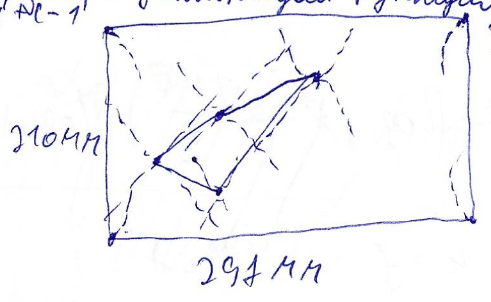
Первая диагональ = 1, вторая = $x_1 - x_2$



$x_1 - x_2 = \sqrt{c+1} - \sqrt{c-1} = \frac{(\sqrt{c+1} - \sqrt{c-1})(\sqrt{c+1} + \sqrt{c-1})}{\sqrt{c+1} + \sqrt{c-1}} = \frac{(c+1) - (c-1)}{\sqrt{c+1} + \sqrt{c-1}} = \frac{2}{\sqrt{c+1} + \sqrt{c-1}}$

~~Ан~~ Тетрадная стр.

$f(c) = \frac{2}{\sqrt{c+1} + \sqrt{c-1}}$ — убывающая функция



Значит $S_{max} = 1$

Наибольшая площадь будет в случае если вершины парабол находятся на вершинах прямоугольника (тетрадной стр.):

~~Наибольшая площадь~~

Ответ: ~~наибольшая~~ $S = 1$

Чистовик.

Задача 8.

$8x^2\log_a x - \log_{8x} a - 2x \geq 0$ $\quad \begin{cases} a>0 \\ a\neq 1\end{cases}$ $\quad \begin{cases} x>0 \\ x\neq 1\end{cases}$

Множество решений состоит из полуинтервала и точки (точка $\notin$ полуинтервалу ~~и~~ и не явл. его концом)

$$8x^2\log_a x - \frac{1}{\log_a x} - 2x \geq 0$$

$$\frac{8x^2\log_a^2 x - 1 - 2x\log_a x}{\log_a x} \geq 0 \qquad \log_a x \neq 0$$

$a^t t = u$ $\qquad \log_a x = t$ $\qquad 8a^{2t}\cdot t - \frac{1}{t} - 2a \geq 0$

при $t>0$: $8a^{2t}t^2 - 2a^t t - 1 \geq 0$

при $t<0$: $8a^{2t}t^2 - 2a^t t - 1 \leq 0$

$\cancel{\frac{8x^2t^2 - 2xt - 1}{t} \geq 0}$

$8u^2 - 2u - 1 = 0$ $\quad + \quad -\frac{1}{4} \quad - \quad \frac{1}{2} \quad +$

$\cancel{\frac{\left(\log_a x - \frac{1+\sqrt{7}}{2}\right)\left(\log_a x - \frac{1-\sqrt{7}}{2}\right)}{\log_a x} \geq 0}$

$\cancel{t^2 - t - 1 = 0}$

$\cancel{D = 1 + 4 = 5}$ $\quad t>0 \quad u \geq \frac{1}{2}$, $u>0$

$\cancel{t = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{2}}$ $\quad f(t) \geq 0 \quad a^t t = \frac{1}{2}$ $\quad$ сущ. единств. корень >0

~~$+ \quad \frac{1-\sqrt{7}}{2} \quad - \quad 0 \quad + \quad \frac{1+\sqrt{7}}{2} \quad -$~~

$t<0$ $\qquad$ максимум $-\frac{1}{e\ln a}$ $\qquad a = e^{-\frac{2}{e}}$

$a^t t \geq -\frac{1}{4}$ $\qquad$ ~~$a=2$~~ $a = e^{-\frac{2}{e}}$

Ответ: ~~при $a = 2$, множество решений состоит из полуинтервала и точки, не входящей в полуинтервал и не явл. его концом.~~

Черновик.

$\log_a x^{8x^2}$

$8x^2 \log_a x - \frac{1}{\log_a x} - 2x = 0$

$\frac{8x^2 \log_a^2 x - 1 - 2x \log_a x}{\log_a x} = 0$

$\frac{18+\sqrt{170}}{2}$

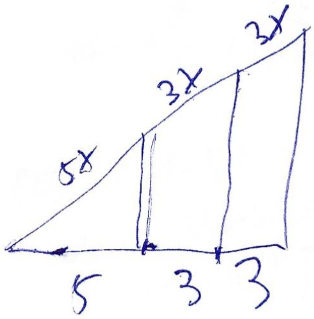
$121+49=$

$\sqrt{170}$

$2x(4x+t-t-1$

$\frac{11+7}{2}$

$\frac{18+\sqrt{170}}{2}$ 385 + 2 = 76



t^2-t-1

$1+4$

291 × 210 = 2910 + 594 = 62320

Черновик

$\log_a x$

$+ \quad - \quad - \quad -$

$\frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad 0 \quad \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$\frac{5}{11} \quad \frac{25}{121}$

1111
385
27
1311
270
961,5

121