0 801477 710009
80-14-77-71
(124.11)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11 класс, 1

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников «Ломоносов»
наименование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Алебашкова Алексея Владимировича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«29» марта 2026 года

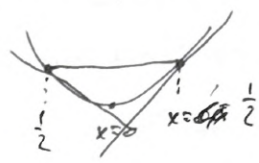
Подпись участника

90 (Девяносто) ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Черновик

4^{-7^6} 1458 6561 729 139968

$8x^2 \log_a x - \log$



$\frac{1}{2}$ $x=0$ $x=$ $\frac{1}{2}$

$9z \cdot n =$

A : 9 600

729 × 192 = 1458 6561 729 139968

108 117

486 : 18 = 243 : 9

$8t^2 - 14t + 13 = 0$

$D = 196 - 96 = 100$ $t = \frac{14 \pm 10}{16} \in \{\frac{3}{2}; \frac{1}{4}\}$

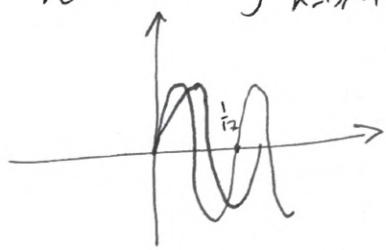
$\sin \pi z = 0$

$\frac{1}{17} \to \frac{2}{17} \to \frac{3}{17}$

$k = 3, 15, 17$ $\frac{1}{17} \to \frac{2}{17} \to \frac{3}{17}$

$\begin{cases} f = g^2 \\ g > 0 \end{cases}$

243 → 729 (486, 810, 1539)



$\frac{8}{3}(1 - tg^2 x) = \frac{16}{8}\sin^2 x$

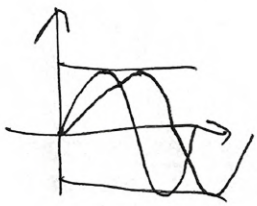
$tg^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \quad 1 - \sin^2 x$

3

	1	2	3	4	5	6	7	8
cg.	V	V	V	V	V			

$\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$ $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$ пр. 1

пр. 2

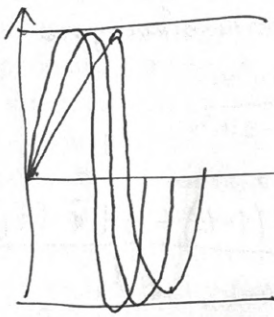


$tg = c$

$\frac{1}{\sqrt{3}} k \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} + b = \frac{1}{4\sqrt{3}}$

$b = -\frac{1}{4\sqrt{3}}$

$y = cx + b.$



$8x^2 \log_a^2 x - \log_a x \cdot 2x - 1 = \left(\log_a x - \frac{1}{2x}\right) \cdot (\log_a x +$

$D = 4x^2 + 4 \cdot 8 \cdot x^2 = 36x^2$

$\ldots = \frac{2x \pm 6x}{16x^2} =$

$= 2x \log_a x (4x \log_a x - 1) - 1$

$(4x \log_a x - 1)$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Чистовик

№2 Лемма: все числа из A кратны 81

Д-во: действительно, пусть $a \in A$, b – сумма цифр a.

Тогда по определению мн-ва A, $a : b = 9k$, где $k \in \mathbb{Z}$ $\rightarrow$

$\rightarrow a = 9kb$.

Далее, если число кратно 9, то и сумма его цифр кратна 9.

Тогда $b = 9m$, $m \in \mathbb{Z}$ $\rightarrow a = 81km \Rightarrow a : 81$. ЧТД

Теперь переберём все трёхзначные числа, кратные 81 и посмотрим, принадлежат ли они мн-ву A (т.е. действительно ли при делении данного числа на сумму его цифр получится целое число, кратное 9)

162 – принадлежит
243 – принадлежит
324 – принадлежит
405 – принадлежит
486 – принадлежит
567 – НЕ принадлежит
648 – принадлежит
729 – НЕ принадлежит
810 – принадлежит
891 – НЕ принадлежит
972 – принадлежит

Итого, трёхзначные числа из A – это 162, 243, 324, 405, 486, 648, 810, 972

Искомая сумма $243 + 486 + 810 = 1539$

Ответ: 1539.

№1 Воспользуемся тем, что $\sqrt{f} = g \Leftrightarrow \begin{cases} f = g^2 \\ g \geq 0 \end{cases}$

Тогда нужно решить следующее:

$$(1)\begin{cases} 6(1 - tg^2 x) = 16\sin^2 x \\ (2)\ 4\sin x \geq 0,\ \sin x \geq 0 \end{cases}$$

(1): Будем использовать, что $tg^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x}$

Пусть $\sin^2 x = t \in [0; 1]$

$$6\left(1 - \frac{t}{1-t}\right) = 16t \rightarrow 3 - \frac{3t}{1-t} = 8t, \quad \frac{3(1-t) - 3t - 8t(1-t)}{1-t} = 0,$$

$$\frac{8t^2 - 14t + 3}{1-t} = 0 \rightarrow \begin{cases} 8t^2 - 14t + 3 = 0 \rightarrow t \in \left\{\frac{3}{2}; \frac{1}{4}\right\} \\ t \neq 1 \end{cases}$$

Поскольку $\sin^2 x \in [0; 1]$, $t = \frac{3}{2}$ нам не подходит. Остаётся только $t = \frac{1}{4}$.

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

80-14-77-71
(124.11)

Чистовик

№1, продолжение

Теперь исходная система приобретает следующий вид:

$$\begin{cases} \sin^2 x = \frac{1}{4} \\ \sin x \geq 0 \end{cases} \rightarrow \sin x = \frac{1}{2}. \rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

Ответ: $\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$.

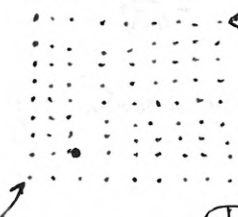
№3

Пусть эти оси называются X, Y, Z. Сначала посчитаем количество треугольников, у которых катеты пар-ны осям x и y, а потом умножим на 3 (катеты могут быть п-ны осям xy; xz; yz, оси "равноправны" (если поменять местами x и y, x и z или y и z, то кол-во таких треугольников не изменится), катеты не могут быть параллельны одной и той же оси одновременно)

Заметим, что плоскость, образованная треугольником, будет параллельна (или совпадать с пл-ю)* плоскости, образованной осями x, y (такими Δ, у которых катеты п-ны этим осям), поскольку пересекающиеся в Δ катеты п-ны осям x или y.

Тогда рассмотрим 9 "слоёв" (пл-ей, для каждого $z \in \mathbb{Z}, z \in [-4; 4]$), которые п-ны (или совп. с C_4^3 пл-ю), обр. осями x и y. В каждой из них одинаковое кол-во искомых Δ, так что посчитаем кол-во нужных Δ только в одной и умножим на 9.

Слой этот выглядит так:



(точки, принадлежат F)

Будем "считать" искомые Δ. Для этого выберем одно из возможных значений x, а также одно из возможных значений y.

Таким образом, мы получаем вершину этого треуг., при которой находится прямой угол. Это мы можем сделать $9 \cdot 9 = 81$ способами.

Теперь нам нужно выбрать две точки, причём у одной должно быть такое же значение x, как у вершины прям. угла, а у другой — y. (но одновременно они совпадать не могут) Это мы можем сделать $8 \cdot 8 = 64$ способами.

Итого таких Δ (81·64).

Теперь возвращаемся в начало и считаем итоговое число таких Δ.

Оно будет равно $81 \cdot 64 \cdot 9 \cdot 3 = 729 \cdot 192 = 139968$

Ответ: 139968

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

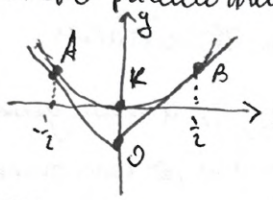
Числовик

№5

Выберем одну из вершин. Проведем касательную к одной из парабол так, чтобы касание было именно в вершине. Тогда эта прямая является касательной и к другой параболе, проходящей через эту вершину (по условию, угол "треугольника" равен 0)

Тогда на пересечении таких касательных будет находиться центр окружности (треугольник равносторонний) (проведем касательную через каждую вершину)

Теперь рассмотрим гр-к параболы $y = Cx^2$. $=: f(x)$. Поскольку расст. м/у вершинами равно 1 и в силу симметрии треугольника, вершины треугольника находятся на $x = \frac{1}{2}$ и $x = -\frac{1}{2}$. Теперь проведем касательные через эти точки. Обозначим точки A, B, O, K как на рисунке



Поскольку исходный Δ – р/ст, $\angle AOB = 120°$ (в силу симметрии), а углы OBA и OAB равны 30°. Посчитаем $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot C \cdot \frac{1}{2} = C$. Геометрический смысл производной — тангенс угла наклона касательной.

Нам необходимо, чтобы этот угол равнялся 30°, т.е., $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \operatorname{tg} 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Т.е. $C = \frac{1}{\sqrt{3}}$. (В силу симм. параболы относ. $x = 0$, при данном c, $\angle BAO$ также равен 30°). Теперь посчитаем координату y точки O. y точки B равен $\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4\sqrt{3}}$. Пусть $g(x) = cx + b$ – кас. к $f(x)$ в $\frac{1}{2}$.

$g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{4} + b = \frac{1}{4\sqrt{3}} \Rightarrow b = -\frac{1}{4\sqrt{3}}$. $\Rightarrow$ y точки O равен $-\frac{1}{4\sqrt{3}}$.

Заметим, что длина OK – и есть искомый радиус (OK $\perp$ кас. к параболе в K), а длина $OK = \frac{1}{4\sqrt{3}}$.

Ответ: $\frac{1}{4\sqrt{3}}$.

№4

Заметим, что при $x \in [0; 1]$, никогда не выходит такого, что $\sin 13\pi x = \sin 15\pi x = \sin 17\pi x$

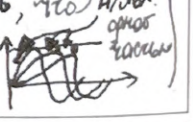
Доказ-во:

$$\begin{cases} \sin 13\pi x = \sin 15\pi x \\ \sin 15\pi x = \sin 17\pi x \\ x \in (0;1) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 13\pi x = 15\pi x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \rightarrow x \in \mathbb{Z} \rightarrow \varnothing \text{ (при данных } x) \\ 13\pi x = \pi - 15\pi x + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$\rightarrow 28x = 1 + 2m$

$$\begin{cases} 13\pi x = 17\pi x + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \rightarrow x = \frac{1}{2} q, q \in \mathbb{Z} \rightarrow \text{не бывает из-за чётного} \\ 15\pi x = \pi - 17\pi x + 2\pi p, p \in \mathbb{Z} \rightarrow 32x = 1 + 2p \rightarrow \text{не бывает из-за } p \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Далее поймём, что каждая точка пересечения создаёт две новые области (пусть была одна линия, которая делит пл-ть на две части. Проведём новую линию, пересекающую начальную. Теперь стало 4 области). Также нужно упомянуть, что благодаря $y \in [-1; 1]$ вновь созданные части не будут одним целым (прим: н/пр. одной такой



80-14-77-71 (124:11)

Числовик

№4, продолжение

Теперь осталось посчитать кол-во пересечений каждого гр-ка с каждым (учитывая $x \in [0;1]$)

$\sin 13\pi x = \sin 15\pi x \to \left[\begin{array}{l} 13\pi x = 15\pi x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \mathbb{Z} \to x \in \{0;1\} \\ 13\pi x = \pi - 15\pi x + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \to 28x = 1 + 2m, m \in \mathbb{Z} \to \end{array}\right.$

$\to$ таких x всего 14 - кол-во нечёт чисел на $[0;28]$.

$\sin 13\pi x = \sin 17\pi x \to \left[\begin{array}{l} 13\pi x = 17\pi x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \mathbb{Z} \to x \in \{0;1\} \\ 13\pi x = \pi - 17\pi x + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \to 30x = 1 + 2m \to \end{array}\right.$ таких x всего

15 - кол-во нечёт чисел на $[0;30]$.

$\sin 15\pi x = \sin 17\pi x \to \left[\begin{array}{l} 15\pi x = 17\pi x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \to x \in \mathbb{Z} \to x \in \{0;1\} \\ 15\pi x = \pi - 17\pi x + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \to 32x = 1 + 2m \to \end{array}\right.$ таких x всего

16 - кол-во нечет. чисел на $[0;32]$.

Итого, 45 пересечений при $x \in (0;1)$

Также, было 4 области изначально, а пересечения в $x = 1$ новых областей не добавляет, $(x>0)$

а лишь разграничивает прошлые.

Итого, $45 \cdot 2 + 4 = 94$ области

Ответ: 94.

№8

ОДЗ: $a > 0, a \neq 1$

$x > 0, x \neq 1$

$8x^2 \log_a x - \frac{1}{\log_a x} - 2x \leq 0$

$\frac{8x^2 \log_a^2 x - \log_a x \cdot 2x - 1}{\log_a x} \leq 0$

Решим верхнее уравнение относительно $\log_a x$, $D = 4x^2 + 32x^2 = (6x)^2$

$\log_a x = \frac{2x \pm 6x}{16x^2} \in \left\{\frac{1}{2x}; -\frac{1}{4x}\right\}$

Тогда: $\frac{8x^2\left(\log_a x - \frac{1}{2x}\right)\left(\log_a x + \frac{1}{4x}\right)}{(a-1)(x-1)} \leq 0$

Подумаем, как может получиться так, что у нас в ответе оказывается выколотая точка. Это может происходить только, если две скобки в числителе дают одинаковый результат

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Чистовик

№8, продолжение

Поскольку ОДЗ не может повлиять на то, чтобы появилась ровно одна точка (при обычных преобразованиях).

Т.е., на ОДЗ $\left(\log_a x - \frac{1}{2x}\right)$ и $\left(\log_a x + \frac{1}{4x}\right)$ имеют одинаковые знаки при этом, обращаются в 0 при одинаковом x

$\log_a x = \frac{1}{2x}$

$\log_a x = -\frac{1}{4x}$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{2x} = -\frac{1}{4x} \to x = 0$. Тогда также и ноль

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!