0 827967 510003

82-79-67-51

(124.32)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11 класс. (6 вариант)

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Алексеева Ильи Романовича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«29» марта 2026 года

Подпись участника

82-79-67-51 (12.1.32)

100 (сто)

Вариант 6. Чистовик

№1

$$\sqrt{6(1-ctg^2x)} = 4\cos x \Leftrightarrow \sqrt{6\left(\frac{\sin^2x-\cos^2x}{\sin^2x}\right)} = 4\cos x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6\cdot\frac{-\cos 2x}{\sin^2x} = 16\cos^2x \\ 4\cos x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3\cos 2x = 8\sin^2x\cdot\cos^2x \\ \sin x \neq 0 \\ \cos x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{-3\cos 2x = 2} \\ -3(1-2\sin^2x) = 8\sin^2x\cdot\cos^2x \quad (*) \\ \sin x \neq 0 \\ \cos x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

Пусть $t = \sin^2 x$, тогда $(*)$ примет вид:

$$-3(1-2t) = 8t(1-t) \Leftrightarrow -3+6t = 8t-8t^2 \Leftrightarrow$$

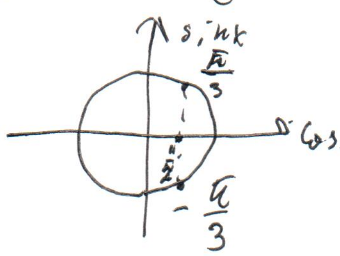
$$\Leftrightarrow 8t^2-2t-3=0 \Leftrightarrow \quad \frac{D}{4} = 1+24 = 25 \quad \left[\begin{array}{l} t=\frac{1+5}{8} \\ t=\frac{1-5}{8} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{3}{4} \\ t=-\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Вернёмся к системе:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin^2x=\frac{3}{4} \\ \sin^2x=-\frac{1}{2}<0 \text{ - нет реш. } (\text{т.к. } \sin^2x\geq 0) \end{array}\right. \\ \sin x\neq 0 \\ \cos x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2x=\frac{3}{4} \\ \sin x\neq 0 \\ \cos x\geq 0 \end{cases}$$ т.к. $\sin^2x=\frac{3}{4} \Rightarrow \sin x\neq 0$ $$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2x=\frac{3}{4} \\ \cos x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-\cos^2x=\frac{3}{4} \\ \cos x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2x=\frac{1}{4} \\ \cos x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}$$



$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$$

Ответ: $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$

№2 При делении числа на сумму его цифр получ. число кратное 9. $\boxed{\text{Чистовик}}$

Значит исходное число также было кратно 9. Отсюда получаем (по критерию делимости на 9) что и сумма цифр числа дел. на 9 ; Поэтому необход. чтобы число делилось на 81 (т.к. иначе при делении на число кратное 9 получим некратное)

Рассм. все трёхзн. числа дел. на 81:

$\cancel{81}$ $162 \to \frac{162}{9} = 18$ (подх.) (1)

$243 \to \frac{243}{9} = 27$ (подх.) (2)

$324 \to \frac{324}{9} = 36$ (подх.) (3)

$405 \to \frac{405}{9} = 45$ (подх.) (4)

$486 \to \frac{486}{18} = 27$ (подх.) (5)

$567 \to \frac{567}{18} \notin \mathbb{Z}$ (не подх.)

$648 \to \frac{648}{18} = \frac{81 \cdot 8}{18} = 36$ (подх.) (6)

$729 \to \frac{729}{18} \notin \mathbb{Z}$ (не подх.)

$810 \to \frac{810}{9} = 90$ (подх.) (7)

$891 \to \frac{891}{18} \notin \mathbb{Z}$ (не подх.)

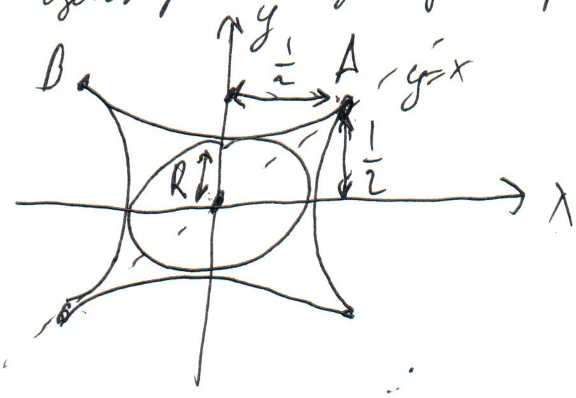
$972 \to \frac{972}{18} = \frac{81 \cdot 12}{18} = 54$ (подх.) (8

Сумма (1); (6); (8): $162 + 648 + 972 = 810 + 972 = 1782$

Ответ: 1782

Чистовик

№5 Введём систему коорд. с центром в центре окр-ти. (см. рис.)



1) Заметим, что конструкция симметрична относ $y=x$ (в целом симметр.) поуал.
(каждая парабола повернута на 90° отн. центра.

2) ~~Ур-е верх.~~ Углы квадрата нулевые $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ в верш. A общие касательные $\Rightarrow$ (т.к. оси симметр. отн. $y=x$) $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ общая кас - $y=x$

3) Ур-е верхней параболы: $y=Cx^2+R$

Коорд. A: $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ (расс. до Ox и Oy - половина стороны квадр.)

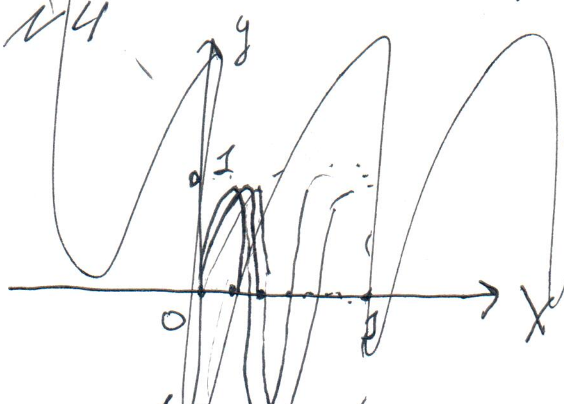
$y'=2Cx$

$y'\left(\frac{1}{2}\right)=1 \Rightarrow \quad C=1$ (производная равна tg наклона касат.)

$y\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2} \Rightarrow \quad \frac{1}{2}=\frac{C}{4}+R \Rightarrow$ $C=1$ $\quad R=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$

Ответ: $\frac{1}{4}$

№4



Чем больше k, тем сильнее график $y=\sin k\pi x$ "прижимается" к Oy.
Рассм.

№3 F – образует куб из точек со стороной 7: $(-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3)$ Чистовик

Вершину напротив гипотенузы можно выбрать 7^3 способами.
Для каждой такой вершины существует по 6 точек на осях (по направлениям осей коорд.)
Нужно выбрать 2 направления из 3х и по 1 точке на каждом направлении
Это можно сделать $3 \cdot 6 \cdot 6$ $(C_3^2 = C_3^1 = 3)$ способ.

Итого: $7^3 \cdot 36 \cdot 3 = 108 \cdot 7^3 =$
$= 108 \cdot 49 \cdot 7 = 756 \cdot 49$
$= 37044$

$$\begin{array}{r} 756 \\ \times\ 49 \\ \hline 6804 \\ 3024\ \\ \hline 37044 \end{array}$$

Ответ: 37044

№8 $3x^2 \log_a x - \log_x a - 2x \le 0$
$D/4 = 1 + \log_a x \cdot 3 \cdot \log_x a = 4$
Пусть $t = \log_a x$, $x \ne 1$; $x > 0$, $a > 0$; $a \ne 1$.
~~Ур. t~~ ур. вид: $3a^{2t} \cdot t - \frac{1}{t} - 2a^t \le 0$
перво
Решим, как кв. относ a^t:
$D/4 = 1 + 3 = 4$: $\left(a^t - \frac{2+2}{3t}\right)(\ldots) \le 0$
$\left(a^t - \frac{1+2}{3t}\right)\left(a^t - \frac{1-2}{3t}\right) \le 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(a^t - \frac{1}{t}\right)\left(a^t + \frac{1}{3t}\right) \le 0$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} t < 0 \\ a^t \le -\frac{1}{3t} \end{cases} \\ \begin{cases} t > 0 \\ a^t \le \frac{1}{t} \end{cases} \end{array}\right.$$

Заменил функц. $\log_a x$ на $(0; +\infty)$ взаимно однозн. по реш. по X обр. получим и потому найти реш. по t тоже обр. получим итоговое.

~~№8 (продолжение)~~ Параметризуем ~~Введем с.к.~~ точку на AB:

№6 A X B

(-3;4;6) (6;7;6)

C D

(0;0;2) (3;0;2)

$X = A + \vec{AB}\cdot\alpha$; $\alpha\in[0;1]$ **Чистовик**

$X = (-3;4;6) + (9;3;0)\cdot\alpha$, $\alpha\in[0;1]$

$= (-3+9\alpha; 4+3\alpha; 6)$

Обозн. верш. забора C, D. Заметим, что $\forall X$ тень будет трапецией: одно основание — ($C'(0;0;0)$; $D'(3;0;0)$) второе основание.

Пересеч XD и XC с Oxy — обозначим E; F

$E(\alpha) = C + \frac{1}{2}\vec{XC} = (0;0;2) + \frac{1}{2}(3-9\alpha; -4-3\alpha; -4) =$

$= \left(\frac{3-9\alpha}{2}; \frac{-4-3\alpha}{2}\right)$; $E(0) = \left(\frac{3}{2}; -2\right)$; $E(1) = \left(-3; -\frac{7}{2}\right)$

$F(\alpha) = D + \frac{1}{2}\vec{XD} = (3;0;2) + \frac{1}{2}(6-9\alpha; -4-3\alpha; -4) =$

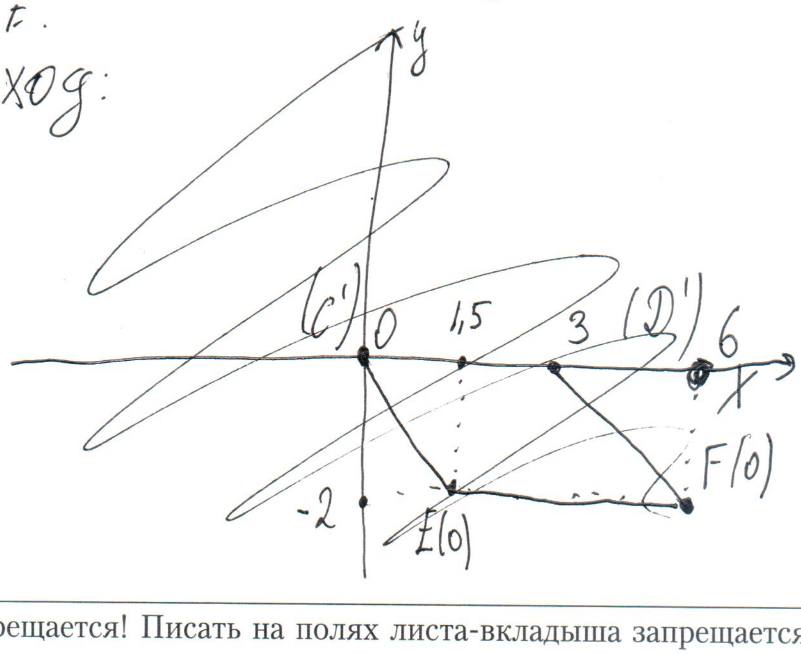
$= \left(\frac{12-9\alpha}{2}; \frac{-4-3\alpha}{2}; 0\right)$; $F(0) = (6;-2)$; $F(1) = \left(1{,}5; -\frac{7}{2}\right)$

Видим, что коорд. x; y т.E и т.F зависят линейно (Напр.: $t = \frac{3-9\alpha}{2} \Rightarrow -9\alpha = 2t-3 \Rightarrow \alpha = \frac{3-2t}{9} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{-4-3\alpha}{2} = \frac{-4-\frac{3-2t}{3}}{2} = \frac{-12-3+2t}{6}$

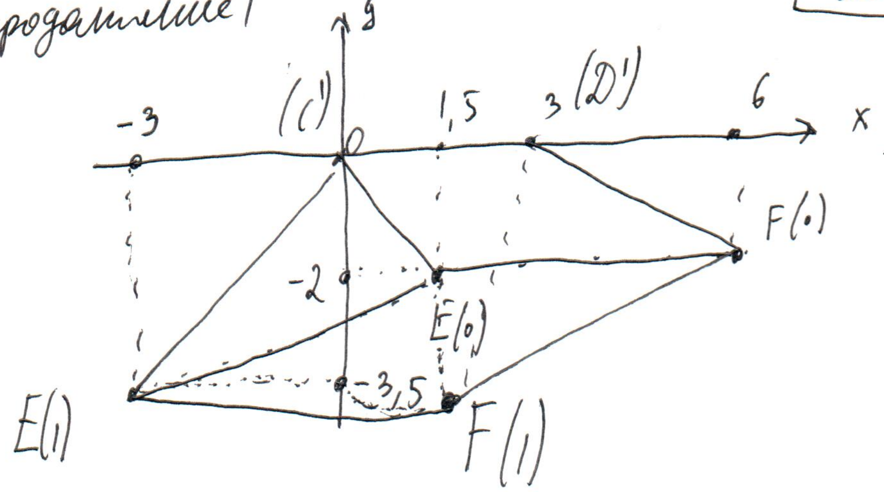
Аналогично для F.

Построим на xOy:



Черновик

№6 (продолжение) | чистовик



Каждая затемнённая точка - хотя бы 1 раз попавшая в трапецию C'D'F(2)E(2)

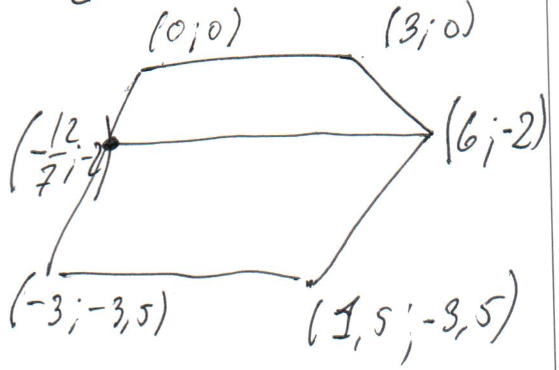
F(2) и E(2) - двигуются по отрезку [F(0);F(1)] и [E(0);E(1)] (т.к. коорд. линейно завис.)

Поэтому искомая площадь - площадь пятиугольника C'D'F(0)F(1)E(1) (см. рис.)

Продлим F(0)E(0) до пересеч с C'E(1):

в т. $-2\cdot\frac{3}{3,5}=-\frac{12}{7}$

(угловой коэф прямой E(1)C' $\frac{3,5}{3}$



Найдем S как сумму площадей трапеций:

$$S=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\left(3+\frac{54}{7}\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{54}{7}+4,5\right)=$$

$$=\frac{75}{7}+\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{108}{14}+\frac{63}{14}\right)=\frac{75}{7}+\frac{171\cdot 3}{56}=\frac{600+513}{56}=$$

$$=\frac{1113}{56}=\frac{159}{8}=19,875$$

$1113 : 7 = 159$

Ответ: 19,875 (м²)

№7 Пусть $x \geq 0$ (Половина листа) Чистовик

Рассмотрим произв. четырех-
-угольник он ограничен ограничен некотор.
графиками $y = \frac{3x^2}{4} + c$; $y = \frac{3x^2}{4} + c + 1$

$y = -\frac{3x^2}{4} + d$; $y = -\frac{3x^2}{4} + d + 1$

Найдем вершины: $\frac{3x^2}{4} + c = -\frac{3x^2}{4} + d \Rightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{3x^2}{2} = d - c$