0 397075 840007

39-70-75-84
(122.1)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 9

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Альперта Владияра Андреевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«29» марта 2026 года

Подпись участника

Нет

ЧИСТОВИК-1.

№1.

рис. 1

Если две различные хорды ~~пересекат~~ точкой пересечения делятся пополам (рис. 1), то ACBD – параллелограмм, но т.к. это хорды одной окружности, то ACBD – вписанный.

ACBD – вписанный параллелограмм => ACBD – прямоугольник => => O – центр окружности => все 3 хорды – диаметры.

$D = 2 \cdot R = 2 \cdot 5 = 10$

Ответ: 10.

№2.

$n = \overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d$

Если $a=2$, то первая цифра n^2 принадлежит ~~это~~ (левая) $[4;9)$ $(2000^2 = 4000000; 3000^2 = 9000000)$

$(3^2=9; 4^2=16)$

Если $a=3$, то первая цифра n^2 ~~принадлежит~~ либо 9, либо 1.

Если $a=4$, то первая цифра n^2 либо 1, либо 2. $(4^2=16; 5^2=25)$

Если $a=5$, то первая цифра n^2 либо 2, либо 3. $(5^2=25; 6^2=35)$

Если $a=6$, то первая цифра n^2 либо 3, либо 4 $(6^2=36; 7^2=49)$

Если $a=7$, то первая цифра n^2 либо 4, либо 5, либо 6. $(8^2=64)$

~~Если a=8~~ Значит $a=1$ или $a=8$ или $a=9$.

1 2 3 (8 цифр)

1) $1000 \le n < 2000$

$1000000 \le n^2 < 4000000$

(7 цифр)

$n^2 = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7}$

по усл.: $n^2 = \overline{abcd\,a_5a_6a_7}$

$n^2 = 1000n + \overline{a_5a_6a_7}$

$0 \le \overline{a_5a_6a_7} < 1000$

$1000n \le n^2 < 1000(n+1)$

~~$1000 \le n < 1000\frac{n+1}{n}$~~

при $n=1000$: $n^2 = 1000000$ ✓

при $n=1001$: $n^2 = 1002001$

$1000(n+1) = 1002000$ ✓ противоречие

2) $8000 \le n < 9000$

$64 \cdot 10^6 \le n^2 < 81 \cdot 10^6$

(8 цифр)

$n^2 = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8}$

по усл.: $n^2 = \overline{abcd\,a_5a_6a_7a_8}$

$n^2 = 10^4 \cdot n + \overline{a_5a_6a_7a_8}$

$0 \le \overline{a_5a_6a_7a_8} < 10^4$

$10^4 \cdot n \le n^2 < 10^4 \cdot (n+1)$

при $n = 8000$: $n^2 = 64000000$

при $n = 8900$: $n^2 = 79210000$

$7921 < 8900$

значит $b \ge 9 \Rightarrow b = 9$, но ~~тогда~~ у n^2, с первой цифрой 8, вторая либо 0, либо 1, не 9, противоречие

значит $a \ne 8$

3) при $n=9900$: $n^2 = 98010000$

$9801 < 9900$

значит $b \ge 9 \Rightarrow b = 9$

при $n = 9999$: $n^2 = 99980001$

$9998 < 9999$

значит $a \ne 9$

для 2 и 3 при увеличении n увеличиваются первые n цифр у числа n^2 (если кол-во цифр у n^2 не изм-ся), т.е. если стали больше, то до изм. кол-ва цифр будут больше.

см. черн. – 4

Ответ: 1000.

ЧИСТОВИК-2

№3.

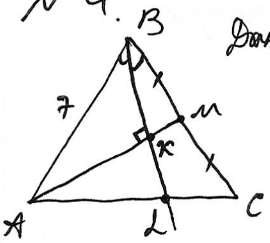
Координаты от 1 до 10 (вкл.) по усл. ~~задачи~~

Зная вершину с прямым углом ($9 \cdot 9 = 81$ вариант), есть $9-1=8$ способов разместить вершину по вертикали и $9-1=8$ способов по горизонтали.

Итого: $81 \cdot 8 \cdot 8 = 3^4 \cdot 2^6 = 81 \cdot 64 = 5184$

Ответ: 5184.

№4.



Дано: BL – бисс.; AM – мед; $AM \perp BL$; $AB = 7$; $AB \neq BC$; $AB \neq AC$; $AC \neq BC$; $AB, BC, AC \in \mathbb{Z}$

Найти: P.

Решение: по св-ву бисс. BL $\triangle ABC$: $\frac{AL}{AB} = \frac{CL}{BC}$ (1)

BK – бисс. и выс. в $\triangle ABM \Rightarrow \triangle ABM$ – р/б $\Rightarrow BM = AB = 7$ (2)

$BC = 2BM = 14$ (3)

BK выс. $\triangle ABM$, т.к. $BL \perp AM$. $BM = CM$, т.к. AM – мед.

из (1),(3) и (2) $\Rightarrow \frac{AL}{7} = \frac{CL}{2 \cdot 7} \Rightarrow CL = 2AL$

по нер-ву $\triangle ABC$: $AC < AB + BC = 21$; $AC > BC - AB = 7$; $AC \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow 8 \leq AC \leq 20$; $AC \neq BC = 14$

$P = AB + BC + AC = 21 + AC \Rightarrow 8 + 21 \leq P \leq 20 + 21$

$29 \leq P \leq 41$ $P \neq 21 + 14 = 35$

Ответ: 29; 30; 31; 32; 33; 34; ~~35~~; 36; 37; 38; 39; 40; 41.

№5.

A 50 B 30 C 120 D 10 E

$t = \frac{s}{v}$; всё в системе СИ

① при выходе загорается красным, значит через 30 с. зелёным; 80 с. – красным

② при выходе загорается через 10 с. красным, значит через 60 с. зелёным; 110 с. – красным

1) ① $30 \leq \frac{50}{v}$ и $\frac{80}{v} \leq 80$ ② $\frac{200}{v} \geq 60$ и $\frac{210}{v} \leq 110$ (через 1 цикл)

$1 \leq v \leq \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{21}{11} \leq v \leq \frac{5}{3} \Leftarrow \frac{21}{11} \leq v \leq \frac{20}{6}$

противоречие

2) ① $\frac{50}{v} \geq 30$ и $\frac{80}{v} \leq 80$ ② $\frac{200}{v} \geq 160$ и $\frac{210}{v} \leq 210$ (через 2 цикла)

$1 \leq v \leq \frac{5}{3} \Rightarrow 1 \leq v \leq \frac{5}{4} \Leftarrow 1 \leq v \leq \frac{20}{16} = \frac{5}{4}$

3) если 2 цикла, то $v < 1 < \frac{5}{4}$.

Ответ: $v_{max} = 1,25$ м/с.

39-70-75-84 (122.1)

ЧИСТОВИК-3.

№6.

$\frac{1}{a}+\frac{2x}{a^2}-\frac{3x^2}{a^3}\leq 0$, при $a=0$: $\emptyset \Rightarrow a\neq 0 \Rightarrow$ можно умножить на $a^4>0$

$a^3+2xa^2-3x^2a\leq 0 \;|\cdot(-1)$

$3a\cdot x^2-2a^2\cdot x-a^3\geq 0$, при $a>0$: бесконечно много решений (при $x>>a^3$) значит $a<0$

$a(3x^2-2ax-a^2)\geq 0 \;|:a<0$

$3x^2-2ax-a^2\leq 0$

$3x^2-2ax-a^2=0$

~~$D=(2a)^2-4\cdot 3\cdot(-a^2)=4a^2+12a^2=16a^2$~~

$3(x-a)(x+\frac{1}{3}a)=0$

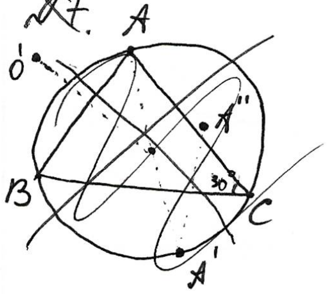
$+\quad -\quad +$; $a \quad 0 \quad -\frac{1}{3}a$; x

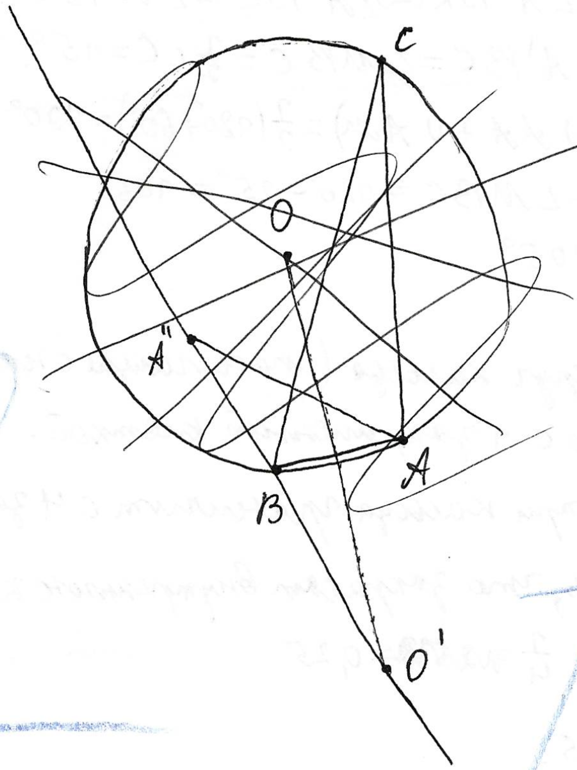
$x\in[a;-\frac{1}{3}a]$, длина этого отрезка: $-\frac{1}{3}a-a=2026$

$-\frac{4}{3}a=2026 \Rightarrow a=-\frac{3039}{2}$

Ответ: $a=-\frac{3039}{2}$.

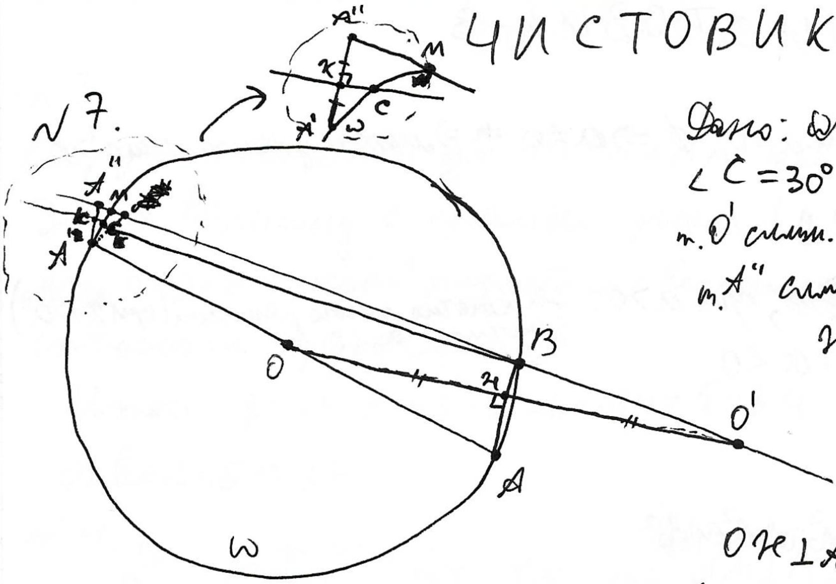
~~№7.~~





ЧИСТОВИК-4

№7.



Дано: ~~ω; ΔАВС~~ ΔABC; ω(ABC); $\angle C = 30^\circ$; O', B, A'' на одной прямой; т. O' симм. AB т. O; A' — диам. прот. A; т. A'' симм. отн. BC т. A'.

Найти: $\angle B$.

Решение: пусть $OO' \cap AB = H$; $A'A'' \cap BC = K$.

$OH \perp AB$ (симм.) $\Rightarrow AH = BH$ (1)

(диам. $\perp$ хорде делит её пополам)

$\left.\begin{array}{l} AH = BH \ (1) \\ OH = O'H \text{ (симм.)} \\ OO' \perp AB \text{ (симм.)} \end{array}\right| \Rightarrow OBO'A$ — ромб $\Rightarrow O'B \parallel AO \Rightarrow \smile AB = \smile A'M \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle A'BM = \angle C = 30^\circ$ (2)

в $\Delta BA'A''$, BK — выс. мед. (A' симм. A'') $\Rightarrow BK$ — бисс., $\Delta BA'A''$ — р/б $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle A'BK = \angle A''BK \Leftrightarrow \angle A'BC = \angle MBC$ (3)

из (2) и (3) $\Rightarrow \angle A'BC = \angle MBC = \frac{1}{2}\angle C = 15^\circ$.

$\angle MBA = \frac{1}{2}(\smile AA' + \smile A'M) = \frac{1}{2}(180^\circ + 60^\circ) = 120^\circ$

$\angle B = \angle MBA - \angle MBC = 120^\circ - 15^\circ = 105^\circ$

Ответ: $\angle B = 105^\circ$.

№8.

Клетки вокруг кольца (граничащие с ним $3 \cdot 4 = 12$) граничат каждая только с 1 закрашенной клеткой.

Клетка внутри кольца граничит с 4 закрашенными клетками.

Вероятность, что закрасят внутреннюю клетку:

$\frac{4}{4+3\cdot4} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} = 0,25$

Ответ: 0,25.

№2. (продолжение чистовика-1)

если у n 4 цифры, а у n^2 8 цифр, то ~~~~ первые n цифр у числа n^2 монотонно ~~возрастают~~ не убывают по сравнению с n, потому что ~~~~ при переходе от n к $(n+1)$, $n^2 \to (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$, т.к. ~~в n 4 цифры~~ $n \geq 8000$, то $2n \geq 16000 \Rightarrow$ хотя на 1 ~~добавл~~ увеличатся первые n цифр $\Rightarrow$ не убывает, следовательно в (2) и (3) $n = 8000$ ~~не подошло~~ было меньше и $n = 9999$ было меньше $\Rightarrow$ перехода на больше не было $\Rightarrow$ равенства не было $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ ничего не подошло.

ЧЕРНОВИК.

n	n^2		$1000(n+1)$
1000	1000000	$<$	1001000
1001	1002001	$<$	1003000
1010	1020100	$>$	1011000
1005	1010025	$>$	1006000
1003	1006009	$>$	1004000
1002	1004004	$>$	1003000

$\times$ 1001
1001
1001
$+$ 1001
1002001

$\times$ 1010
1010
101
$+$ 101
1020100

1005
$\times$ 1005
5025
$+$ 1005
1010025

$\times$ 1003
1003
3009
$+$ 1003
1006009

$\times$ 8700
8700
609
$+$ 696
75690000

$\times$ 8900
8900
801
712
79210000

$\times$ 9500
9500
472
$+$ 855
90220000

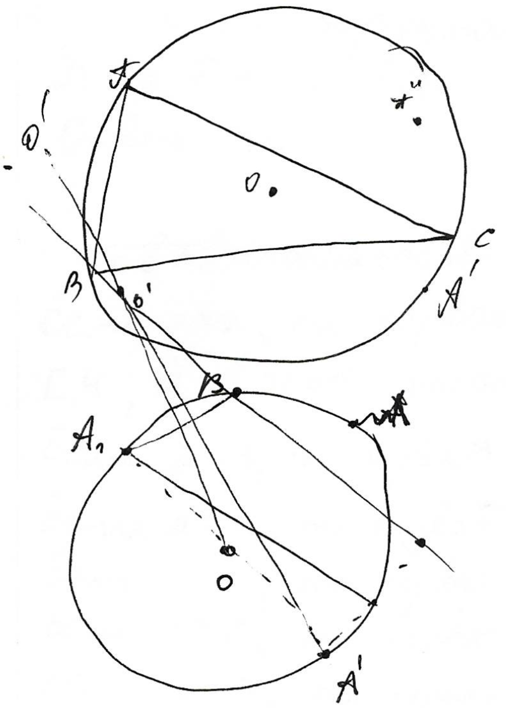
$\times$ 9700
9700
6798
$+$ 873
94090000

$\times$ 9900
9900
891
$+$ 891
98010000

$\times$ 9980
9980
7984
$+$ 8982
8982
996004

$\times$ 9999
9999
89991
$+$ 89991
89991
89991
99980001

$\times$ 87
64
324
$+$ 486
5184



$\cancel{5(n^2) > (n+1)n}$

$5((n+1)^2) > n+1$