0 832277 00008

83-22-77-85

(2240)

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**
**имени М.В.ЛОМОНОСОВА**

Вариант 1

Место проведения Москва
город

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Аметова Юрия Дмитриевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«29» марта 2026 года

Подпись участника

АЮ

85 (Восемьдесят пять) [illegible]

83-22-77-85 (124.4?)

Черновик

1.

$\sin x \neq 0$

$6(1-\operatorname{tg}^2 x)=16\sin^2 x$

$6-\dfrac{6\sin^2 x}{\cos^2 x}=16\sin^2 x$

$\sin x \neq 0$

$\cos x \neq 0$

$6(\cos^2 x-\sin^2 x)=16\sin^2 x\cos^2 x$

$\cancel{3}6\cos 2x=\cancel{4}\cdot\sin^2 2x$

$3\cos 2x-1+\cos^2 2x=0$

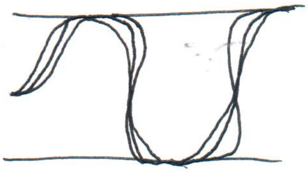
$\cos^2 2x+3\cos 2x-1=0$

$D=9+4=13$

$\cos 2x=\dfrac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$

$3<\sqrt{13}<4$

$\cos 2x=\dfrac{-3+\sqrt{13}}{2}$



$0<\dfrac{-3+\sqrt{13}}{2}<\dfrac{1}{2}$

$2x=\pm\arccos\dfrac{-3+\sqrt{13}}{2}$

$x=\pm\frac{1}{2}\arccos\dfrac{-3+\sqrt{13}}{2}$

$\boxed{x=\frac{1}{2}\arccos\dfrac{-3+\sqrt{13}}{2}}$

$\dfrac{8x^2\ln x}{\ln a}-\dfrac{\ln a}{\ln x}-2x=0$

$8x^2\ln^2 x-\ln^2 a-2x\ln a\ln x$

$\ln a=t$

$x\neq 1$

$8x^2\ln^2 x-t^2-2x$

$t\ln x$

$8x^2\ln^2 x-t^2-2x\ln x\, t$

$d=\ln x$

$8d^2-2dt-t^2$

$t \ln x$

$(d-\frac{t}{2})(d+\frac{t}{4})=d^2-\frac{t}{4}d-\frac{t^2}{8}$

$\frac{t}{2}\cdot\frac{t}{4}=\frac{t^2}{8}$

$\frac{t}{4}-\frac{t}{2}=\frac{-t}{4}$

$d=\frac{t\pm 3t}{8}$

$\ln x=0$

$\sin 13\pi x<1$

$\sin 13\pi x=-1$

$13\pi x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$

$13\pi x=\frac{3\pi}{2}+2\pi k$

2.

$\dfrac{\overline{abc}}{a+b+c}\ \vdots\ 9$

$\overline{abc}\ \vdots\ 9$

$a+b+c\ \vdots\ 9$

$\overline{abc}\ \vdots\ 81$

$\dfrac{100a+10b+c}{a+b+c}\equiv 0\ (9)$

$100a+10b+c\equiv 0$

$100a+10b+c$

$109a+10b+c\overset{81}{\equiv}0$

$162;\ 243;\ 324;\ 405;\ 486;\ \cancel{567};\ 648;\ \cancel{729};\ 810;\ \cancel{891};\ 972$

$162;\ 243;\ 324;\ 405;\ 486;\ 648;\ 810;\ 972.\quad 729+810=\boxed{1539}$

3.

$3 \cdot 8^2 \cdot 9 = 192 \cdot 729$ Черновик

$2x = t$

5.

4.

$\sin 13\pi x = \sin 15\pi x$

$13\pi x = 15\pi x + 2\pi k$

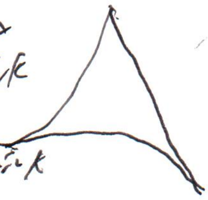
$13\pi x = \pi - 15\pi x + 2\pi k$

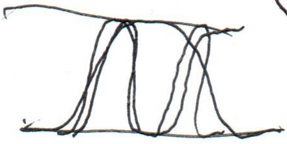
$x = k$

$x = \frac{1}{28} + \frac{k}{14}$

$x = 0; 1; \frac{1}{28};$

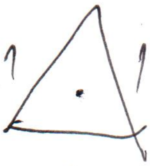
$$\begin{array}{r} 729 \\ \times\ 192 \\ \hline 1458 \\ 6561 \\ 729 \\ \hline 139968 \end{array}$$





1

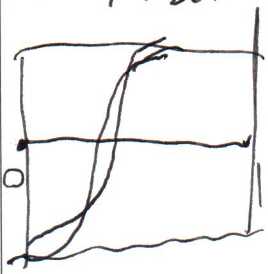
1



1 1

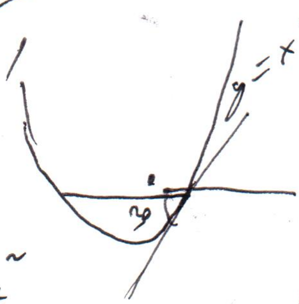
$\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2}x$

$h = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ; $r = \frac{\sqrt{3}}{6} - x$



$2t^2 + 3t - 2 = 0$

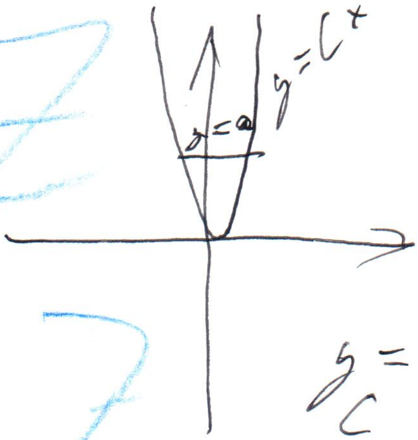
$t = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4} = \frac{1}{2}; -2$



$y = x^2$

$a = Cx^2$

$x = \pm \frac{a}{C}$



$y = Cx^2$

$y = a$

$1 = \frac{2a}{C}$

$a = \frac{C}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$2p^2 - pt - t^2 = (2p + t)(p - t)$

$y = kx + b \quad k = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\frac{C}{4} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{2} + b$

$C = \frac{2\sqrt{3}}{3} + 4b$

$(t - \frac{1}{2})(t + 2) = 0$

$t^2 + t$

$\frac{\sqrt{3}}{3}x + b = Cx^2$

$Cx^2 - \frac{\sqrt{3}}{3}x - b = 0$

$\frac{1}{3} + 4bC = 0$

$C = \frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{3C}$

$b = -\frac{1}{12C}$

$3C^2 - 2\sqrt{3}C + 1 = 0$

$C = \sqrt{3}$

83-22-77-85
(12:49)

Чистовик

1.

$$\sqrt{6(1-tg^2x)}=4\sin x$$

$$\begin{cases}4\sin x\geq 0\\ 6(1-tg^2x)=16\sin^2x \;|:2\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin x\geq 0\\ 3\left(\frac{\cos^2x-\sin^2x}{\cos^2x}\right)=8\sin^2x \;|\cdot\cos^2x\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin x\geq 0\\ 3\cos 2x=2\sin^2 2x\\ \cos^2x\neq 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin x\geq 0\\ \cos x\neq 0\\ 2\cos^2 2x+3\cos 2x-2=0 \quad (1)\end{cases}$$

Решим (1):

$$2\cos^2 2x+3\cos 2x-2=0 \;|:2$$

$$\cos^2 2x+1{,}5\cos 2x-1=0$$

$$\cos^2 2x+2\cos 2x-0{,}5(\cos 2x+2)=0$$

$$(\cos 2x+2)(\cos 2x-0{,}5)=0$$

$$\left[\begin{aligned}&\cos 2x+2=0\\ &\cos 2x-0{,}5=0\end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{aligned}&\cos 2x=-2 \quad \varnothing\\ &\cos 2x=0{,}5\end{aligned}\right.$$

$$\cos 2x=0{,}5$$

$$2x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\; k\in Z$$

$$x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k,\; k\in Z$$

Вернемся к системе:

$$\begin{cases}\sin x\geq 0\\ \cos x\neq 0\\ x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k,\; k\in Z\end{cases}$$

$\cancel{x=\frac{\pi}{6}+2\pi k}$

$\cancel{x=\frac{-\pi}{6}+}$

Чистовик

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z \end{array}\right.$$

Ответ: $\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$.

2.

Если при делении числа на сумму его цифр получается число, кратное 9, т.к. изначальное число было кратно 9, т.к. сумма цифр этого числа по признаку деления на 9 кратна 9. Если при делении числа, кратного 9, на число, кратное 9, получается число, кратное 9, т.к. изначальное число точно было кратно 81. Выпишем все трёхзначные числа, кратные 81: 162; 243; 324; 405; 486; 567; 648; 729; 810; 891; 972. Из этих чисел на сумму своих цифр делятся: 162; 243; 324; 405; 486; 648; 810; 972. Это все трёхзначные числа, которые делятся на сумму своих цифр и при таком делении дают число, кратное 9. Тогда сумма второго, пятого и предпоследнего этих чисел, выписанных по возрастанию это $243 + 486 + 810 = 1539$.

Ответ: 1539.

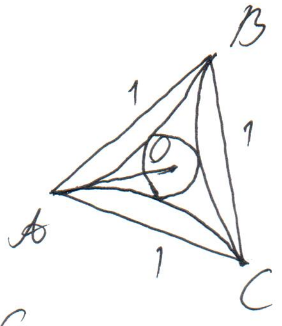
3.

Назовём вершиной прямоугольного треугольника точку пересечения катетов. Тогда количество возможных положений вершины прямоугольного Δ-ка это $9^3$ (т.к. каждая её координата принимает одно из 9 значений). Т.к. ~~катеты~~ каждый из катетов прямоугольного Δ-ка параллелен одной из осей, для каждой вершины прямоугольного Δ-ка существует 3 варианта, каким осям будут параллельны катеты (один $\parallel Ox$ другой $\parallel Oy$; один $\parallel Oy$, другой $\parallel Oz$; один $\parallel Ox$, другой $\parallel Oz$). ~~При этом~~

~~каждый катет может~~ Заметим т.к. каждый катет параллелен какой-то оси, на этой оси он может заканчиваться в одной из 8 точек (1 точка занята вершиной прямоугольного Δ-ка), т.е. у каждого катета, параллельного какой-то оси существует 8 вариантов, как он будет заканчиваться, тогда для каждого варианта вершины прямоугольного Δ-ка существует $3\cdot 8^2$ вариантов прямоугольных Δ-ков. Т.е. итоговое число вариантов ~~прямоугольных вариант~~ Δ-ков это $9^3\cdot 3\cdot 8^2=139968$.

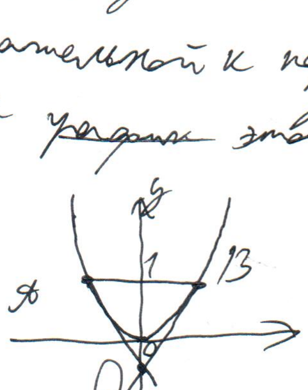
Ответ: 139968.

5 а.




Пусть вершины данного „треугольника" это A, B, C. Тогда расстояние между вершинами это просто соединяющий их отрезок, т.е. $\triangle ABC$ — равносторонний и $AB=BC=AC=1$. $\angle BAC=60^\circ$.

Пусть O — центр вписанной в $\triangle ABC$ окр., тогда O это и центр вписанной в „треугольник" ABC окр. в силу симметрии. Т.е. OA по свойству центра вписанной окр. явл. биссектрисой $\angle BAC$. Тогда $\angle BAO=30^\circ$. При этом т.к. у „треугольника" ABC углы нулевые, AO является касательной к параболе проходящей через точки A и B. Начертим ~~график~~ эту параболу.




Т.к. $AB=1$, т.е. абсциссы точек A и B равны соответственно $-\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2}$ в силу симметрии относительно Oy.

Т.е. B имеет координаты $\left(\frac{1}{2};\frac{c}{4}\right)$. Пусть OB задает прямую $y=kx+b$, тогда т.к. $\angle ABO=30^\circ$, $k=tg30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$. При этом $y=kx+b$ является касательной к $y=cx^2$ и

Черновик

И проходит через точку $\left(\frac{1}{2}; \frac{c}{4}\right)$, т.к. у уравнения $\frac{\sqrt{3}}{3}x+b=cx^2$ одно решение, т.к. $\frac{1}{3}+4bc=0$, и при этом $\frac{c}{4}=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1}{2}+b$.

$$\begin{cases} bc=-\frac{1}{12} \\ \frac{c}{4}=\frac{\sqrt{3}}{6}+b \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=-\frac{1}{12c} \\ \frac{c}{4}=\frac{\sqrt{3}}{6}-\frac{1}{12c} \Big| \cdot 12c \quad (1) \end{cases}$$

Решим (1):

$3c^2-2\sqrt{3}c+1=0$

$(\sqrt{3}c-1)^2=0$

$c=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Т.к. параболы задана ~~уравнениями~~ уравнением $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x^2$.

Вернёмся к системе

$$\begin{cases} c=\frac{\sqrt{3}}{3} \\ b=-\frac{1}{4\sqrt{3}} \end{cases}$$

Т.к. OB задана уравнением $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{1}{4\sqrt{3}}$

В ~~су~~ силу симметрии точка O лежит на Oy, т.к. она имеет координаты $(\cancel{x_0}\,0; y_0 \cancel{0})$, которые удовлетворяют $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{1}{4\sqrt{3}}$, т.к. $y_0=-\frac{1}{4\sqrt{3}}$. А искомый ~~радиус~~ радиус окружности это расстояние от O до любой из парабол, т.к. он равен $|y_0|=\cancel{\ }\frac{1}{4\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{12}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{12}$.

8.

Чистовик

$$8x^2\log_a x - \log_x a - 2x \le 0$$

$$\frac{8x^2\ln x}{\ln a} - \frac{\ln a}{\ln x} - 2x \le 0$$

$$\frac{8x^2\ln^2 x - \ln^2 a - 2x\ln a\ln x}{\ln a\ln x} \le 0$$

$$\frac{2\cdot(2x\ln x)^2 - \ln a\cdot(2x\ln x) - \ln^2 a}{\ln a\ln x} \le 0$$

$$\frac{2(2x\ln x)^2 + (2x\ln x)\ln a - 2(2x\ln x)\ln a - \ln^2 a}{\ln a\ln x} \le 0$$

$$\frac{(2x\ln x)(2(2x\ln x) + \ln a) - \ln a(2(2x\ln x) + \ln a)}{\ln a\ln x} \le 0$$

$$\frac{(2x\ln x - \ln a)(4x\ln x + \ln a)}{\ln a\ln x} \le 0$$

4.

До изображения графиков трёх функций имеется ровно одна область, при касании каждым графиком верхней или нижней границы увеличивает количество непересекающихся областей на 1, т. к. отделяется одна из областей, пересечение двух графиков ~~в~~ какой-либо точке тоже увеличивает количество областей на 1, т. к. они отделяют ~~каждую~~ 1 область, т.н. и ~~то~~ итоговое количество областей это сумма 1, количества пересечений функций и количества касаний функциями границы.

Уравнение $\sin 13\pi x = 1$ имеет 6 решений от 0 до 1.

Уравнение $\sin 13\pi x = -1$ имеет аналогично 6 решений от 0 до 1. Тогда итоговое число это 42.

Ответ: 42.

Черновик.

$\sin 13\pi x = 1$

$13\pi x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$

$x = \frac{1}{26} + \frac{2}{13}k$

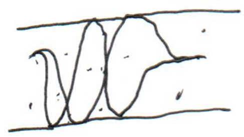
$0 \le \frac{1}{26} + \frac{2}{13}k \le 1$

$-\frac{1}{26} \le \frac{2}{13}k \le \frac{25}{26} \quad |\cdot 13$

$-\frac{1}{2} \le 2k \le \frac{25}{2}$

$-\frac{1}{4} \le k \le \frac{25}{4}$

$k \in [0; 6]$



5 + 4