0 234359 090003

23-43-59-09
(122.4)

1755

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант ______________

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по МАТЕМАТИКЕ
профиль олимпиады

Андреевой Маргариты Андреевны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

выход 13.25 – 13.29

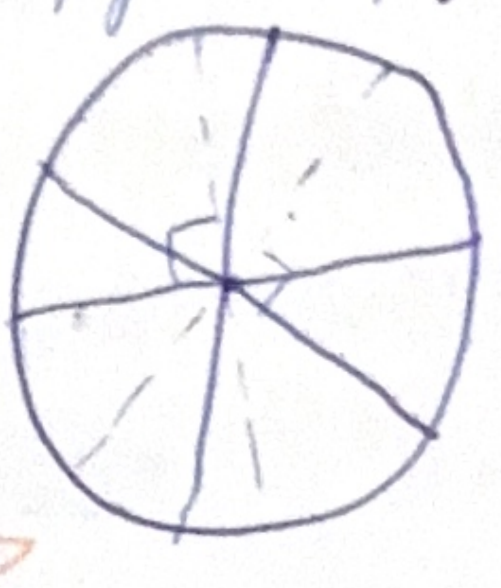
Дата

«29» МАРТА 2026 года

Подпись участника

Задача 1.

Сер. пер. к любой хорде – диаметр. Проведём сер. перы к 1-ым двум хордам. Хорды разные => полученные диам. разные (между ними тот же угол, что и между хордами). Диаметры пересекаются в центре окр. => 3-ья хорда, проходящая через центр, тоже диаметр $=2R=2\cdot 5=10$



Ответ: 10

Задача 2

$n^2=\overline{nx_1x_2\ldots x_k}$, где x_i – цифра. Кв. числа по кол-ву цифр не более чем в 2 раза превосходит исх. число =>

$k \leqslant$ кол-во цифр в n.

$n\neq 0$ => сократим выр-е на n; $n=10^k+\dfrac{\overline{x_1x_2\ldots x_k}}{n}$.

Если $x_1, x_2, \ldots, x_k$ не равны нулям, то, т.к. n и 10^k – цел. числа, и $\dfrac{\overline{x_1x_2\ldots x_k}}{n}$ – целое, т.е. $\overline{x_1x_2\ldots x_k} \vdots n$ и $\geqslant n$ =>

$k \geqslant$ кол-во цифр в n, но и не больше => k = кол-во цифр в n =>

при делении числа на число той же длины частное – число из 1 цифры => $n=10^k$ + цифра $=10^4$ + цифра.

$1000^2=1000000$ ✓ – единственное такое число

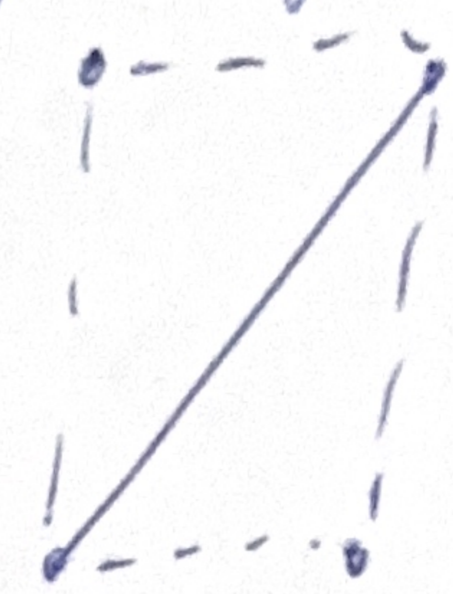
$$\left.\begin{array}{l}
1001^2=1002001\\
1002^2=1004004\\
1003^2=1006009\\
1004^2=1008016\\
1005^2=1010025\\
1006^2=1012036\\
1007^2=1014049\\
1008^2=1016064\\
1009^2=1018081
\end{array}\right\}\text{не подходят}$$

Ответ: 1000

Стр. 1

Задача 3.

Заметим, что любая диагональ с концами в ~~целочисленных~~ точках из F (не параллельная какой-то из коорд. осей), задаёт ровно 2 таких треуг. - один выше неё, др. - ниже.



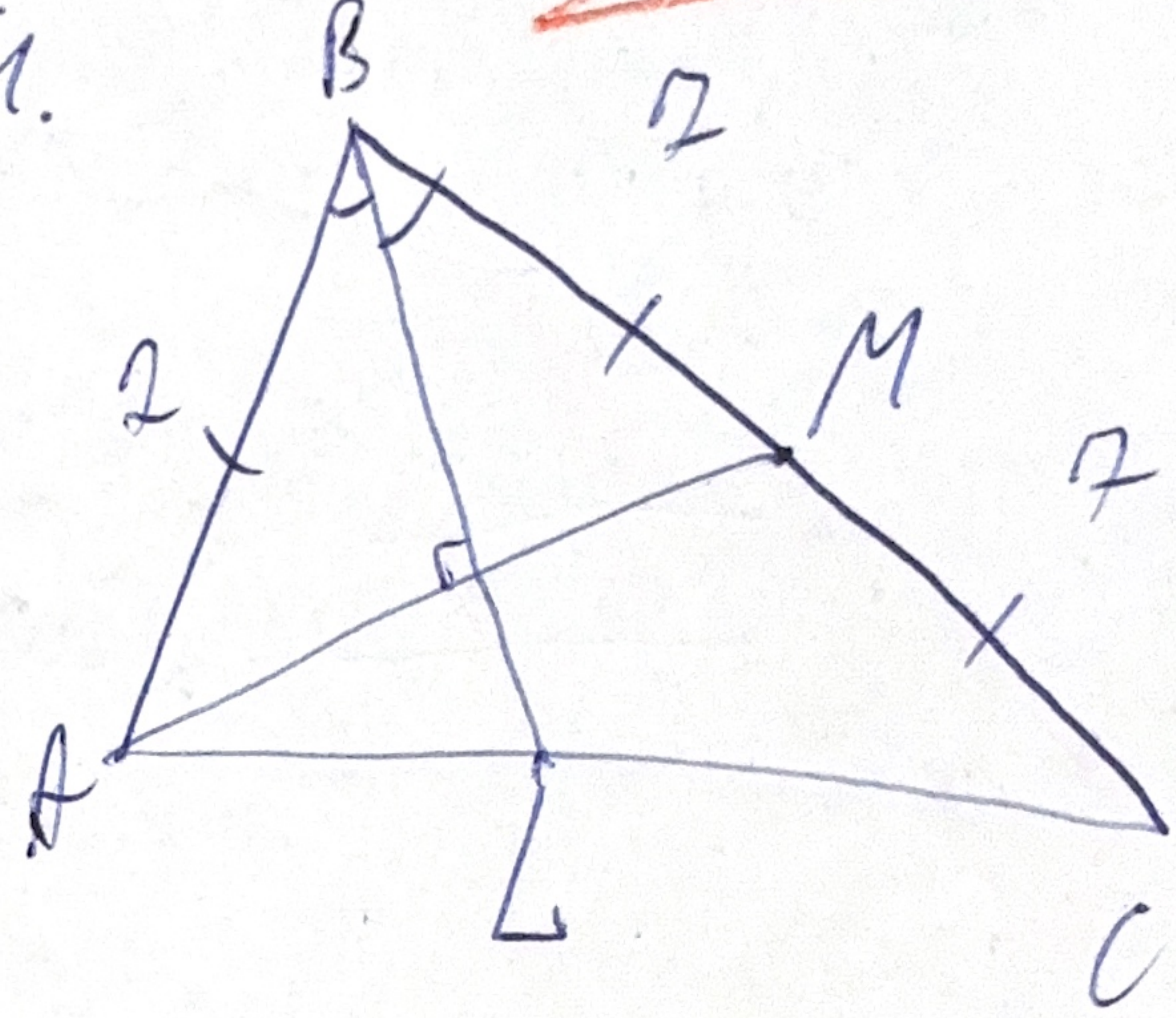
Всего 10·10 точек в F, ещё 9·9 точек, у кот. x- и y- коорд. отлич. от x- и y- коорд. 1-ой точки.

Каждая пара выбрана 2 раза (точки в разном порядке), и каждая пара даёт 2 треуг.

В итоге $\frac{10^2 \cdot 9^2}{2} \cdot 2 = 8100$ таких треуг. есть.

Ответ: 8100

Задача 4.



Рассмотрим △ABM. В нём BL - и бисс., и высота к AM => △ABM равнобедр. с AB = BM = 7, и CM = 7.

В любом треуг со сторонами AB = 7 и BC = 14 бисс. BL перпендикулярна ~~BL~~ медиане AM, т.к. ABM - равнобедр. => AC любое, но не 7 или 14 (△ABC неравнобедр.), и > BC − BA и < AB + BC, иначе треуг. вырожд.

Тогда P = 21 + любое цел. число от 8 до 13 или от 15 до 20.

Ответ: 29; 30; 31; 32; 33; 34; 36; 37; 38; 39; 40; 41.

23-43-59-09 (122.4)

Задача 5.

1-ые 50 м Агриппина (далее А) должна проехать не быстрее чем за 30 сек, иначе попадёт на красн. на 1-ом светофоре. Тогда до 2-ого ей ехать мин.

$\frac{50м + 30м + 120м}{50м} \cdot 30сек = 120$ сек $\Rightarrow$ в 1-ые 2 периода работы

2-ого свет. она не попадает (0-10 сек с ~~начал~~ моментом выхода А. и 60-110 сек), а 3-ий - в 160-210 сек. Быстрее всего добраться за 160 сек. - это скорость $v = \frac{200м}{160сек} = 1{,}25$ м/сек. Тогда 1-ые 50 м она проедет за 40 сек, переход 30 м за 24 сек, 40-64 сек входят в период прохода пешеходов ~~пассажиров~~ на 1-ом св. - 30-80 сек, далее 120 м за 96 сек, и 2-ой переход 10 м за 8 сек, 160-168 сек входят в 3-ий период прохода пешеходов на 2 св. - 160-210 сек. Таким образом, макс. скорость А. - 1,25 м/сек.

Ответ: 1,25 м/сек

Задача 6. Начало.

$a \neq 0$, т.к. есть дел. на a, сократим выр-е на $\frac{1}{a} \neq 0$.

$1 + 2\frac{x}{a} - 3\left(\frac{x}{a}\right)^2 \leq 0$ - если $a > 0$

$1 + 2\frac{x}{a} - 3\left(\frac{x}{a}\right)^2 \geq 0$ - если $a < 0$, меняется знак

Решим кв. ур-е. $1 + 2\frac{x}{a} - 3\left(\frac{x}{a}\right)^2 = 0$

$D = 4 + 12 = 16$

$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 4}{-6}$

$x_1 = 1$

$x_2 = -\frac{1}{3}$

~~коэ~~ ст. коэф. равен $-3 < 0 \Rightarrow$ ветви параболы $f(x) = 1 + 2x - 3x^2$ направлены вниз $\Rightarrow$ для ур-я ≤ 0 реш.: $(-\infty; -\frac{1}{3}] \cup [1; +\infty)$ - 2 отрезка, не подойдёт, для ур-я ≥ 0 реш.: $[-\frac{1}{3}; 1]$ - 1 отрезок.

Стр. 3

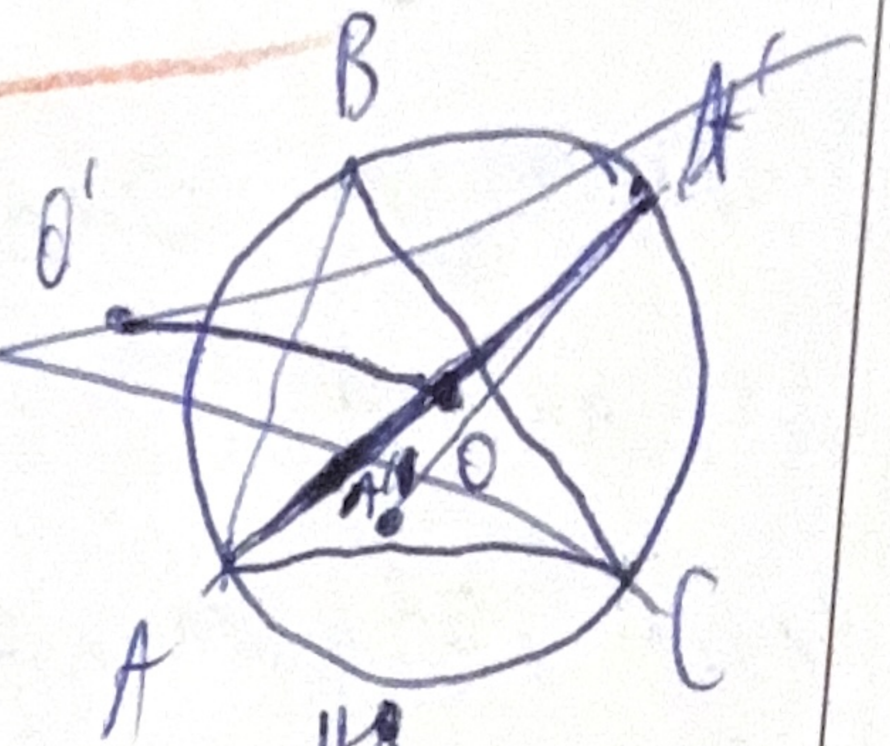
Задача 6. Продолжение.

Значит, $a < 0$. Чтобы отрезок решений x длины 2026 перешёл в отрезок ~~дл~~ $\frac{x}{a}$ длины $\frac{4}{3}$,

$|a| = 2026 / \frac{4}{3} = \frac{2026 \cdot 3}{4} = 1519,5$, $a<0 \Rightarrow a = -1519,5$

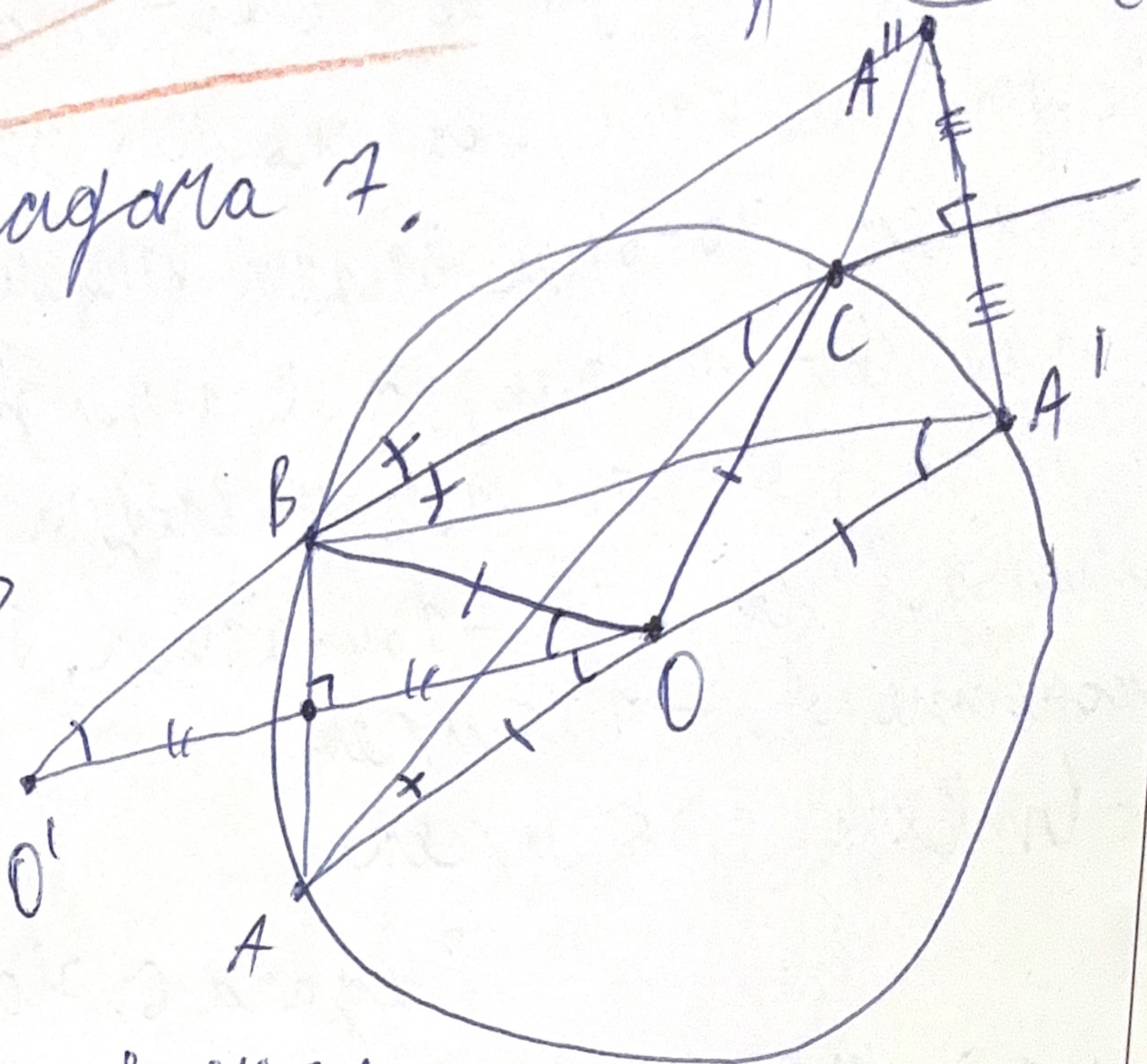
Ответ: $-1519,5$

~~Задача 7.~~



~~Если $\angle B$ - острый, то~~

Задача 7.



$\angle BCA = 30^\circ \Rightarrow$ центр. $\angle$

$\angle BOA = \angle BCA \cdot 2 = 60^\circ$.

OO' – высота и бисс. $\triangle ABO \Rightarrow$

$\triangle ABO$ равнобедр. с $\angle AOB = 60^\circ$

$\Rightarrow \triangle ABO$ равносторон. $\Rightarrow$

$\angle ABO = 60^\circ$

Обозначим A' - диам. противоположн. A

$AA'B = \angle ACB = 30^\circ$

$\angle AOO' = \angle AOB/2 = 30^\circ = \angle AA'B \Rightarrow OO' \parallel AB \Rightarrow \angle BO'O = \angle A'BA'' = 30^\circ$

BC – бисс. и высота $A'BA'' \Rightarrow \angle A'BC = A'BA''/2 = 15^\circ$

$\angle A'AC = A'BC = 15^\circ$.

$\angle OAB - \angle OAC = 60^\circ - 15^\circ = 45^\circ = \angle CAB \Rightarrow$ центр. $\angle BOC =$

$= 2\angle CAB = 90^\circ$.

$OB = OC$, т.к. радиусы $\Rightarrow \angle BOC$ равнобедр. $\Rightarrow \angle CBO = (180^\circ - \angle BOC)/2 =$

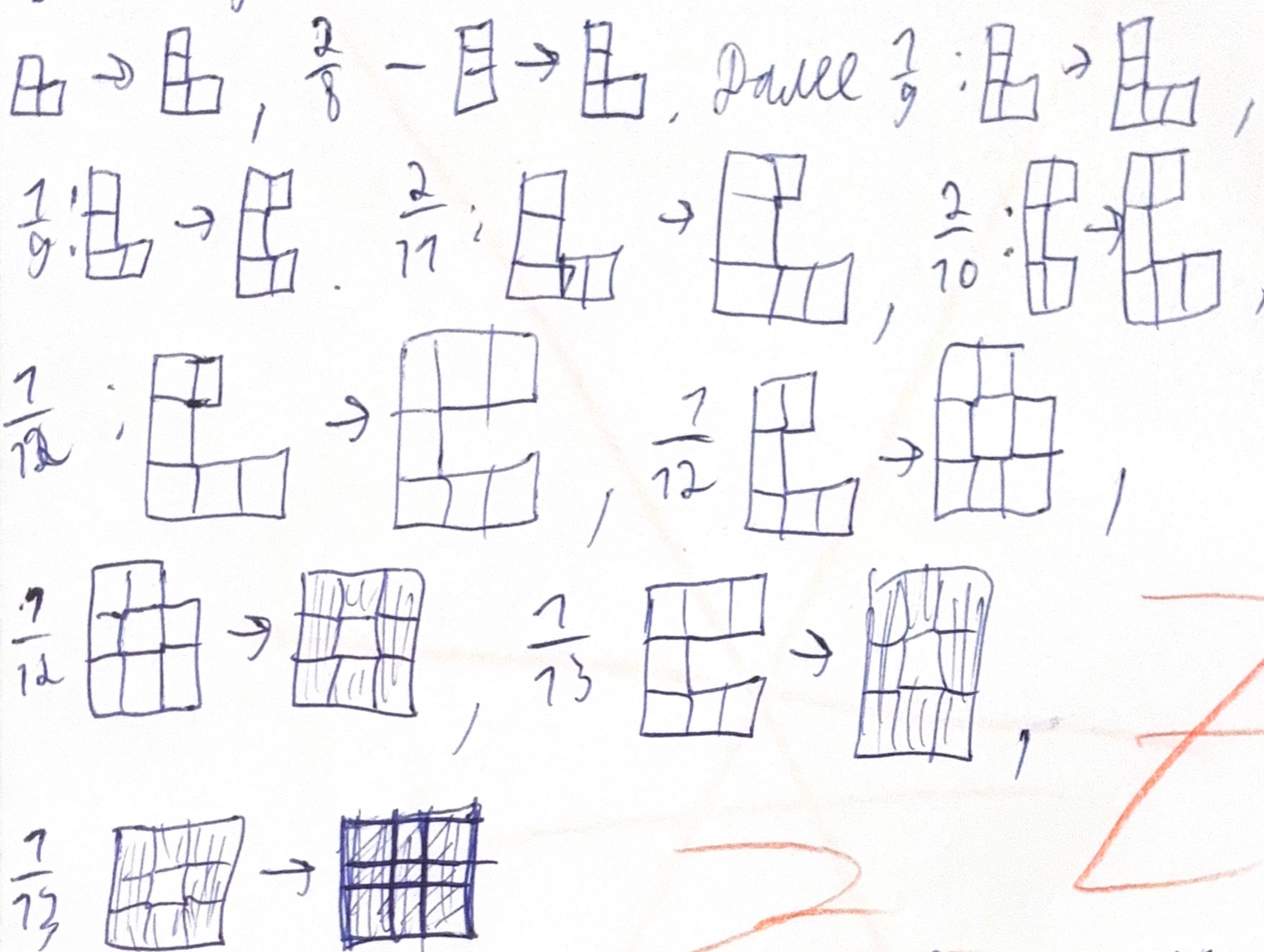
$= 45^\circ$

$\angle ABC = \angle ABO + \angle OBC = 60^\circ + 45^\circ = 105^\circ$

Ответ: 105°

Задача 8.

Сначала он красит 2 соседн кл. След. кл. с вер-тью $\frac{4}{6}$ образует уголок, $\frac{2}{6}$ — . С вер-тью $\frac{2}{7}$



Все способы посчитаны ровно 1 раз.

Всего: $\left(\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{7}+\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{8}\right)\left(\left(\frac{1}{9}\cdot\frac{2}{11}+\frac{1}{9}\cdot\frac{2}{10}\right)\left(\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{12}+\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{13}\right)\cdot\frac{1}{13}\right)$

стр. 5

№5 ЧЕРНОВИК

30сек — 50 м

18сек — 30 м 80

72сек — 120 м 200

160сек — 200 м

4 сек — 5 м 1,25 м/сек

40сек — 50 м

24сек — 30 м 80

96сек — 120 м 200

8 сек — 10 м 210

1-ый — 0-30 X, 30-80 ✓, 80-110 X, 110-160 ✓

2-ой — 0-10 ✓, 10-60 X, 60-110 ✓, 110-160 X, 160-210 X

№6

$$\frac{1}{a}+\frac{2}{a}\cdot\frac{x}{a}-\frac{3}{a}\cdot\left(\frac{x}{a}\right)^2\leq 0$$

$$\frac{1}{a}+\frac{2}{a}\cdot\frac{x}{a}\leq\frac{3}{a}\cdot\left(\frac{x}{a}\right)^2$$

$$\frac{1}{a}\left(1+\frac{2x}{a}\right)\leq\frac{1}{a}\left(\frac{3x^2}{a^2}\right)$$

$$1+\frac{2x}{a}\leq\frac{3x^2}{a^2},\ \text{если } a>0$$

иначе $\geq$

$\frac{x}{a}=b$

тогда $a<0$

$1+2b\leq 3b^2$

$1+2b=3b^2$

$-3b^2+2b+1=0$

$D=4+12=16$

$x_{1,2}=\frac{-2\pm 4}{-6}$

$x_1=1$

$x_2=-\frac{1}{3}$

$\frac{x}{a}\in\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right]\cup[1;\infty)$

$\frac{x}{a}\in\left[-\frac{1}{3};1\right]$

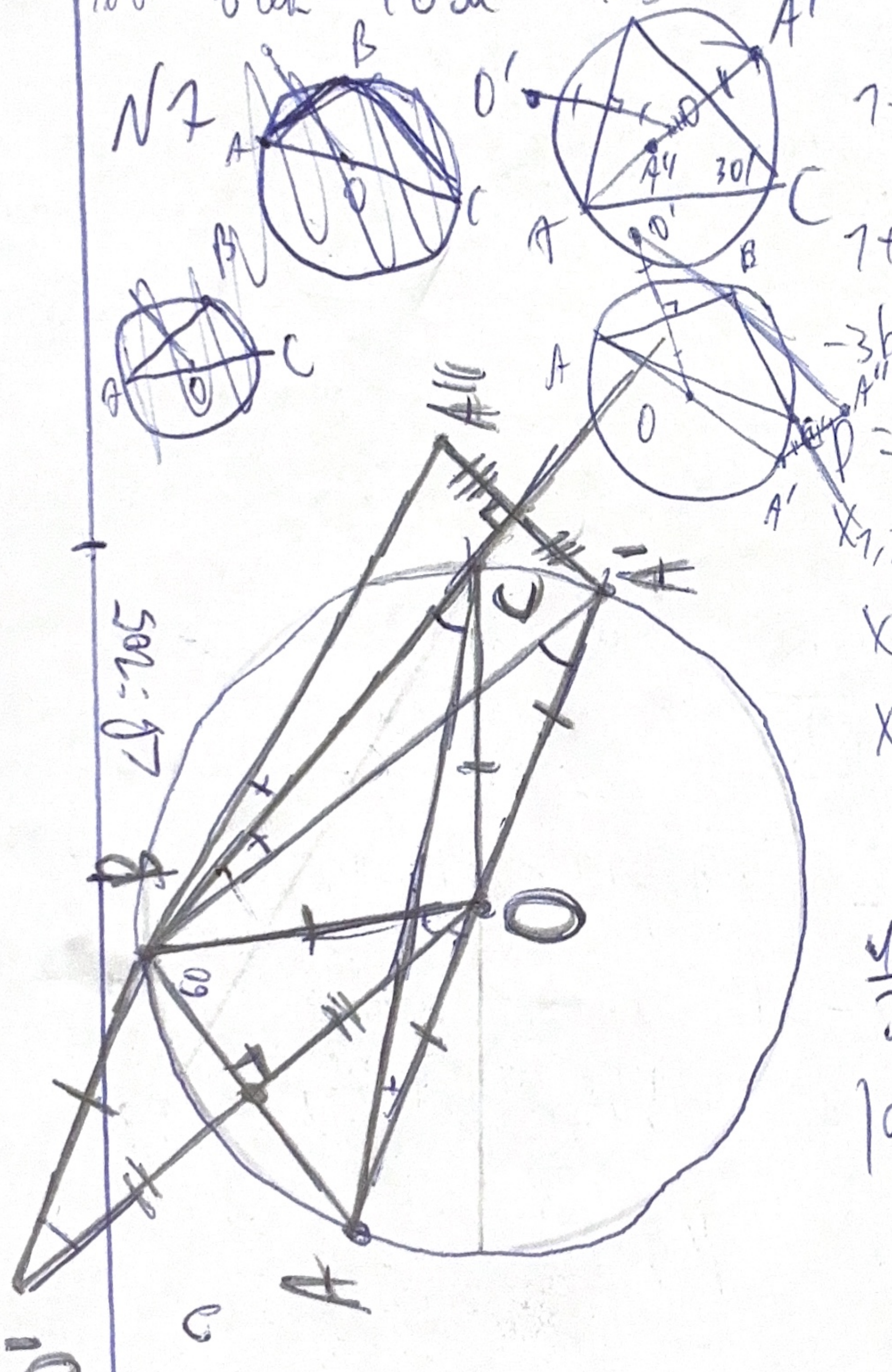
$\frac{x}{a}\in$ длины $\frac{4}{3}$

$\frac{4|a|}{3}=2026$

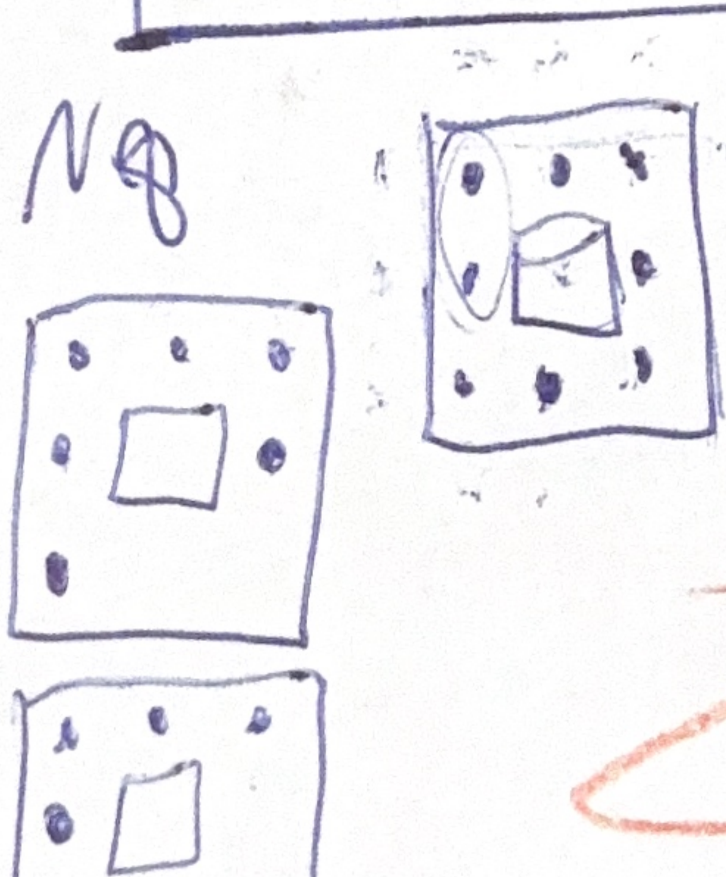
$|a|=\frac{3\cdot 2026}{4}=\frac{3\cdot 1013}{2}=\frac{3039}{2}=1519{,}5$

$a=-1519{,}5$

№7



№8



$1\cdot 1\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{2}{11}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{12}$

уголок

$\frac{1}{9}\cdot\frac{2}{10}$ $\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{13}$

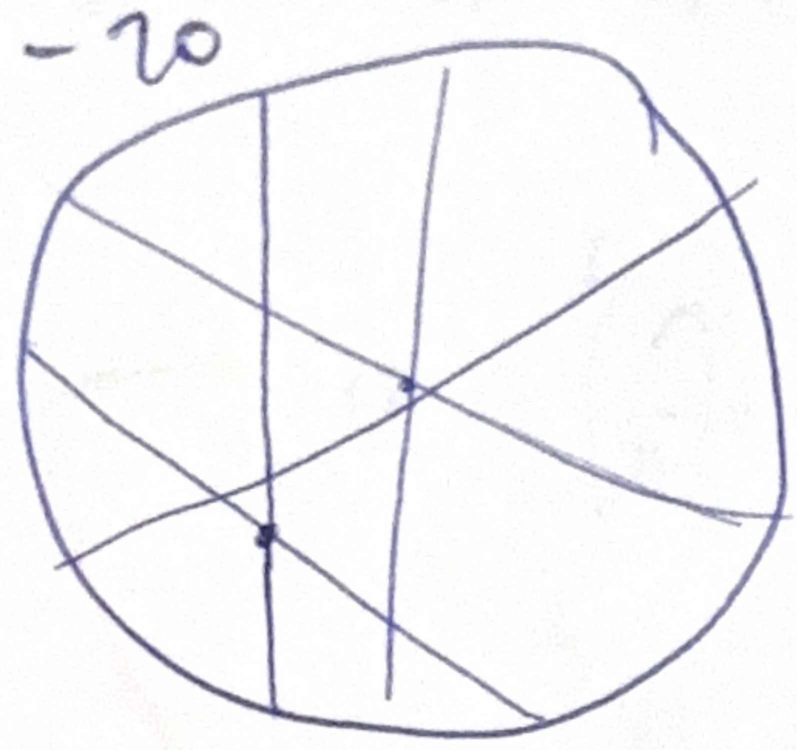
тоже

$1\cdot 1\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{8}$

тоже

ЧЕРНОВИК

№1 – 20



№2 – 2006

$1000^2 = \underbrace{1000}000$

$n^2 = \overline{n x_1 x_2 \ldots x_k} = n \cdot 10^k + \overline{x_1 x_2 \ldots x_k}$

$n = 10^k + \frac{\overline{x_1 x_2 \ldots x_k}}{n}$

$1001 \cdot 1001 = 1002001$

$1002^2 = 1004004$

$1003^2 = 1006009$

$1004^2 = 1008016$

$1005^2 = 1010025$

$1006^2 = 1012036$

$1007^2 = 1014049$

$1008^2 = 1016064$

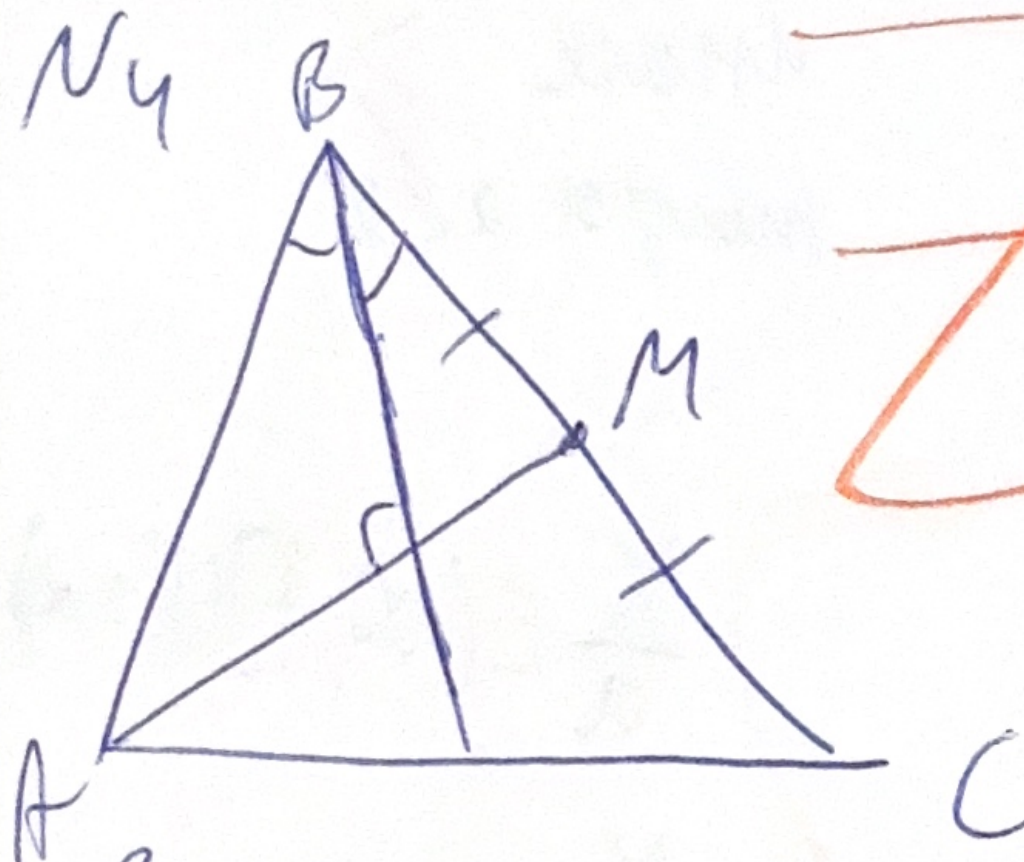
$1009^2 = 1018081$

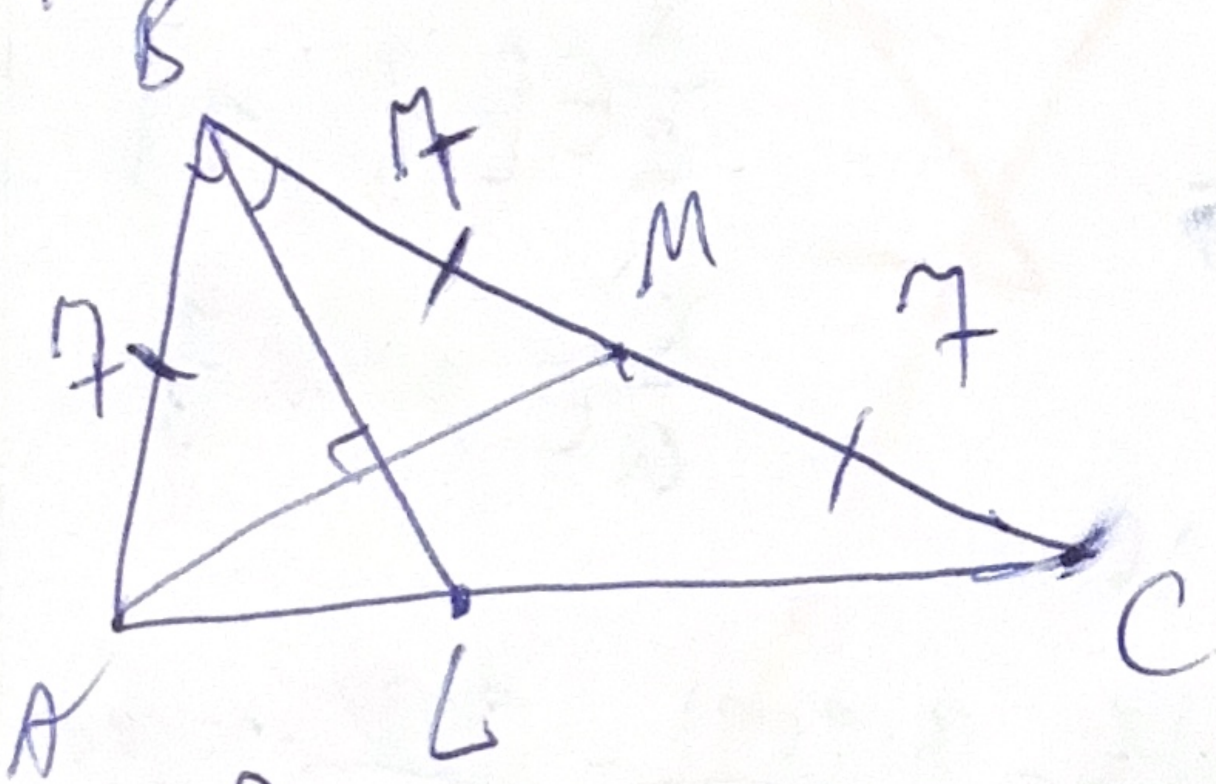
№3

$\cancel{\frac{10\cdot 10(10\cdot 10-1)}{2}\cdot 2}$

$\frac{10\cdot 10\cdot 9\cdot 9}{2}\cdot 2 = 8100$

№4



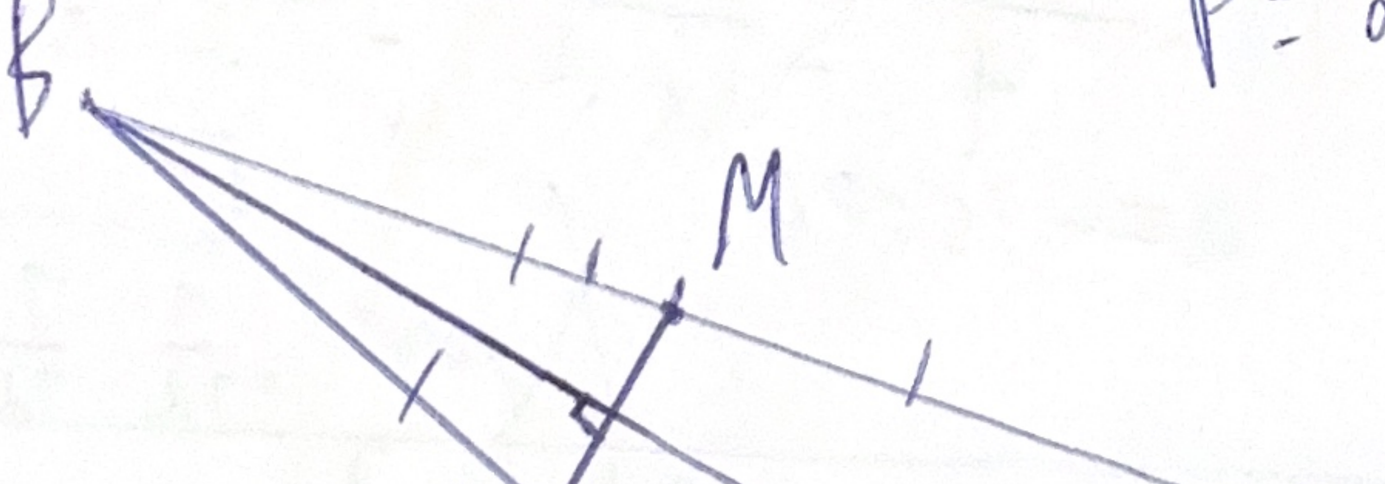


$\cancel{\frac{AB}{AL} = \frac{BC}{CL}}$

AC – 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 19, 20

AB+BC – 21

P = 29, 30, 31, 32, 33, 34, 36, 37, 38, 39, 40, 41



№5

$9999^2 = 81\underbrace{000000} + \ldots$