+1 лист Ег
+1 лист Мар-

0 548564 240000

54-85-64-24
(124.8)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11 класс 1 В-т

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Афонасенко Арсения Михайловича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«29» марта 2026 года

Подпись участника

75 (семьдесят пять) динь

54-85-64-24
(124.8)

Черновик

$\sqrt{6(1-tg^2x)}=4\sin x$

$6(1-tg^2x)=16\sin^2x$

$6-6tg^2x=16\cdot\sin^2x$

$3-3tg^2x=8\sin^2x$

$\cancel{tg^2x=1+\frac{1}{\cos^2}}$

$1+\frac{1}{\cos^2x}=\cos^2x$

$\cancel{1-\frac{1}{tg^2x}=\cos^2x}$

$\cancel{1-\cos^2x=tg^2x}$

$\frac{1}{\cos^2x}=1+tg^2x$

$1=\cancel{\cos^2x}$

abc

$\sin x=0$

$16t^2-10t-3=0$

$16\cdot3=48$

$12\cdot4$

$6\cdot8$

$24\cdot2$

$6\cdot8$

$4\cdot12$

$8t^2-2t-3=0$

$:24$

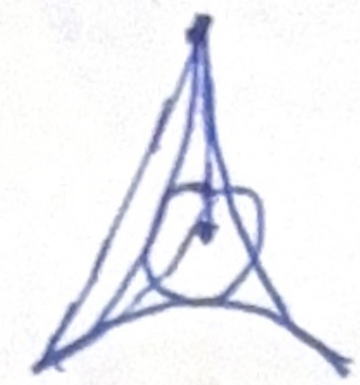
8 3

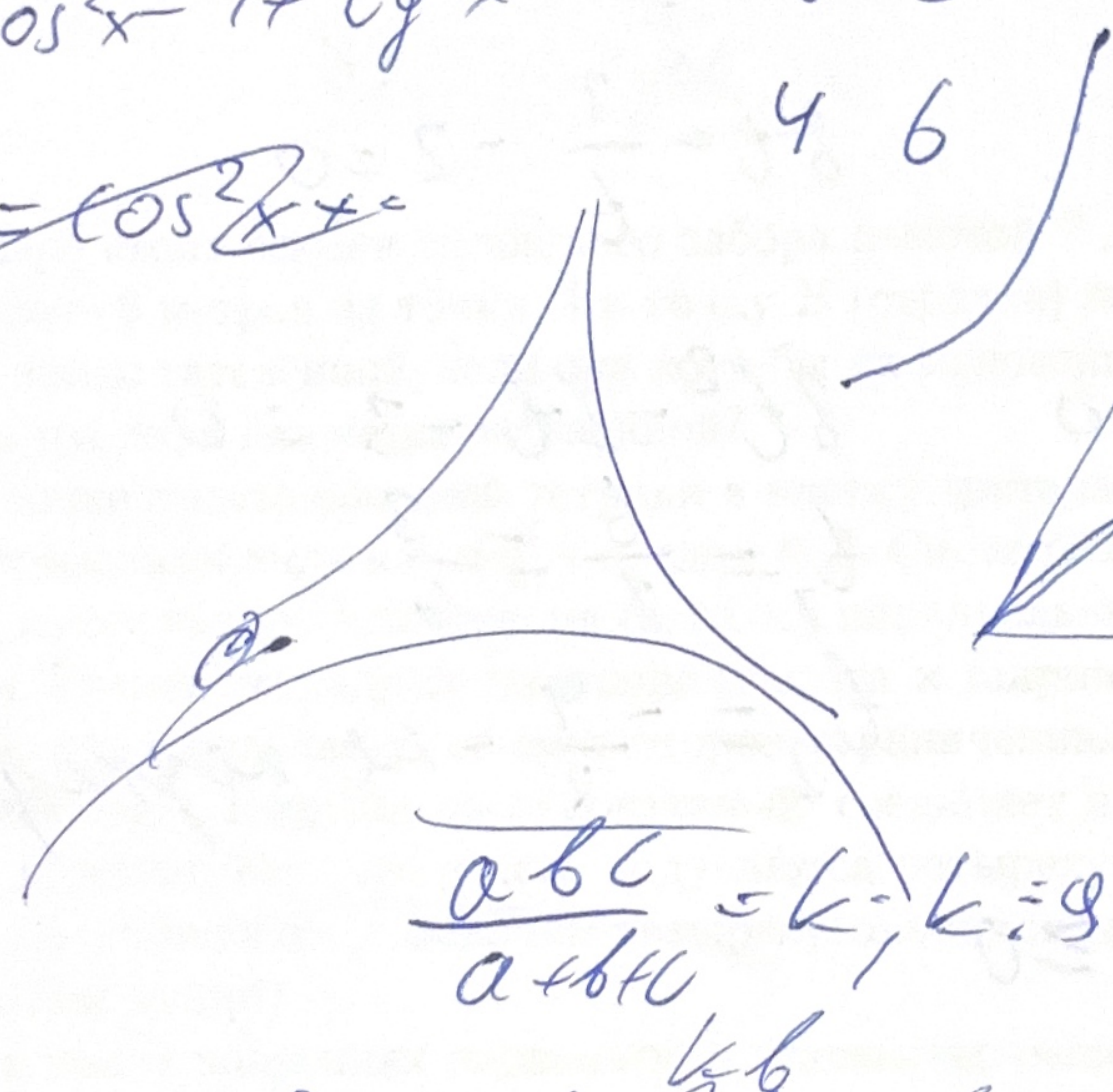
4 6

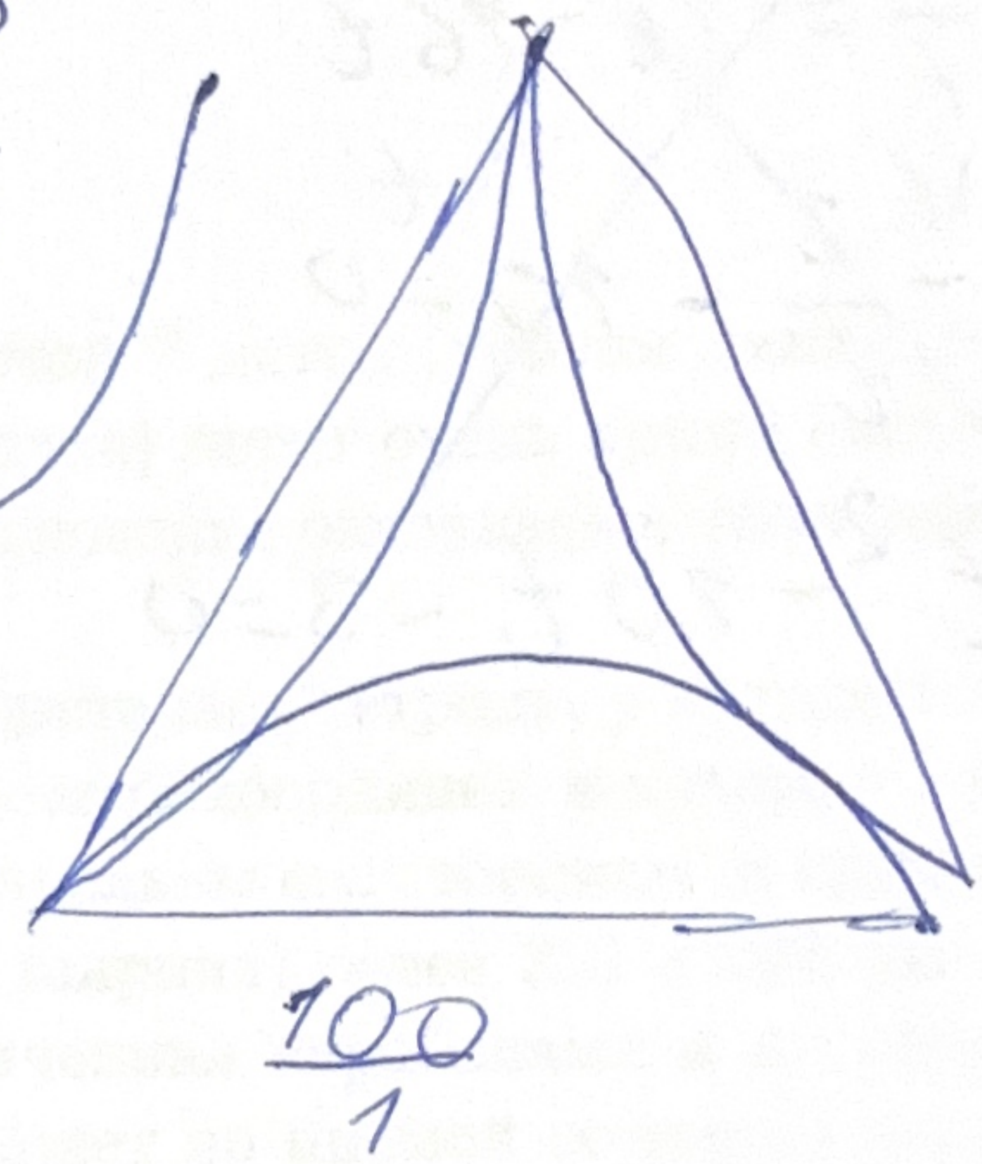
$\frac{999}{27}=$

111

16·3







$\frac{100}{1}$

$\frac{abc}{a+b+c}=k;\ k=9$

$\frac{200}{2}$

$1000a+10b+c=ak+kb+kc$

Чистовик

11

$\sqrt{6(1-tg^2x)} = 4\sin x$; $\sin x \geq 0, \cos^2 x \neq 0$

$6(1-tg^2x) = \cancel{4}\, 16\sin^2 x$

Воспользуемся ОТТ и соотношением, что

$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x \Rightarrow tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$

$6\left(1 - \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)\right) = 16\sin^2 x$

$6\left(2 - \frac{1}{\cos^2 x}\right) = 16(1-\cos^2 x)$ $|:2$

пусть $\cos^2 x = t$

$\cancel{3\left(2 - \frac{1}{t}\right) = 16(1-t)}$

$\cancel{6 - \frac{3}{t} = 16 - 16t}$ $\cancel{\quad | \cdot t}$

$\cancel{16t - \frac{3}{t} - 10 = 0}$

$\cancel{16t^2 - 10t - 3 = 0}$

$3\left(2 - \frac{1}{t}\right) = 8(1-t)$

$6 - \frac{3}{t} = 8 - 8t$

$8t - \frac{3}{t} - 2 = 0$ $\quad | \cdot t$

$8t^2 - 2t - 3 = 0$

$t_1 = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

$t_2 = -\frac{4}{8}$ – не подходит,

т.к. $t = \cos^2 x \geq 0$

Чистовик.

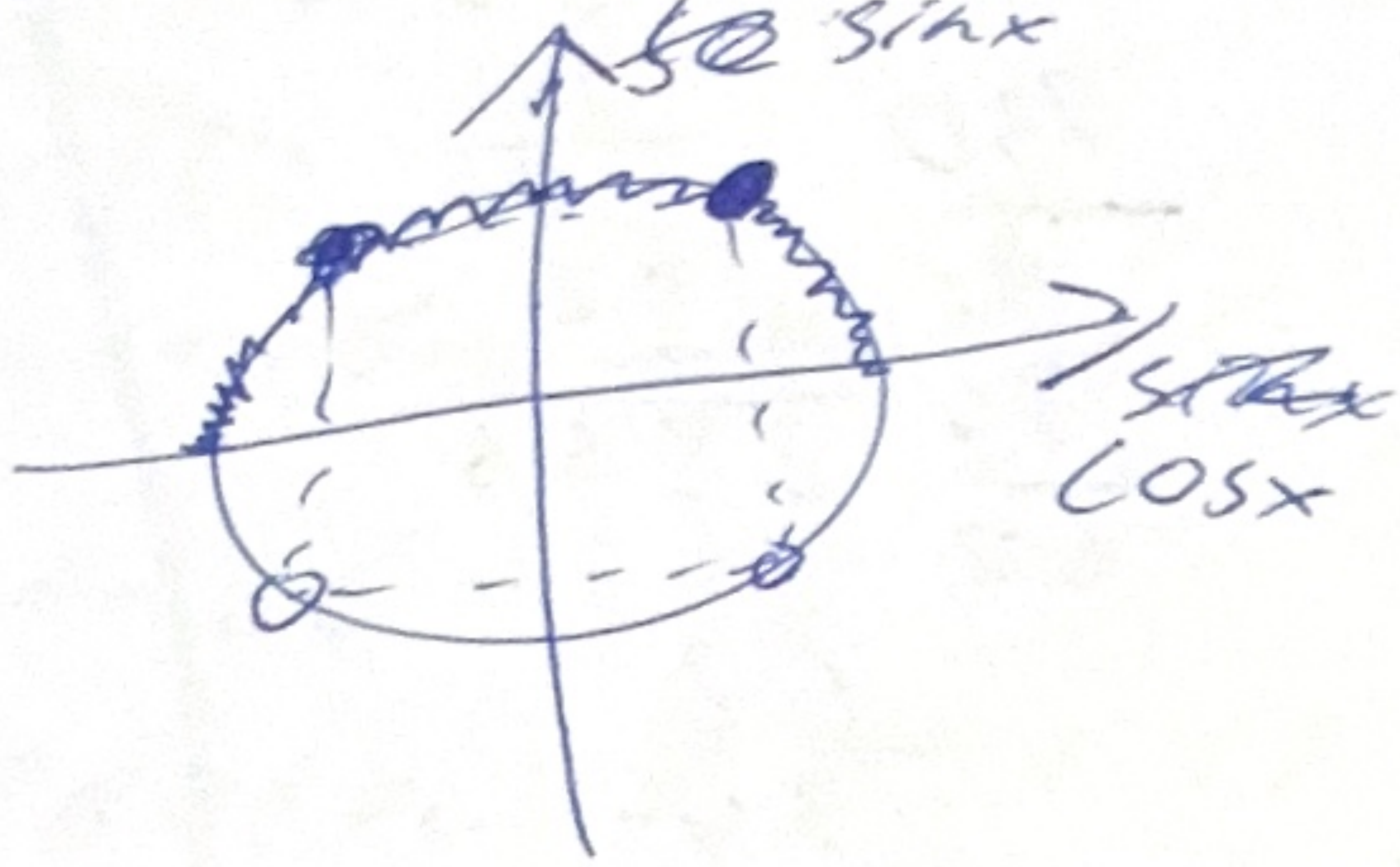
Сделаем обратную замену.

$\cos^2 x = \frac{3}{4}$

↓

$\left[\begin{array}{l}\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right.$

Но по условию $\sin x \geq 0$, поэтому отберём корни.



Нам подойдут только 2 корня:

$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k;\ k \in Z$; $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k;\ k \in Z$

Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k;\ k \in Z$

$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k;\ k \in Z$

№2

Число вида $\frac{\overline{abc}}{a+b+c}$ можно оценить.

Пусть $\frac{\overline{abc}}{a+b+c} = k$, тогда: $100a + 10b + c = ak + bk + ck \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad a(k-100) + b(k-10) + c(k-1) = 0$

Если у нас $a > 0;\ b, c \geq 0$, то при $k \geq 101$ левая часть точно положительна.

Значит, $k \leq 100$. На 100 есть пример.

$\frac{100}{1+0+0} = 100$.

Черновик. $32 \cdot 9 \cdot 12$

32×12
64
32
384

$100a+10b+c=k(a+b+c)$

$100a-ka+10b-kb+c-kc=0$

$a(100-k)+b(10-k)+$

164

384×9

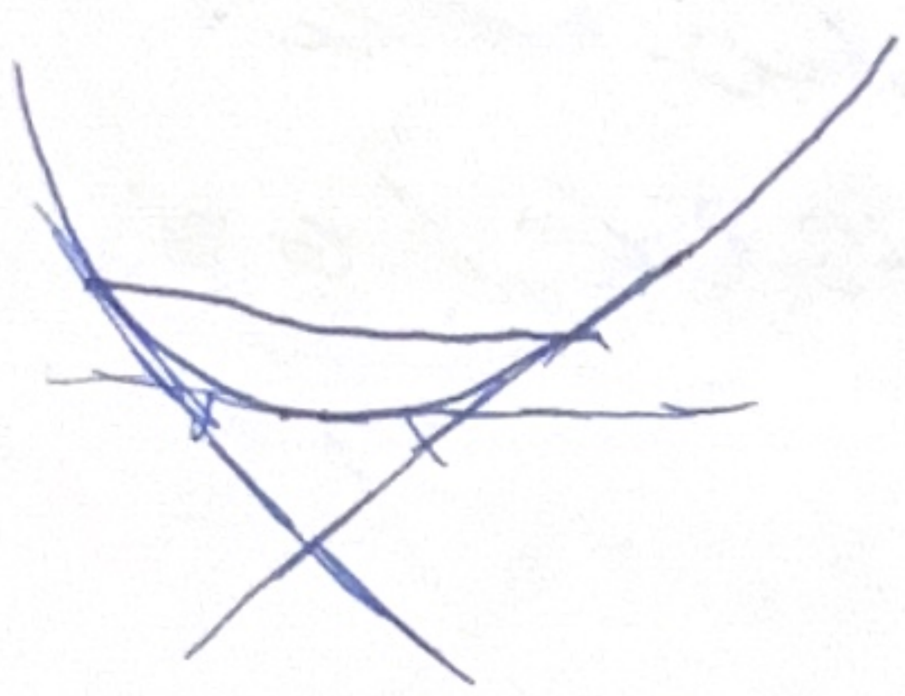
12×9

$130 - 96 = 34$
$96 - 34 = 62$

$9 \times 384 = 36$
$12 \times 27 = 2856$

$9 \times 17 = 63$
9
153

$62 - 34 = 28$



$\times 153$

$153 \times 72 = 225$

$162 : 9 = 1$
9
72

36
$62 - 34 = 28$

$82 - 34 = 48$

$164 - 34 = 130$

$1684 - 68$

$96 - 34 = 62$

$130 - 34 = 96$

~~Условие~~ Черновик.

По условию: $\frac{\overline{abc}}{a+b+c}=k$, где $k \vdots 9$

переберём все $k \leq 100$ и $\vdots 9$

1) $k=9$

$100a+10b+c=9a+9b+9c$

$91a+b-8c=0$

не будет чисел, т.к. $91a+b \geq 91$, а $8c \leq 72$

2) $k=18$

$100a+10b+c=18a+18b+18c$

$82a-8b-17c=0$

$8b+17c \leq 72+17\cdot 9=225$

$a=1$:

$82-8b-17c=0$; $c\neq 0$ 162

$c\neq 1$; $c=2$: подходит число

$\frac{162}{9}=18$ $c\neq 3$; $c\neq 4$

c только чётное

$a=2$:

$164-8b-17c=0$

$c\neq 0$; $c\neq 2$; $c\neq 4$ ~~подходит число.~~

$c\neq 6$; $c\neq 8$

3) $k=27$: $100a+10b+c=27a+27b+27c$

$73a-17b-26c=0$

Цифр цифр можно оценить от 1 до 27.

перебором. $1\cdot 27=27$; $2\cdot 27=54$; $3\cdot 27=81$; $4\cdot 27=108$; $5\cdot 27=135$

$6\cdot 27=162$; $7\cdot 27=189$; $8\cdot 27=216$; $9\cdot 27=243$. 243 подходит

$10\cdot 27=270$; $11\cdot 27=297$; $12\cdot 27=$

Черновик.

$8x^2 \cdot \log_a x - \log_x a - 2x \le 0$

$8x^2 \cdot \frac{1}{\log_x a} - \log_x a - \log_x x \cdot 2x$

$\frac{8}{8x^{-2} \cdot \log_x a} - \log_x a - \log_x x^{2x} \cdot 2 \le$

$\frac{8}{\log_x a^{x^{-2}}}$

$\frac{1}{\log_x a^{\frac{x^{-2}}{8}}} - \log_x \frac{a}{x^{2x}}$

$\log_x \frac{a}{x^{2x}} - \log_x a^{\frac{-x^2}{8}}$

$\log_x a^{\frac{2x^2}{8}}$

~~Итоговый. № 3~~ Черновик

$|x| \le 4$; $|y| \le 4$; $|z| \le 4$

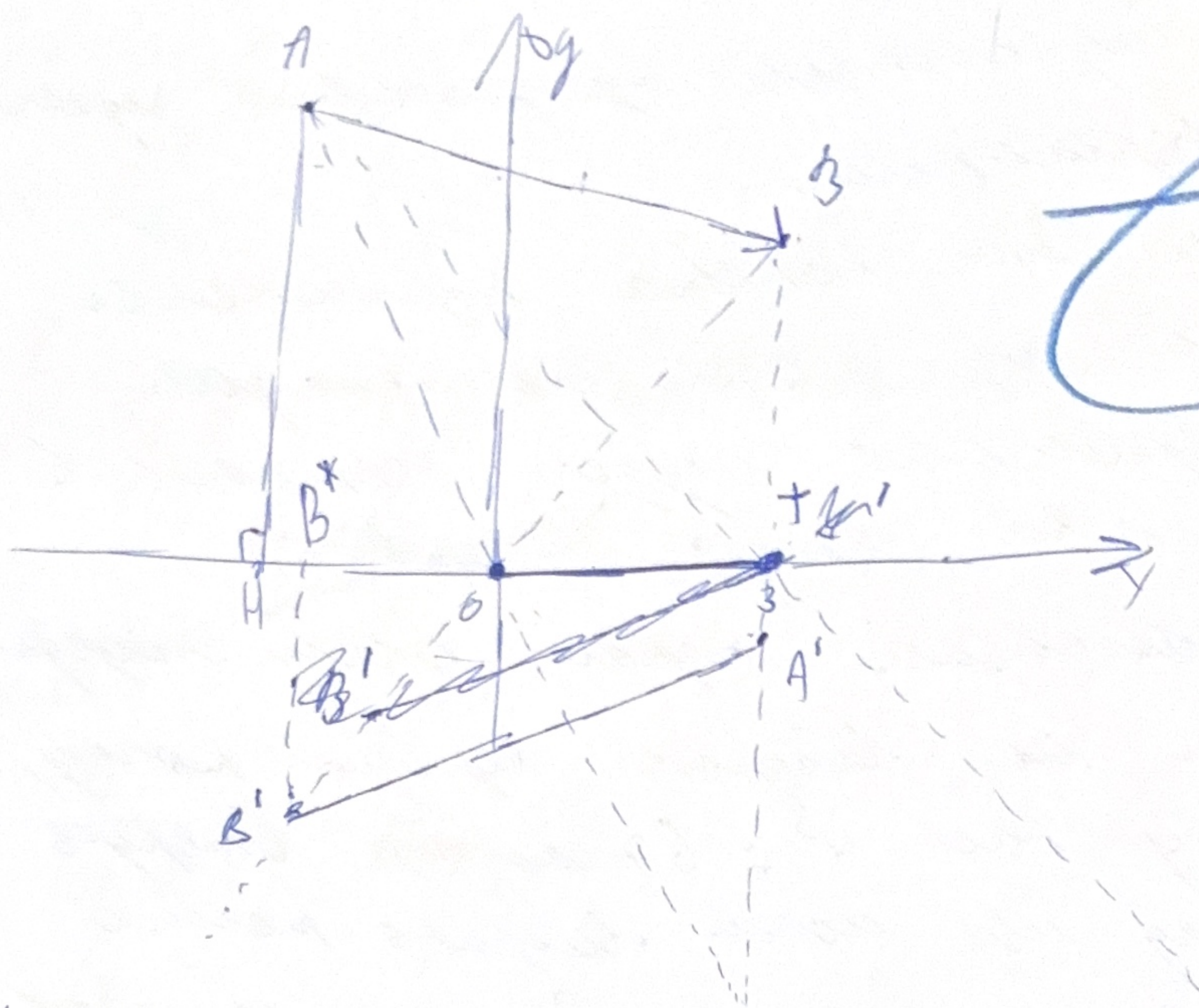
Прямоугольный треугольник задаётся 3 вершинами.

Если оба катета параллельны одной из 3 осей, то каждый треугольник будет лежать в плоскостях, ~~вида YOx, ZOx~~, параллельных паре осей координат.

Если мы выбираем первую точку, то у нас $4^3 = 64$ способа. Вторую точку мы можем выбрать только из 9 оставшихся. Значит, способов выбрать первый катет у нас $\frac{64 \cdot 9}{2} = 32 \cdot 9$. Далее необходимо выбрать последнюю точку, чтобы получился прямоугольный треугольник. Подходящих на это позиций будет: $6+6 = 12$. Значит, итоговое кол-во равно: $32 \cdot 9 \cdot 12 = 2856$

Ответ: 2856

Шиповик. № 6



Высота столба светильника 6м, а высота забора 2м, значит каждая точка прямой тени будет симметрично удалена от забора с коэффициентом $\frac{1}{3}$. Значит, нам надо найти площадь $A'B'OT$.

$TA' = \frac{1}{3} BT = \frac{5}{3}$; $B^*B' = \frac{1}{3} AH = \frac{7}{3}$.

Итого.

Можно найти искомую площадь, вычислив $S_{B^*B'A'T} - S_{B^*B'O}$

Зададим прямую BB'

$y = kx$; $B(3;5)$

$y = \frac{5}{3}x$. при этом по y $B' = \frac{7}{3}$,

значит. $\frac{7}{3} = \frac{5}{3}\cdot x$; $7 = 5x \Rightarrow x = \frac{7}{5}$

$B'(\frac{7}{5}; \frac{7}{3})$ $B^*(\frac{7}{5}; 0)$.

Значит $B^*T = \frac{7}{5} + 3 = \frac{22}{5}$

$S_{B^*B'A'T} = \frac{22}{5} \cdot \frac{\frac{5}{3}+\frac{7}{3}}{2} = \frac{22}{5} \cdot 2 = \frac{44}{5}$

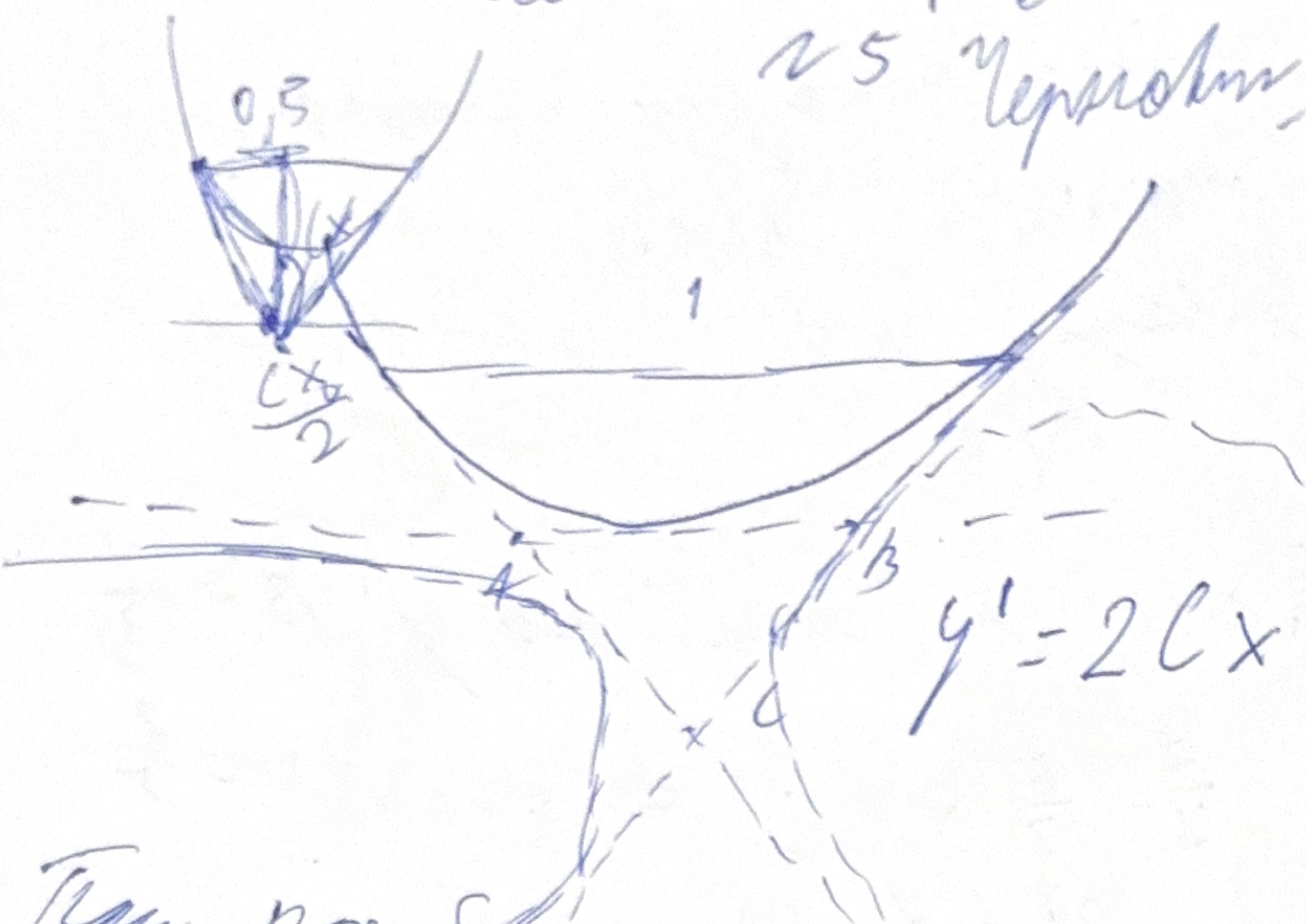
$S_{B^*B'O} = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{5} \cdot \frac{7}{3} = \frac{49}{5\cdot 6}$

$\frac{44}{5}^{\cdot 6} - \frac{49}{5\cdot 6} = \frac{240+36-49}{5\cdot 6} = \frac{276-49}{30} = \frac{227}{30}$

Ответ: $\frac{227}{30}$

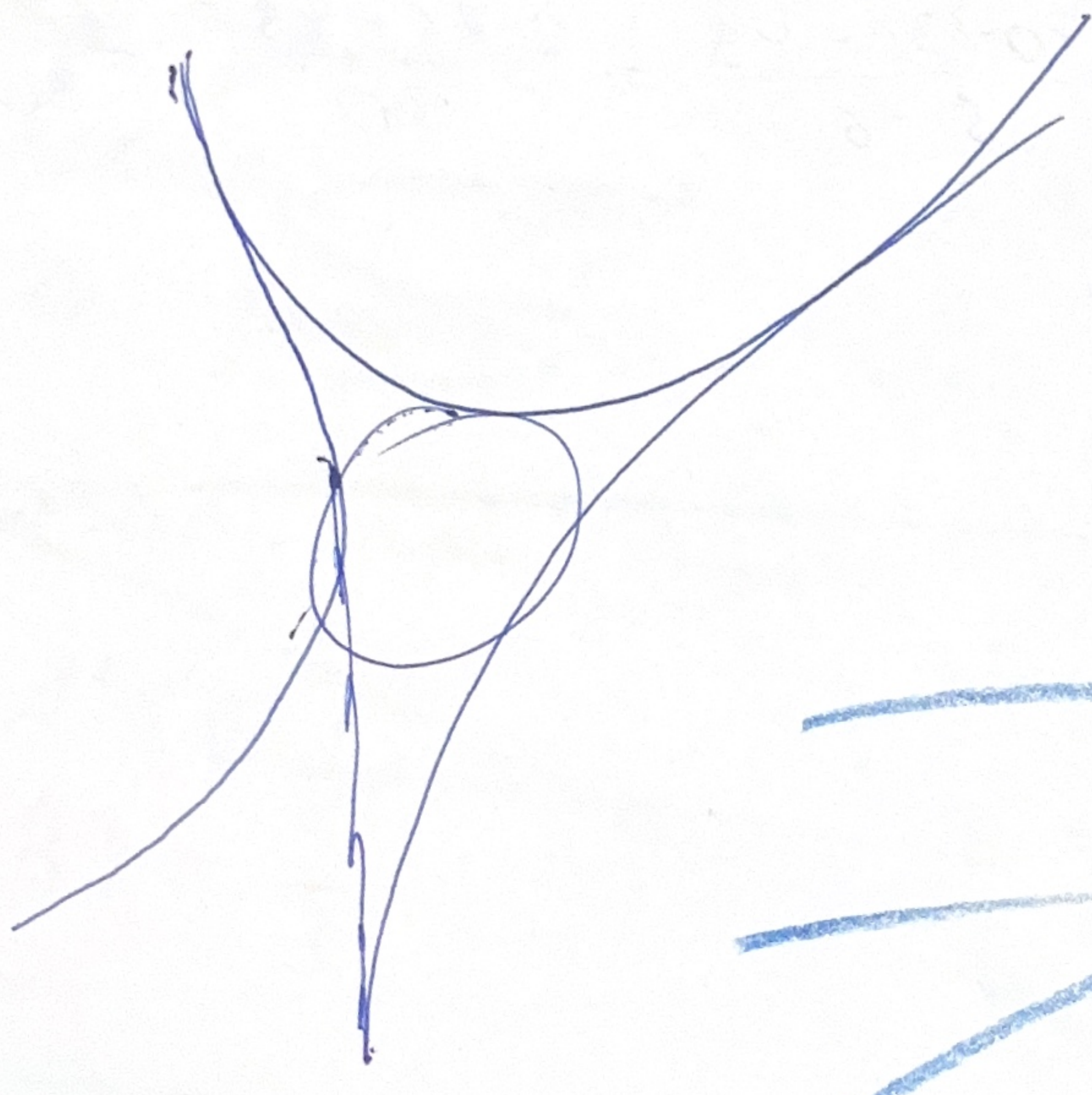
[illegible] [illegible]

№5 Черновик.



$y' = 2Cx$

При подобном условии, окружность будет вписанной для треугольника ABC, который образован прямой проходящей через вершину и касательными.



$8x^2 \cdot \log_a x - \log_x a - 2x \leq 0$

$\log_x a = t \Rightarrow \log_a x = \frac{1}{t}$

$\frac{8x^2}{t} - t - 2x \leq 0$

$\frac{8x^2 - t^2 - 2tx}{t} \leq 0$

Тантоули

$8x^2 \cdot \log_a x - \log_x a - 2x \leq 0$

$D = \log_a^2 x \log_x^2 a + 64 \cdot \log_a x$

$8x^2 \cdot \log_a x - \log_x a - 2 \leq 0$

$\cancel{8x^2}\ \cancel{2x}$ $\log_a x \cdot 8 \cdot x^2 - 2x - \log_x a \leq 0$

$8x^2 - 2x$

№5. Черновик.

$|x| \leq 4$; $|y| \leq 4$; $|z| \leq 4$. Каждая из переменных принимает 9 значений.

Способов выбрать 1 точку: 9^3.

Вторую точку можно выбрать из 24 вариантов. (чтобы катет был параллелен.

Значит, способов выбрать 1 катет:

$$\frac{9^3 \cdot 24}{2} = 12 \cdot 9^3.$$

Последнюю точку можно выбрать 16 способами.

Итоговое число: $16 \cdot 12 \cdot 9^3 = 2^4 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 3^6 =$

$= 6^6 \cdot 3$

$$\begin{array}{r} 216 \\ \times\ 216 \\ \hline 1296 \\ 216 \\ 432 \\ \hline 46656 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 46656 \\ \times\ 3 \\ \hline 139968 \end{array}$$

Ответ: 139968

№2 Чистовик

$\frac{\overline{abc}}{a+b+c} = k$; $k \vdots 9$

Если это число целое, то $\overline{abc} \vdots 9$, но тогда $a+b+c$ тоже будет делиться на 9, т.к. $a \equiv_9 S(a)$, значит, $\overline{abc}$ делится на 81. переберём все такие трёхзначные числа.

~~81~~, 162, 243, 324, 405, 486, 567, 648, 729, 810, 891, 972.

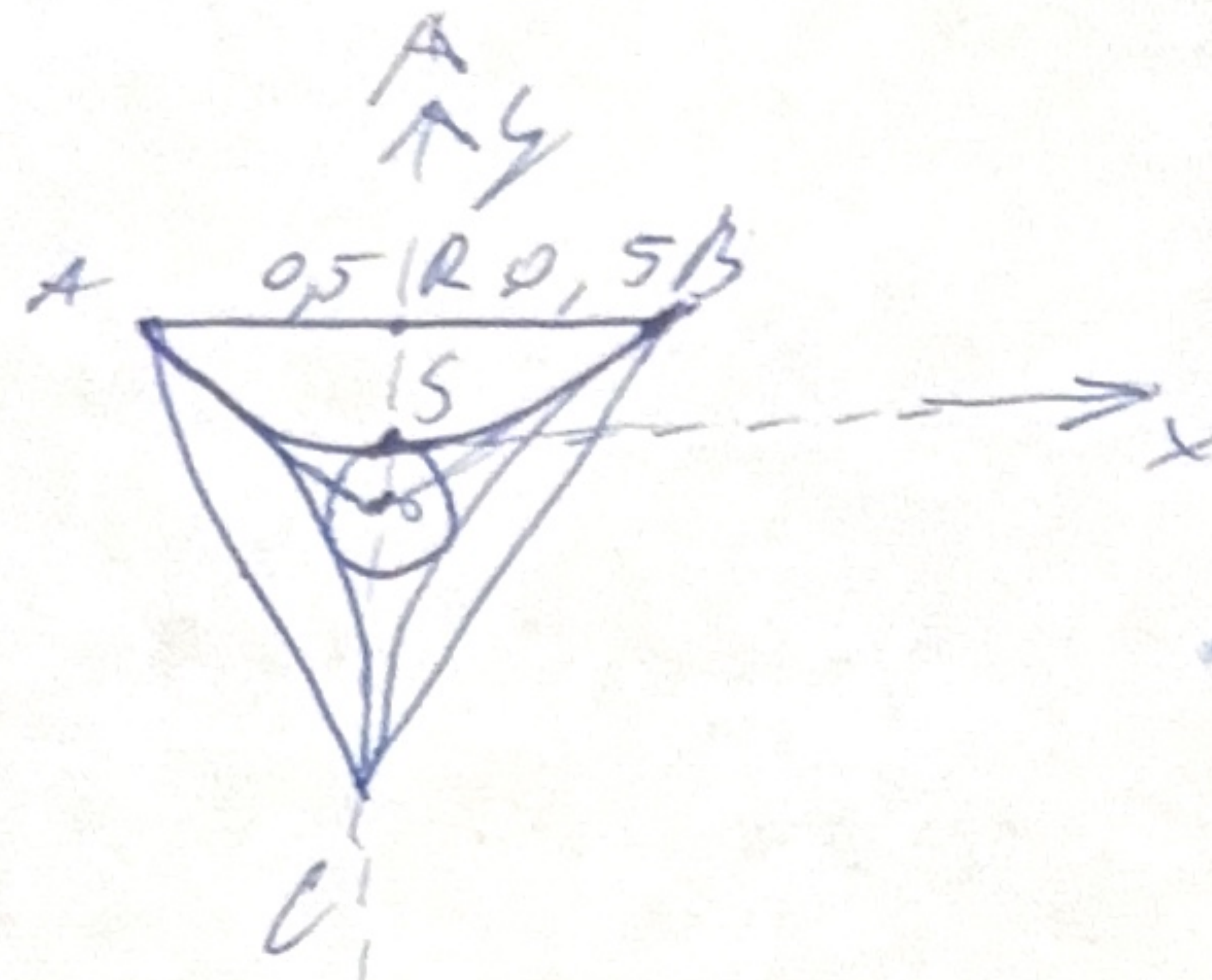
~~81+405+972=486+972=~~

162+405+891=567+891

$$\begin{array}{r} 891 \\ +\,486 \\ \hline 1377 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1377 \\ +\,243 \\ \hline 1620 \end{array}$$

Ответ: 1620.

15 Чистовик



Прямая AO является касательной к двум параболам, а так же является биссектрисой треугольника, значит $\angle BAO = 30^\circ$

OR - прямая на оси OX.

$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{RO}{AR} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow RO = \frac{AR}{\sqrt{3}} =$

$= \frac{1}{2\sqrt{3}}$. ~~Как~~

Наша парабола имеет вершину $(0;0)$ и значение производной $\frac{1}{\sqrt{3}}$ при $x_0 = \frac{1}{2}$ ($\frac{1}{\sqrt{3}}$. т.к. равные углы

$y = Cx^2 \Rightarrow y' = 2Cx$

$\frac{1}{\sqrt{3}} = 2C \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow C = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Чистовик.

Парабола имеет вид $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x^2$. и прямая $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x+b$ касается её. Значит,

$\frac{1}{\sqrt{3}}x^2=\frac{1}{\sqrt{3}}x+b \quad |\sqrt{3}$

$x^2-x-\sqrt{3}b=0$

$D=1+4\sqrt{3}b=0 \Rightarrow b=-\frac{1}{4\sqrt{3}}$.

Значит, при $x=0$: $y=-\frac{1}{4\sqrt{3}}$.

~~Пусть S-точка отсчёта = r~~

~~Тогда, SO = R~~

точка O имеет координаты: $(0;-\frac{1}{4\sqrt{3}})$, значит радиус окружности равен $\frac{1}{4\sqrt{3}}$ или $\frac{\sqrt{3}}{12}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{12}$.

Чистовик.

№4.

Найти кол-во пересечений функций $y = \sin(13\pi x)$; $y = \sin(15\pi x)$; $y = \sin(17\pi x)$ на отрезке от 0 до 1.

1) $\sin(13\pi x) = \sin(15\pi x)$.

$\Downarrow$

$$\left[\begin{array}{l} 13\pi x = 15\pi x + 2\pi n\ ;\ n \in Z \\ 13\pi x = \cancel{15}\ \pi - 15\pi x + 2\pi k\ ;\ k \in Z \end{array}\right.$$

$13x = 15x + 2n$.

$-2x = 2n \quad |:-2$

$x = -n \Rightarrow x = 0; -1; 1$

$13x = 1 - 15x + 2k$

$\cancel{28k}\ 28x = 1 + 2k$

$x = \frac{1+2k}{28}$, значит $k \in \{-14, -, ..., 13\}$. всего 28 значений. уникальных с з новыми $x = 0; -1; 1$

2) $\sin(15\pi x) = \sin(17\pi x)$.

первый случай можно не рассматривать, тогда будут $x = 0; -1; 1$. Рассмотрим сразу 2 случай.

$15\pi x = \pi - 17\pi x + 2\pi k$; $k \in Z \ |:\pi$

$15x = 1 - 17x + 2k$

$32x = 1 + 2k \Rightarrow x = \frac{1+2k}{32}$, значит

$k \in \{-16, -15 ... 15\}$. всего $3\cancel{0}^{2}$ значения.

3) $\sin(13\pi x) = \cancel{\sin(17\pi x)}$

$\cancel{13\pi x = 17}$

См. след. лист.

54-85-64-24
(124.8)

Черновик №4

3) $\sin(13\pi x) = \sin(17\pi x)$

Рассмотрим только второй случай, т.к. в первом опять будут $-1; 0; 1$

$13\pi x = \pi - 17\pi x + 2\pi n;\ n \in \mathbb{Z}\ |:\pi$

$13x = 1 - 17x + 2n$

$30x = 1 + 2n$

$x = \frac{1+2n}{30}$, значит $n \in \{-15, -14, \dots, 14\}$ всего 30 значений.

Итого: ~~32~~ $30+28+32$ уникальных пересечения (где только 2 графика пересекутся) и 3 точки, где пересекутся все 3

№8 Чиновн.

$8x^2 \cdot \log_a x - \log_x a - 2x \leq 0$

пусть $\log_a x = t \Rightarrow \log_x a = \frac{1}{t}$

$8x^2 t - \frac{1}{t} - 2x \geq 0 \quad | \cdot t \neq 0$

*

$a > 0;\ a \neq 1$

$x > 0;\ x \neq 1$

$\frac{8x^2t^2 - 1 - 2xt}{t} \geq 0$

$xt = b$

$\frac{8b^2 - 2b - 1}{t} \geq 0$

$\frac{(4b-1)(2b+1)}{t} \geq 0$

полуинтервал будет задавать условие на знаменатель, а числитель будет задавать ноль.

$4b = 1$

$b = \frac{1}{4} \qquad x \cdot t = \frac{1}{4}$

$x \cdot \log_a x = \frac{1}{4}$