0 761626 870001

76-16-26-87
(124.44)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 6

шифр

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Бакуменко Богдана Юрьевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«29» марта 2026 года

Подпись участника

80 (Восемьдесят) финиш

76-16-26-87 (124.44)

Задача 1. $\sqrt{6(1-ctg^2x)}=4\cos x$ ОДЗ: $6(1-ctg^2x)\geq 0$
$ctg^2x \leq 1$
$\cos^2x \leq \sin^2 x$.

Это ур-е равносильно (учитывая ОДЗ):

$$\begin{cases} 4\cos x \geq 0; (1) \\ 6(1-ctg^2x)=16\cos^2x \; (2) \end{cases}$$

(2) $6\left(1-\frac{\cos^2x}{\sin^2x}\right)=16\cos^2x$

$6(2\sin^2x-1)=16(1-\sin^2x)\sin^2x$.

Пусть $\sin^2x=t \Rightarrow$

$6(2t-1)=16(1-t)t$

$16t^2-4t-6=0$

$D=4^2+4\cdot 6\cdot 16=400$

$t=\frac{4\pm 20}{32} \Rightarrow t_1=-\frac{1}{2}$ — нет, т.к $\underset{t}{\sin^2x}\geq 0$

$t_2=\frac{24}{32}=\frac{3}{4}$.

$\Rightarrow \sin x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x=\left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in\mathbb{Z} \\ \frac{2\pi}{3}+2\pi k, k\in\mathbb{Z} \\ \frac{5\pi}{3}+2\pi k, k\in\mathbb{Z} \\ \frac{8\pi}{3}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}. \end{array}\right.$

Учитывая (1): $x=\left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in\mathbb{Z} \\ \frac{5\pi}{3}+2\pi k, k\in\mathbb{Z} \end{array}\right.$

ОДЗ выполняется ! демонстр.

Ответ: $x=2\pi k+\frac{\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}$ или $x=2\pi k+\frac{5\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}$.

Задача 2 Пусть $S(x)$ — сумма цифр числа x.

Если $\frac{n}{S(n)} \vdots 9$, то $n \vdots 9 \Rightarrow$ по признаку делимости $S(n)\vdots 9$. Тогда $n \vdots 9\cdot 9=81$. Проверим все трехзначные числа, делящиеся на 81:

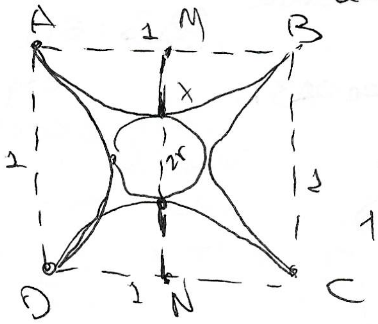
162. $\frac{162}{9}=18 \vdots 9$ ✓
243. $\frac{243}{9}=27 \vdots 9$ ✓
324 $\frac{324}{9}=36 \vdots 9$ ✓
405 $\frac{405}{9}=45 \vdots 9$ ✓
486 $\frac{486}{18}=\frac{243}{9}=27 \vdots 9$ ✓
567 $\frac{567}{18}\notin\mathbb{Z}$
648 $\frac{648}{18}=\frac{324}{9}=36 \vdots 9$ ✓
729 $\frac{729}{18}\notin\mathbb{Z}$
810 $\frac{810}{9}=90 \vdots 9$ ✓
891 $\frac{891}{18}\notin\mathbb{Z}$
972 $\frac{972}{18}=\frac{486}{9}=54 \vdots 9$ ✓

$\Rightarrow A=\{162, 243, 324, 405, 486, 648, 810, 972\}$.

$a_1+a_6+a_8=162+648+972=$
$=1782$

Ответ: $\{162, 243, 324, 405, 486, 648, 810, 972\}$; max. 1782

Задача 5



Пусть M-середина AB
N-середина CD
Тогда ввиду симметрии
$1 = MN = 2r + 2 \cdot MX$, где
X-вершина параболы, проходящей из A и B.

В системе координат с (0,0) в X и XM-ось y, получим, что $A(-\frac{1}{2}, \frac{c}{4})$, $B(\frac{1}{2}, \frac{c}{4})$
$\Rightarrow MX = \frac{c}{4}$.

$\Rightarrow 1 = 2r + 2MX$

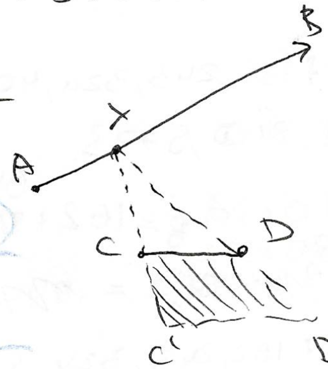
$r = \frac{1-2MX}{2} = \frac{1-\frac{c}{2}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{c}{4} = \frac{2-c}{4}$.

Ответ: $\frac{2-c}{4}$.

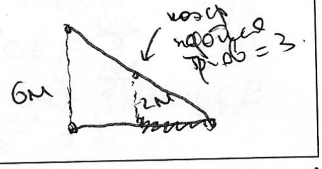
Задача 3 Заметим, что F - это куб $6 \times 6 \times 6$.
Выбрать пл-ть, в которой лежит тр-к - 3 сп. (катеты $\parallel$ осям гарантирует, что тр-к $\parallel$ одной из осей)
Выбрать одну из 7 плоскостей по этому направлению - 7 сп. В этой плоскости выбрать вершину с прямым углом 49 сп. В каждом из них надо 6 сп выбрать вершину по одной оси и 6 сп по другой. Все ~~способ~~ полученные тр-ки различны и покр. все случаи.
$\Rightarrow$ всего ~~способов~~ тр-ов $3 \cdot 7 \cdot 49 \cdot 6 \cdot 6 = 37044$.

Ответ: 37044

Задача 6



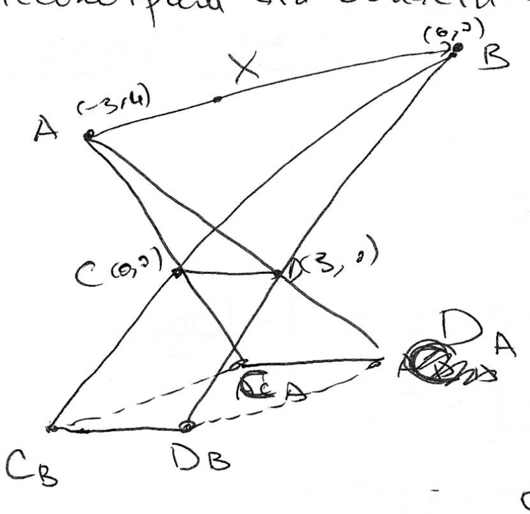
Если светлячок находится в т. X, то затемнённой областью для X является трапеция с основаниями CD и C'D', где C'D' получена гомотетией в X CD с коэф $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ (т.к светлячок на высоте 6м, а забор 2м:



76-16-26-87 (124.44)

Чистовик

Рассмотрим эти области для A и B, получим точки C_A, C_B, D_A, D_B.



Возьмём ∀ точку $X \in$ отр AB. Из св-в гомотетии в C с коэф $(-\frac{1}{2})$ получаем, что $C_X \in$ отр C_AC_B, т.к. $X \in$ отр AB, причем $\frac{C_AX}{XC_B} = \frac{AX}{XB}$. Аналогично, $D_X \in$ отр D_AD_B и $\frac{D_AX}{XD_B} = \frac{AX}{XB}$

$\Rightarrow$ затемненная обл для X нах. в пятиугольнике $CDD_AD_BC_B$, причем ∀ точка пятиугольника попадает в чьё-то затемнение, т.к. при движении X ~~от~~ A до B C_x и D_x равномерно двигутся по C_AC_B и D_AD_B соотв, тем самым покрывая весь пятиугольник.

$\Rightarrow$ Осталось посчитать $S_{CDD_AD_BC_B}$.

Пусть A' - проекция A на прямую CD, B' - проекция B на прямую CD.

- $S_{ABD} = S_{ABB'A'} - S_{ADA'} - S_{BDB'} = \frac{(AA'+BB')}{2} \cdot AB' - \frac{1}{2} \cdot AA' \cdot A'D - \frac{1}{2} BB' \cdot B'D = \frac{(4+7)}{2} \cdot 9 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 - \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 3 = \frac{99}{2} - 12 - \frac{21}{2} = \frac{78}{2} - 12 = 39 - 12 = 27.$

- ~~$S_{DD_AD_B}$~~ $S_{DD_AD_B} = (\frac{1}{2})^2 \cdot S_{ABD} = \frac{27}{4}$ (из подобия этих тр-ов по построению D_A и D_B)

- $S_{CBD} = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot BB' = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 7 = \frac{21}{2}$.

- $S_{CDD_BC_B} = S_{BC_BD_B} - S_{BCD} = (\frac{3}{2})^2 S_{BCD} - S_{BCD} = \frac{5}{4} S_{BCD} = \frac{5}{4} \cdot \frac{21}{2} = \frac{105}{8}$. (из подобия этих тр-ов с коэф $\frac{3}{2}$ по построению)

$\Rightarrow S_{CDD_AD_BC_B} = S_{DD_AD_B} + S_{CDD_BC_B} = \cancel{27}\ \frac{27}{4} + \frac{105}{8} = \frac{159}{8}$ Ответ: $\frac{159}{8}$.

исходник

Задача 8 $3x^2\log_a x - \log_x a - 2x \le 0$

$\boxed{\begin{array}{l} x>0 \\ x\neq 1 \end{array}}$ $\boxed{\begin{array}{l} a>0 \\ a\neq 1 \end{array}}$

1сл $a \in (0,1)$.

1.1сл $x\in(0,1) \Rightarrow \log_a x > 0$.

$3x^2\log_a x - \frac{1}{\log_a x} - 2x \le 0 \quad | \cdot \log_a x$

$3x^2\log_a^2 x - 1 - 2x\log_a x \le 0$

$(x\log_a x - 1)(3x\log_a x + 1) \le 0$

$x\log_a x \in [-\frac{1}{3}, 1]$. $x\log_a x \in (0, 1]$ (т.к. $x>0$, $\log_a x>0$)

~~$x\log_a x$ прин $x\in(0,1)$ прин знач~~

$f(x) = x\log_a x$

$f'(x) = \log_a x + x \cdot \frac{1}{x\ln a} = \log_a x + \frac{1}{\ln a}$

$\Rightarrow$ корень $f'(x) = \frac{1}{e}$. При $x > \frac{1}{e}$ $\searrow$

При $x < \frac{1}{e}$ $\nearrow$.

$\frac{1}{e}$ – точка max.

$\Rightarrow$ $f(x) =$ $x\log_a x$ точно прин знач $(0, \frac{1}{e}\log_a \frac{1}{e})$ ~~при $x\in(0,1)$~~,

~~т.к. $x\log_a x \to 0$ при $x\to 1$. ($x\to 1$, $\log_a x \to 0$)~~

~~$x\log_a x \to 0$ при $x \to 0$~~

~~т.к. $x\log_a x \to 0$ при $x\to 1$ ($x\to 1$, $\log_a x\to 0$)~~

~~Учитывая интервал $(0, \frac{1}{e})$: $x\log_a x$ прин знач $(-b, \frac{1}{e}\log_a\frac{1}{e})$, где $b\ge 0$.~~

~~1.2сл~~

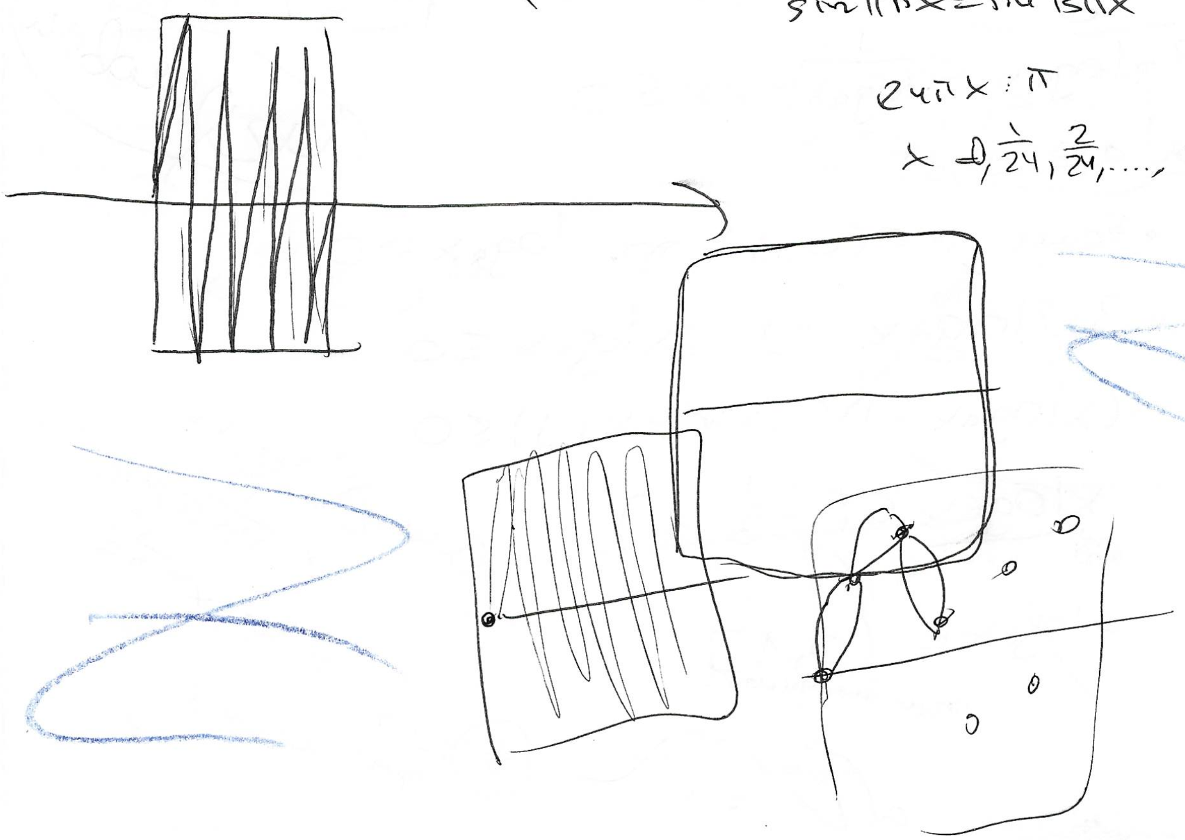
т.к. $x\log_a x \to 0$ при $x\to 1$ ($x\to 1$, $\log_a x \to 0$)

черновик

$\sin 11\pi x = \sin 13\pi x$

$24\pi x = \pi$

$x = 0, \frac{1}{24}, \frac{2}{24}, \ldots, \frac{24}{24}.$



$3x^2\log_a x - \log_x a - 2x \le 0$ $\begin{cases} x>0 \\ x\ne 1\end{cases}$ $\begin{cases} a>0 \\ a\ne 1\end{cases}$

Черновик

$3x^2\log_a x - \frac{1}{\log_a x} - 2x \le 0$

1сл $a \in (0,1)$

• Если $x\in(0,1)$, то $\log_a x > 0$.

$3x^2\log_a^2 x - 1 - 2x\log_a x \le 0$

$(x\log_a x - 1)(3x\log_a x + 1) \le 0$

$\underbrace{x}_{(0,1)}\underbrace{\log_a x}_{\text{пол}} \in [-\frac{1}{3}, 1]$.

$(x\log_a x)' = \log_a x + x\cdot\frac{1}{x\ln a} = \log_a x + \frac{1}{\ln a}$

$x\log_a x \in (0,1]$

точно получится?!

$a^{-\frac{1}{\ln a}} = e^{-1}$ $\frac{1}{e}$ корень пр-ой

• Если $x\in(1,+\infty)$, то $\log_a x < 0$

$x\log_a x \in (-\infty, -\frac{1}{3}] \cup [1,+\infty)$

точно нет

$x\log_a x \in (-\infty, -\frac{1}{3}]$

$x\log_a x \to 0$ при $x\to 0$?

$\log_a x < \frac{1}{\sqrt{x}}$?

$\log_a x > 0$ $x < a^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$

$x^{\sqrt{x}} \overset{?}{<} a$

2сл $a\in(1,+\infty)$

• Если $x\in(1,+\infty)$, то

$x\log_a x \in [-\frac{1}{3}, 1]$

$x\log_a x \in (0,1]$ - получилось

• Если $x\in(0,1)$ $\log_a x < 0$ $\log_a(\frac{1}{e})$

$x\log_a x \in (-\infty, -\frac{1}{3}]$

$\frac{1}{e}\cdot\log_a\frac{1}{e} = -\frac{1}{3}$

$3x^2\log_a x - \log_x a - 2x \le 0$

Черновик

$x > 0$, $x \ne 1$

$a > 0$, $a \ne 1$

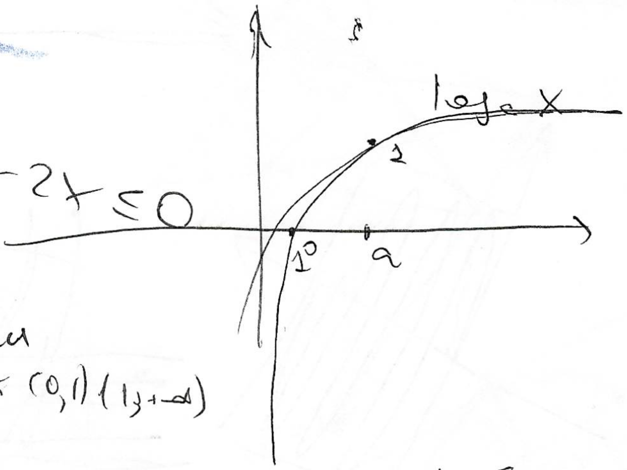
$x^{3x^2} \le a^{2x} \cdot a^{\log_a x}$

$\log_x a = \frac{1}{\log_a x}$

$a^c = x$

$x^{\frac{1}{c}} = a$

$3x^2\log_a x - \frac{1}{\log_a x} - 2x \le 0$



x и a не разных един $(0,1)$ $(1,+\infty)$

1сл ~~a~~

$3\cdot x^2 \cdot \log_a^2 x - 1 - 2x\log_a x$ на $(0,1)$

$(x\log_a x - 1)(3x\log_a x + 1) \le 0$ на $(1,+\infty)$

$x\log_a x \in [-\frac{1}{3}, 1]$ $\quad 0 \quad a \quad 1$

$\in [0, 1]$ $\quad 1 \quad b \quad +\infty)$

$\Rightarrow$ или 0, или 1

$x\log_a x \in (-\infty, -\frac{1}{3}] \cup \cancel{[1, +\infty)}$

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

8) $3x^2\log_a x - \log_x a - 2x \le 0$

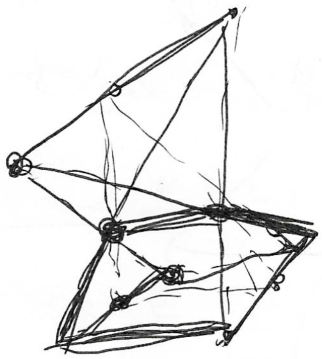
Черновик

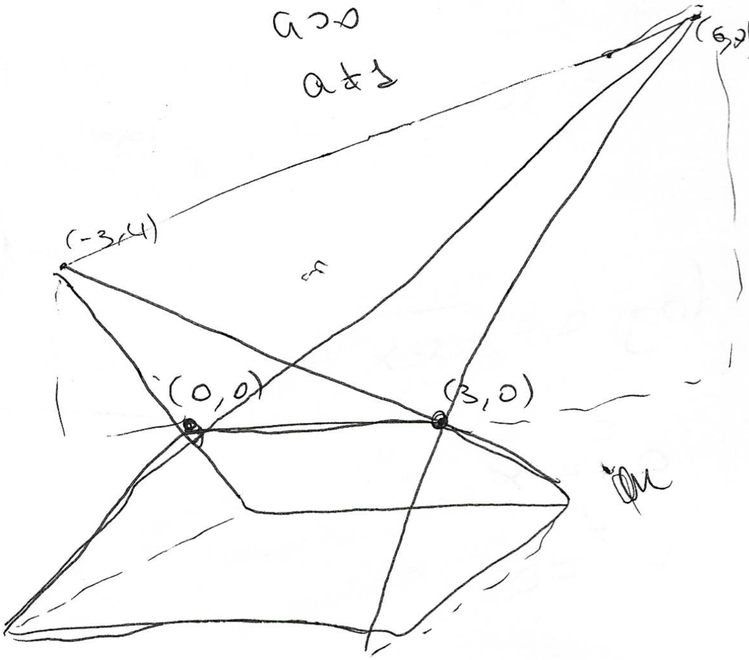
$x > 0$

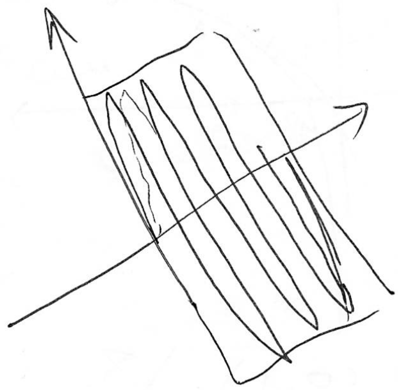
$x \ne 1$

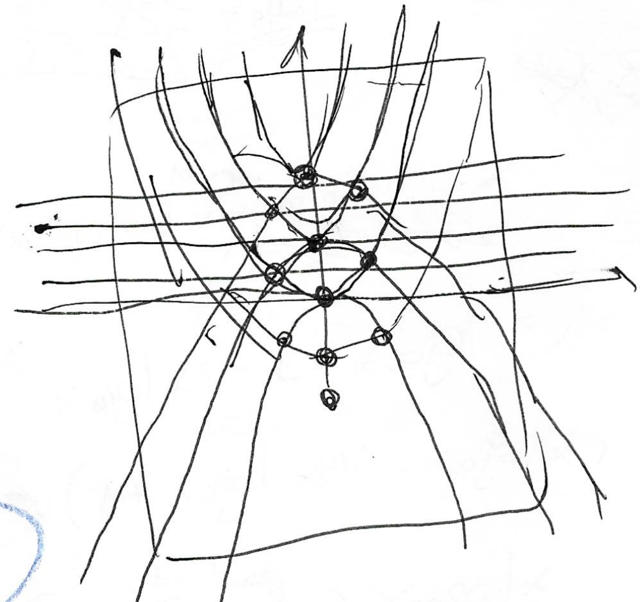
$a > 0$

$a \ne 1$









$-\frac{3}{4}x^2 + r$

$\frac{3}{4}x^2 + c =$

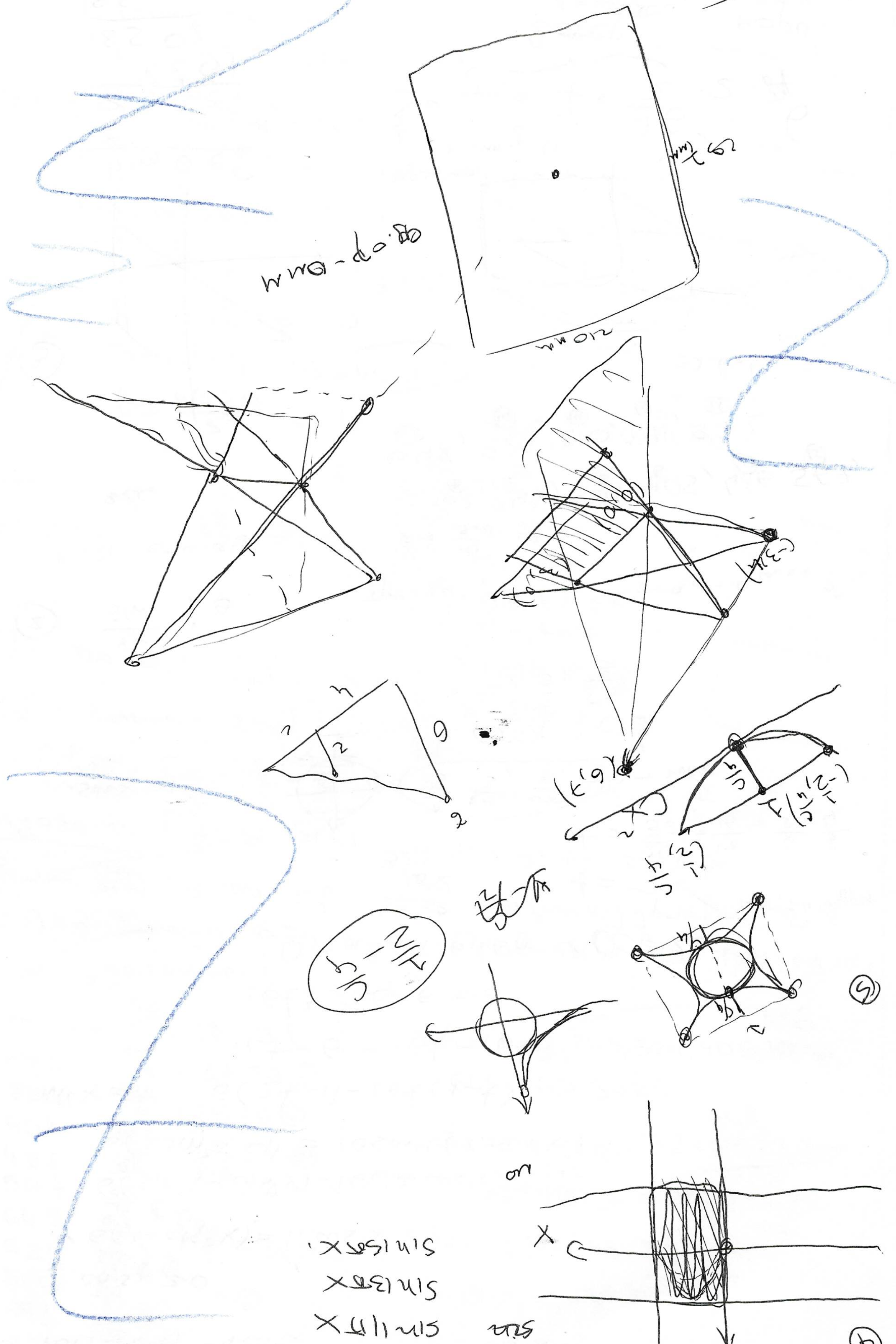
$\frac{3}{2}x^2 = \frac{r-c}{(r-c)^{\frac{2}{3}}}$

$x =$

$\frac{1}{2}(r-c) + c$

$\frac{1}{2}(r+c)$

Черновик



(1) $\sqrt{6(1-ctg^2x)}=4\cos x$ $\qquad ctg^2x\le 1$

$\begin{cases}\cos x\ge 0\\ 6(1-ctg^2x)=16\cos^2x\end{cases}$

$6(\sin^2x-\cos^2x)=16\sin^2x\cos^2x$

$6(2\sin^2x-1)=16\sin^2x(1-\sin^2x)$

$\sin^2x=t$ $\qquad 6(2t-1)=16t(1-t)$

$12t-6=16t-16t^2$

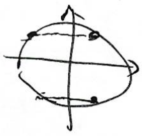
$16t^2-4t-6=0$

$D=4^2+4\cdot6\cdot16=4\cdot100=20^2$

$t=\frac{4\pm20}{\cancel{16\cdot2}\ 32}$ $\qquad t=-\frac{1}{2}$ нет, т.к. квадрат

$t=\frac{24}{32}=\frac{12}{16}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}.$

$\sin x=\pm\frac{\sqrt3}{2}$



$\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3},\frac{5\pi}{3}+2\pi k.$

$\cos x\ge 0!$

$\Rightarrow \frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}$

(2) $\frac{n}{S(n)}\ \vdots\ 9$ $\qquad$ трезн? $\qquad a_1+a_0+a_{1a_5t}$?

$n\ \vdots\ 81$ со ирод

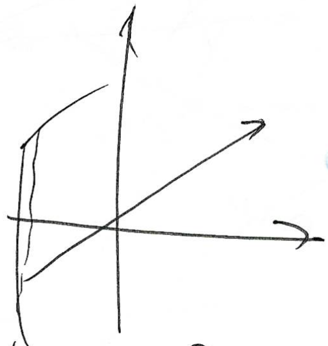
~~8к~~

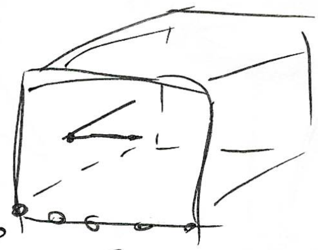
$\frac{81}{9}=9$ $\quad \frac{162}{9}=18$ $\quad \frac{243}{S}=$

81 (9), 162 (9), 243 (9), 324 (9), 405 (9), 486 (18), 567 (18), 648 (18), 729 (18), 810 (9), 891 (9), 972 (18)

$\Rightarrow$ все!

(3)





беремко $\quad$ х кноу 6

$3\cdot\underbrace{7\cdot7}_{\text{выбер 1 катета}}\cdot\frac{7\cdot6}{2}\cdot2\cdot\cancel{4}\ 6.$ $\qquad$ норм!

37044

$12348 \times 3 = 37044$

$1029 \cdot 2$

$343\times36=2058$

(1) торговые

$+49$
7