0 966707 510009

96-67-07-51

(129.5)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11кл III

Место проведения Нальчик
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников ~~имени~~ "Ломоносов"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Бакканжиева Басанга Андреевна
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

выход: 13:14 - 13:17

Дата

«29» марта 2026 года

Подпись участника

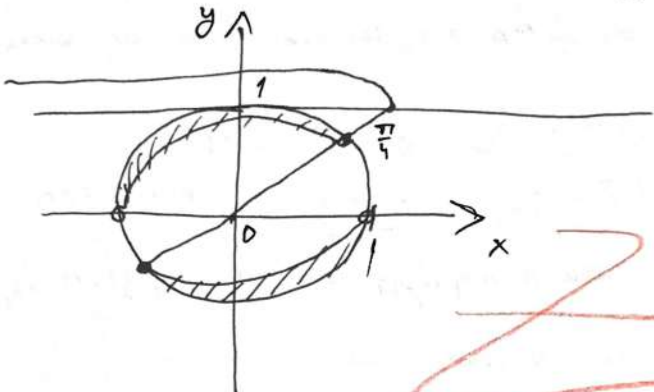
85 (Восемьдесят пять) физ

Чистовик

Задача 1.

$$\sqrt{3(1-\operatorname{ctg}^2 x)} = 2\sqrt{2}\cos x$$

ОДЗ: $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ 1-\operatorname{ctg}^2 x \geq 0 \\ \cos x \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \operatorname{ctg}^2 x \leq 1 \\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}+2\pi k; \frac{\pi}{2}+2\pi k\right] \end{cases}$



$\Rightarrow$ ОДЗ: $x \in \left[\frac{\pi}{4}+2\pi k; \frac{\pi}{2}+2\pi k\right]$

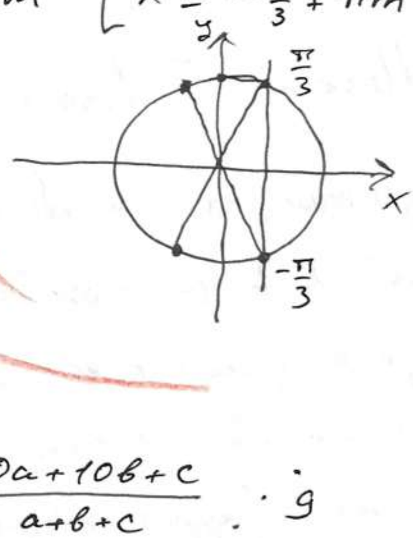
возведём выраж в квадрат: $3-3\operatorname{ctg}^2 x = 8\cos^2 x \;\big|\cdot \sin^2 x$

$3\sin^2 x - 3\cos^2 x = 8\cos^2 x \sin^2 x \qquad -3\cos 2x = 2\sin^2 2x$

$-3\cos 2x = 2 - 2\cos^2 2x \quad \exists\, \cos 2x = t \Rightarrow -3t = 2-2t^2$

$2t^2 - 3t - 2 = 0 \quad D = 9+16 = 25 \quad t_{1,2} = \frac{3\pm 5}{4} = -\frac{1}{2}; \cancel{2}$

$\Rightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \frac{2\pi}{3}+2\pi n \\ 2x = -\frac{2\pi}{3}+2\pi m \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3}+\pi n \\ x = -\frac{\pi}{3}+\pi m \end{array}\right.$



$\Rightarrow$ по ОДЗ: $x = \frac{\pi}{3}+2\pi q$

Ответ: $x = \frac{\pi}{3}+2\pi q$

Задача 2

$\exists\ \overline{abc}$ - одно из искомых чисел $\Rightarrow \dfrac{100a+10b+c}{a+b+c} \,\vdots\, 9$

$\dfrac{99a+9b}{a+b+c}+1 \,\vdots\, 9 \qquad 9\left(\dfrac{11a+b}{a+b+c}\right)+1 \,\vdots\, 9$, т.е.

$9\left(\dfrac{11a+b}{a+b+c}\right)+1$ - целое число и кратно 9 $\Rightarrow 9\left(\dfrac{11a+b}{a+b+c}\right)$ - целое, но

Чистовик

$\frac{11a+b}{a+b+c}$ — нецелое, причём $a+b+c \vdots 9$, т.к. если оно просто кратно трём, то наше $\overline{abc}$ будет иметь вид $3q+1$, что не может быть $\vdots 9$ $\Rightarrow$ Само число $\overline{abc} \vdots 9$ и т.к. $\frac{\overline{abc}}{9} \vdots 9$, то $\overline{abc} \vdots 81$ и это относится ко всем таким числам множества A (~~если они трёхзначны~~ $\Rightarrow$ ~~A~~ произведение 81 на целые числа

$81 \cdot 2 = 162$ $81 \cdot 3 = 243$ $81 \cdot 4 = 324$ $81 \cdot 5 = 405$

$81 \cdot 6 = 486$ $\underline{81 \cdot 7 = 567}$ $81 \cdot 8 = 648$ $\underline{81 \cdot 9 = 729}$ $81 \cdot 10 = 810$

$\underline{81 \cdot 11 = 891}$ $81 \cdot 12 = 972$

нам не подойдут $81 \cdot 7; 81 \cdot 9; 81 \cdot 11$ т.к. сумма их цифр равна 18, а они сами нечётные $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ нашему множеству среди трёхзначных чисел удовлетворяют только

$\underbrace{162}_{1}, \underbrace{243}_{2}, \underbrace{324}_{3}, \underbrace{405}_{4}, \underbrace{486}_{5}, \underbrace{648}_{6}, \underbrace{810}_{7}, \underbrace{972}_{8}$

$243 + 648 + 972 = 1863$

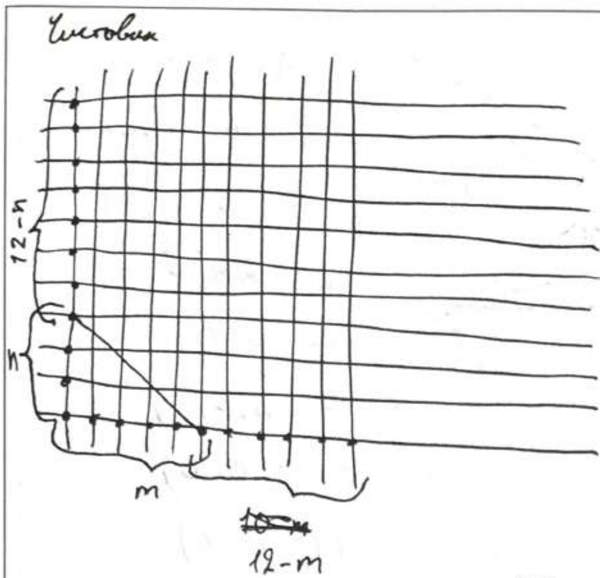
Ответ: $\{162, 243, 324, 405, 486, 648, 810, 972\}$, 1863

Задача 3.

Множество F состоит из таких точек A(x, y, z), что $\begin{cases} |x| \le 5 \\ |y| \le 5 \\ |z| \le 5 \\ x, y, z \in \mathbb{Z} \end{cases}$

заметим, что т.к. оба катета любого искомого Δ-ка ‖ двум осям коорд $\Rightarrow$ Δ-к ∈ пл. ⊥ третьей оси $\Rightarrow$ можем найти кол-во п/у Δ-ов в одной пл. и просто умножить на 33 (на 3 т.к. у нас 3 оси и на 11 т.к. вдоль каждой оси мы имеем 11 точек, удовлетв. усл.). Так же, ~~рассмотр~~ т.к. в плоскости точки образуют квадрат, то найдём кол-во п/у Δ-ов с катетами ‖ каким-то 2-ум сторонам и умножим на 4 т.к. мы имеем одинаковую ситуацию отн. каждой вершины; и тогда, если s - кол-во п/у Δ-ов отн. верш кв. в одной из образуемых пл., то Ответом будет число 132s, найдём s.

Чистовик



$\angle$ Δ-ки со сторонами m и n при вершине нашего квадрата и тогда сторону m мы можем разместить $12-m$ способами, а сторону n $12-n$ способами и тогда со сторонами n и m мы имеем $(12-n)(12-m)$ треугольников, причем $m, n \in [2;11]$, иначе говоря $p \cdot q$, где $p, q \in [1;10]$

и тогда S = сумма pq при всех p и q

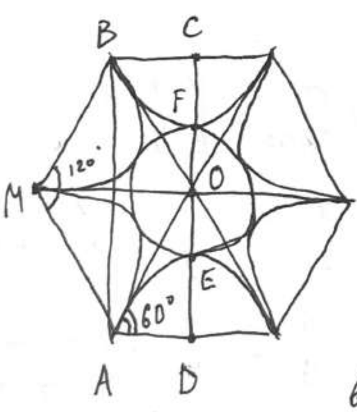
q \ p	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$(1+2+\ldots+9+10)\cdot 1$
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	---
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	---
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	...
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	---
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	...
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	$(1+2+\ldots+9+10)\cdot 10$

$\Rightarrow S = (1+2\ldots+9+10)^2$

$1+2+\ldots+9+10 = \frac{11\cdot 10}{2} = 55 \Rightarrow$ ответом будет $55^2\cdot 132$

Ответ: 399300

Задача 5.



$MB = MA = 1$, $\angle BMA = 120° \Rightarrow BA = \sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow CD = \sqrt{3} = 2DE + 2r \Rightarrow DE + r = \frac{\sqrt{3}}{2}$

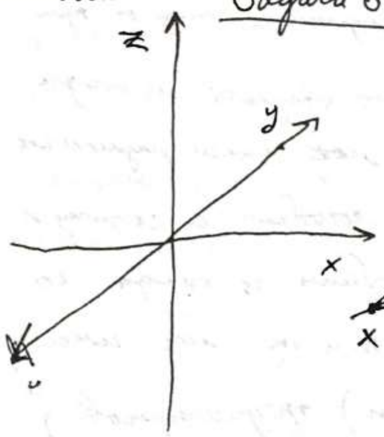
т.к. углы нулевые между параболами, то их касательные при вершинах шестиуг. совп. и явл. биссектр. перерисуем нашу параболу $y = Cx^2$ в системе коорд, тогда как в т. $x = \frac{1}{2}$ сост. угол 60° с абсциссой $\Rightarrow k_{кас} = y'(x_0)$, т.е. $tg 60° = y'(\frac{1}{2}) =$

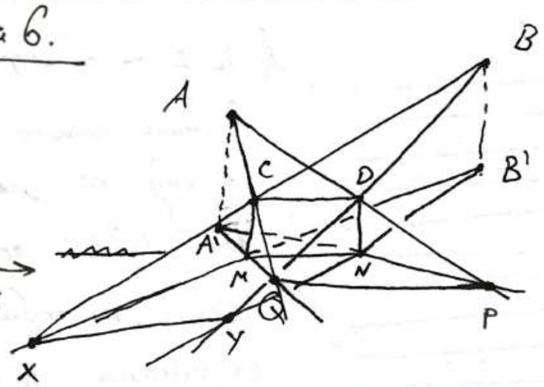
$2C \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{3}$ $\quad C = \sqrt{3} \Rightarrow y = \sqrt{3}x^2$ и

$y(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{4} = DE \Rightarrow r = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{4}$

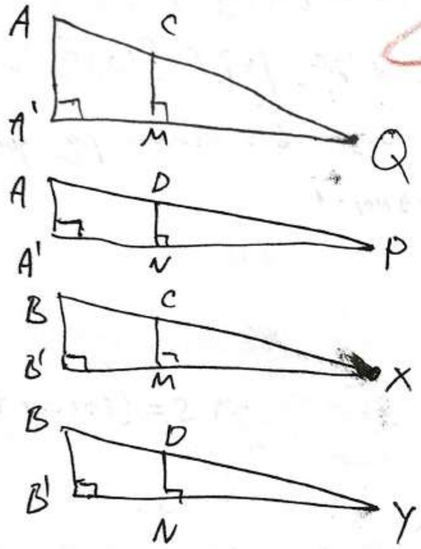
Чистовик

Задача 6.





$A(-5;2;6)$
$B(6;9;6)$
$A'(-5;2;0)$
$B'(6;9;0)$
$C(0;0;2)$
$D(3;0;2)$
$M(0;0;0)$
$N(3;0;0)$



$AA' = BB' = 6$

$CM = DN = 2$

$A'M = \sqrt{(5^2+2^2)} = \sqrt{29}$

$A'N = \sqrt{8^2+2^2} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$

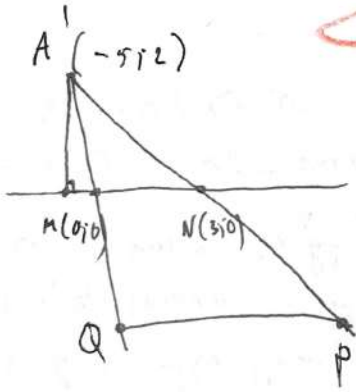
$B'M = \sqrt{36+81} = \sqrt{117} = 3\sqrt{13}$

$B'N = \sqrt{9+81} = 3\sqrt{10}$

$MQ = \frac{1}{3}A'Q \Rightarrow MQ = \frac{1}{2}A'M = \frac{\sqrt{29}}{2}$

$PN = \frac{1}{2}A'N = \sqrt{17}$ $\quad XM = \frac{1}{2}B'M = \frac{3}{2}\sqrt{13}$

$NY = \frac{1}{2}B'N = \frac{3}{2}\sqrt{10}$



$S_{A'MN} = \frac{4}{9}S_{AQP} \Rightarrow S_{AQP} = \frac{9}{4}S_{A'MN} =$

$= \frac{9}{4}\left(\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 2 - \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 2\right) = \frac{27}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{MNPQ} = \frac{27}{4}\cdot\frac{5}{9} = \frac{15}{4}$, напишем ур. прямых

$A'Q: \begin{cases} 2 = -5k+b \\ b=0 \end{cases} \Rightarrow A'Q: y = -\frac{2}{5}x$

$A'N: \begin{cases} 0 = 3k+b \\ 2 = -5k+b \end{cases}$ $\quad b = -3k$ $\quad 2 = -8k$ $\quad k = -\frac{1}{4}$ $\quad b = \frac{3}{4}$

$A'N: y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$

Черновик

найдём коорд точек Q и P $\quad \frac{QM}{MA'} = \frac{1}{2} \Rightarrow QM = \frac{1}{2} MA' = \frac{\sqrt{29}}{2} =$

$= \sqrt{x_Q^2 + y_Q^2}$ $\quad \begin{cases} x_Q^2 + y_Q^2 = \frac{29}{4} \\ y_Q = -\frac{2}{5} x_Q \end{cases} \Rightarrow x_Q^2 + \frac{4}{25} x_Q^2 = \frac{29}{4}$

$\frac{29 x_Q^2}{25} = \frac{29}{4} \quad x_Q^2 = \frac{25}{4} \quad x_Q = \frac{5}{2} \Rightarrow y_Q = -\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{2} = -1$

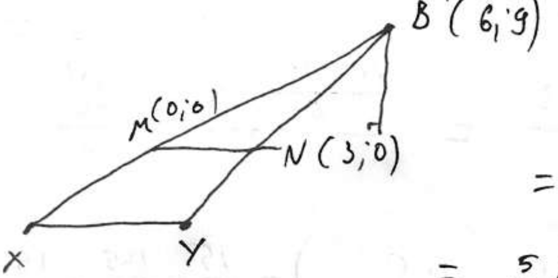
$Q(2{,}5; -1) \qquad NP = \sqrt{17} = \sqrt{(3-x_P)^2 + y_P^2}$

$\begin{cases} (3-x_P)^2 + y_P^2 = 17 \\ y_P = -\frac{1}{4} x_P + \frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow x_P = \left(y_P - \frac{3}{4}\right) \cdot (-4) = (3 - 4y_P)$

$(3 - 3 + 4y_P)^2 + y_P^2 = 17 = 16y_P^2 + y_P^2 = 17 \Rightarrow y_P = -1$

$x_P = 3 - 4 \cdot (-1) = 7 \qquad P(7; -1)$

$PQ: y = -1$



$S_{MNYX} = \frac{5}{4} \cdot S_{B'MN} =$

$= \frac{5}{4} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 9 - \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 3 \right) =$

$= \frac{5}{4} \left(\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot (6 - 3) \right) = \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 3 =$

$= \frac{135}{8} \qquad B'M: \begin{cases} 9 = 6k + b \\ b = 0 \end{cases} \quad k = \frac{3}{2} \qquad B'M: y = \frac{3}{2} x$

$B'N: \begin{cases} 9 = 6k + b \\ 0 = 3k + b \end{cases} \quad 9 = 3k, \; k = 3, \; b = -9 \qquad B'N: y = 3x - 9$

найдём коорд. X и Y: $\quad MX = \frac{3}{2}\sqrt{13} = \sqrt{x_X^2 + y_X^2}$

$\begin{cases} x_X^2 + y_X^2 = \frac{117}{4} \\ y_X = \frac{3}{2} x_X \end{cases} \qquad x_X^2 + \frac{9}{4} x_X^2 = \frac{117}{4} = \frac{13 x_X^2}{4} \Rightarrow x_X^2 = 9$

$\Rightarrow x_X = -3 \qquad y_X = -\frac{9}{2} \qquad X(-3; -4{,}5)$

$y_X = y_Y = -4{,}5 \Rightarrow -4{,}5 = 3x_Y - 9 \qquad 3x_Y = 4{,}5 = \frac{9}{2} \quad x_Y = \frac{3}{2}$

$Y(1{,}5; -4{,}5) \qquad XY: y = -4{,}5$

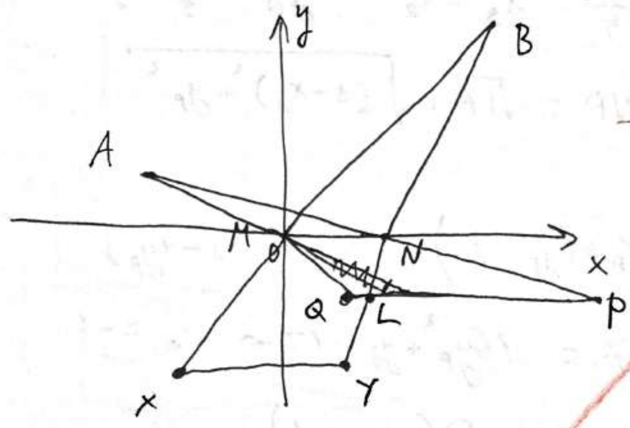
Чистовик

∡ на коорд пл., для построения найдём общ. точки

$B'Y \cap QP$ $\begin{cases} y=3x-9 \\ y=-1 \end{cases}$ $3x-9=-1$ $3x=8$ $x=\frac{8}{3}=2\frac{2}{3}$

$\cancel{Q(2,5; -1)}$ $x_Q=2,5$ $x_p=7$ $\Rightarrow B'Y \cap QP = (2\frac{2}{3}; -1)$

] это точка L



$\frac{70}{105}$

$\frac{7}{10}\cdot 8 =$

$= \frac{28}{5} =$

$=$ [illegible]

$$S(S_{MNYX} \cup S_{MNPQ}) = S_{MNYX} + S_{MNPL} - S_{MNLQ}$$

$$S_{MNLQ} = \frac{QL+MN}{2}\cdot 1 = \frac{\left(\frac{8}{3}-\frac{5}{2}\right)+3}{2} = \frac{\frac{16-15}{6}+3}{2} = \frac{3\frac{1}{6}}{2} =$$

$$= \frac{\frac{19}{6}}{2} = \frac{19}{12} \Rightarrow S_m(S_{MNYX} \cup S_{MNPQ}) = \frac{15}{4} + \frac{135}{8} - \frac{19}{12} =$$

$= \frac{165}{8} - \frac{19}{12} = \frac{457}{24}$, но т.к. $Q \to X$ и $P \to Y$ по мере перемещения светлячка из A в B, то ещё найдём S_{PLY}

$$S_{PLY} = \frac{1}{2}\cdot 3,5 \cdot LP = \frac{7}{4}\cdot\left(7-\frac{8}{3}\right) = \frac{7}{4}\cdot\frac{21-8}{3} = \frac{7\cdot 13}{12} = \frac{91}{12}$$

и тогда $S_{затем} = \frac{457}{24} + \frac{91}{12} = \frac{457+182}{24} = \frac{639}{24} = \frac{213}{8}$

Ответ: $\frac{213}{8}$ метров кв.

Чистовик

Задача 8.

$8x^2\log_a x - \log_x a - 2x \geqslant 0 \qquad x; a > 0 \qquad x \neq 1,\ a \neq 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad 8x^2\log_a x - \dfrac{1}{\log_a x} - 2x \geqslant 0 \quad \cancel{| \cdot \log_a x}$

$\log_x a\left(8x^2\log_a^2 x - 1 - 2x\log_a x\right) \geqslant 0 \qquad \exists \log_a x = t$

$\log_x a\,(8t^2 - 2t - 1) \geqslant 0 \qquad D = 4 + 32 = 36 \quad t_{1,2} = \dfrac{2 \pm 6}{16} = $

$= -\frac{1}{4};\ \frac{1}{2}$

$8\log_x a\left(t + \frac{1}{4}\right)\left(t - \frac{1}{2}\right) \geqslant 0$

$\log_x a\left(t + \frac{1}{4}\right)\left(t - \frac{1}{2}\right) \geqslant 0 \qquad \dfrac{\left(t + \frac{1}{4}\right)\left(t - \frac{1}{2}\right)}{\log_a x} \geqslant 0$

$$\frac{\left(x\log_a x + \frac{1}{4}\right)\left(x\log_a x - \frac{1}{2}\right)}{\log_a x} \geqslant 0$$

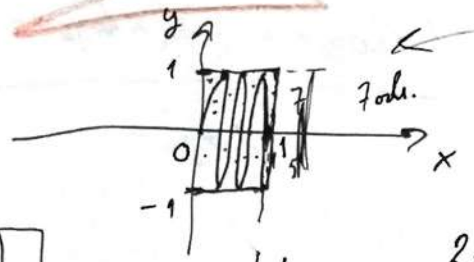
Черновик

$8x^2 \log_a x$

$$\frac{(x\log_a x + \frac{1}{4})(x\log_a x - \frac{1}{2})}{\log_a x} \geqslant 0$$

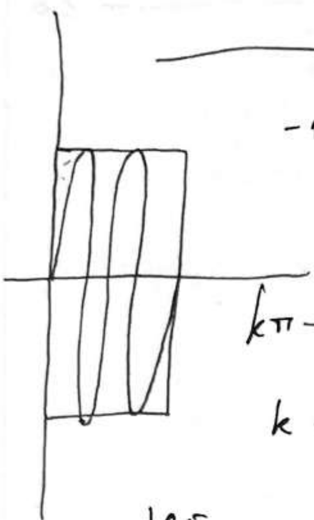
$x \log_a x =$

Черновик



7 об.

$y = 5\pi x$
7 об.



$2{,}5$ Гц

$\frac{1}{4} k\pi = \pi$

$k\pi \frac{1}{5} = \pi$

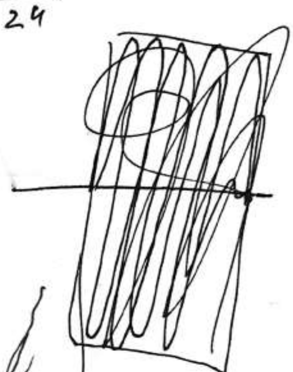
$k = 5$

$y = \sin k\pi x$

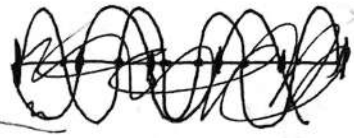
$\cancel{y = \sin \frac{5\pi x}{2}}$

$\frac{165}{8} - \frac{19}{12} = \frac{495-38}{24}$

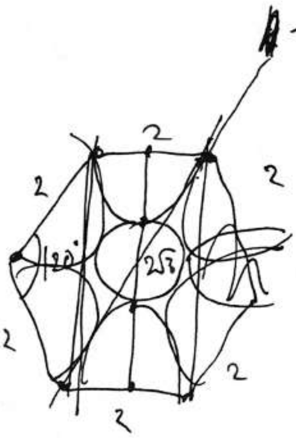
$= \frac{457}{24}$

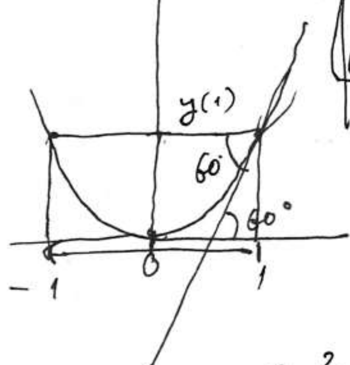


165×3: 300, 180, 15, 495



$\cancel{17\pi x}$





$19 \times 2 = 38$

$495 - 38 = 457$

$y = Cx^2$

$\cancel{y = \sqrt{3}x +}$

$r = \frac{2\sqrt{3} - 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{3}}{2} =$

$\frac{\sqrt{3}}{2}$

$y' = 2Cx$

$k = \sqrt{3} \Rightarrow$

$2C x_0 = \sqrt{3}$

$2C = \sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow C = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$y(1) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\begin{cases} 9 = 6k + b \\ 2 = -5k + b \end{cases}$

$7 = 11k$

$k = \frac{7}{11}$

$\frac{9}{4} \cdot 13 = \frac{117}{4}$

$b = 9 - 6\cdot\frac{7}{11} = \frac{99-42}{11} = \frac{57}{11}$

$y = \frac{7}{11}x + \frac{57}{11}$

Черновик

$121 \cdot 25$

$\times \frac{25}{54}$

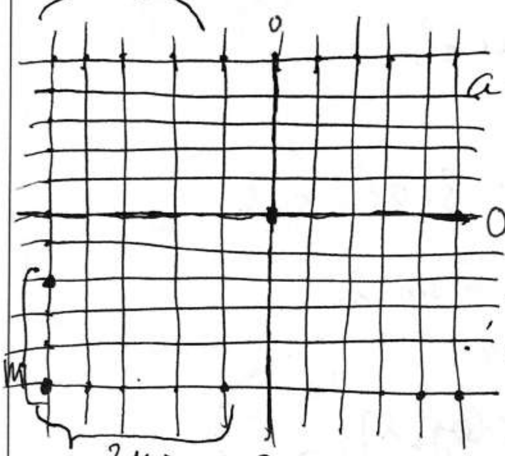
$\frac{100a + 10b + c}{a+b+c} \vdots 9$ нецелое

$605 + 2420 =$

$= \begin{array}{r} 2420 \\ +\ 605 \\ \hline 3025 \end{array}$

$1 + \frac{99a + 9b}{a+b+c} = 9\left(\frac{11a+b}{a+b+c}\right) + 1 =$

$= 9\left(\frac{10a-c}{a+b+c} + 1\right) + 1 = 9\left(\frac{10a-c}{a+b+c}\right) + 10$



$a+b+c \vdots 9$

81

$243 \quad 648 \quad 972$

999

$n, m \in [1; 10]$

$(11-n)(11-m)$

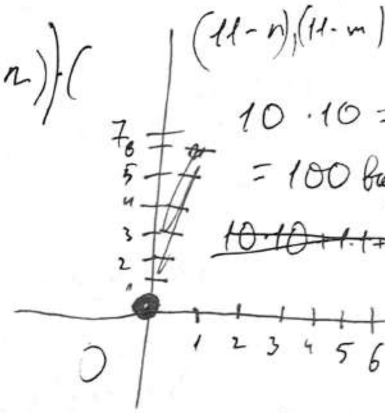
$(11-n),(11-m) \in [1;10]$

$(1+(11-n))($

$10 \cdot 10 =$

$= 100$ вар.

~~10·10+1·1~~



2	162
3	243
4	324
5	405
6	486
7	567
8	648
9	729
10	810
11	891
12	972

$\begin{array}{r} 972 \\ +\ 648 \\ \hline 1620 \\ +\ 243 \\ \hline 1863 \end{array}$

$3025 \cdot 132$

$\begin{array}{r} 3025 \\ \times\ 12 \\ \hline 30250 \\ +\ 6050 \\ \hline 36300 \end{array}$

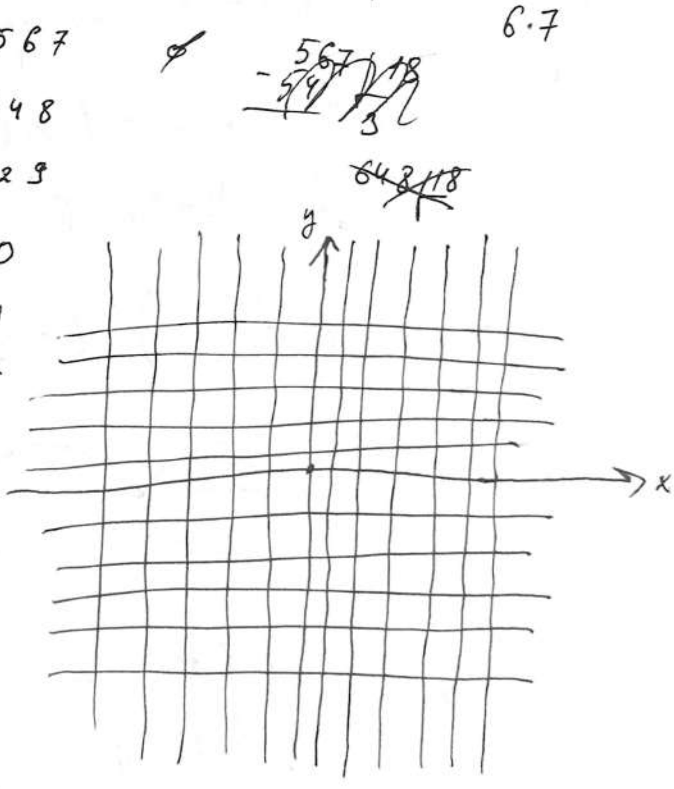
$6 \cdot 7$

$567 : 18$

-54

$\quad 3$

~~648 : 18~~



$\begin{cases} |x| \le 5 \\ |y| \le 5 \\ |z| \le 5 \\ x, y, z \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$\begin{array}{r} 363000 \\ +\ 36300 \\ \hline 399300 \end{array}$

Черновик

$$\sqrt{3(1-ctg^2 x)} = 2\sqrt{2}\cos x$$

ОДЗ: $\begin{cases} 1-ctg^2 x \geqslant 0 \\ \cos x \geqslant 0 \end{cases}$

$$3 - 3ctg^2 x = 8\cos^2 x$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a(x+\Delta x) - \log_a x}{\Delta x} =$$

$$3 - 3\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = 8\cos^2 x$$

$$= \lim \frac{\frac{\ln(x+\Delta x)}{\ln a} - \frac{\ln x}{\ln a}}{\Delta x} =$$

$$3\sin^2 x - 3\cos^2 x = 8\cos^2 x \sin^2 x$$

$$-3\cos 2x = 2\sin^2 2x$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)}{\Delta x \ln a}$$

$$\cancel{2\cos^2 x - 1 =}$$

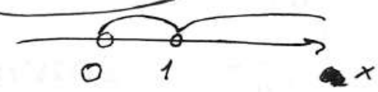
$$(x\log_a x)' =$$

$$= \log_a x + \frac{1}{\ln a}$$

=

$$8x^2\log_a x - \log_x a - 2x \geqslant 0$$

$$8x^2\log_a^2 x - 1 - 2x\log_a x \geqslant 0$$

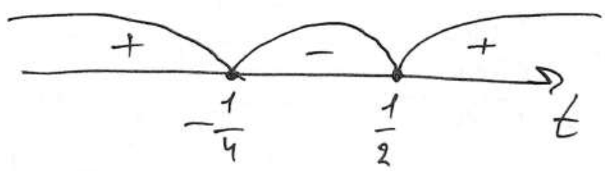


$\frac{1}{\ln a}$

$$8t^2 - 2t - 1 \geqslant 0$$

$$D = 4 + 32 = 6^2 \quad t_{1,2} = \frac{2 \pm 6}{16} = -\frac{1}{4}; \frac{1}{2}$$

$$\left(t + \frac{1}{4}\right)\left(t - \frac{1}{2}\right) \geqslant 0$$



$\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\left[\begin{array}{l} t \geqslant \frac{1}{2} \\ t \leqslant -\frac{1}{4} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x\log_a x \geqslant \frac{1}{2} \\ x\log_a x \leqslant -\frac{1}{4} \end{array}\right.$