0 754253 790002

75-42-53-79
(123.3)

1755

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант ______

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по МАТЕМАТИКЕ
профиль олимпиады

Батешина Глеба Вячеславовича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

13:47 – 50

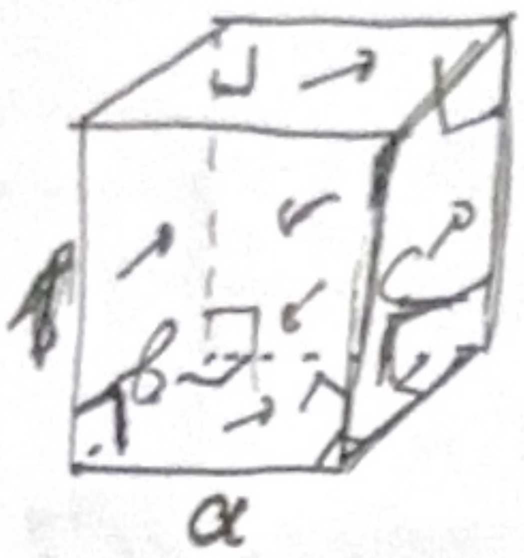
Дата
«29» марта 2026 года

Подпись участника

 90 (девяносто)

75-42-53-79
(123.3)

Черновик



$abc + (2ab + 2bc + 2ac) + (4a + 4b + 4c) = 2026$

$a \neq b \neq c \in N$ $abc \to min$

$r + 2q + 4p = 2026$

$ab + bc + ac \geq 3\sqrt[3]{(abc)^2} \geq 3\sqrt[3]{r^2}$ $a^3 + 6a^2 + 12a = 2026$

$a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} = 3\sqrt[3]{r}$

$a^3 + 6a^2 + 12a - 2026 = 0$

$2026 = LHS \geq x^3 + 2 \cdot 3x^2 + 4 \cdot 3x$

$x^2(x+6) + 12(x+6) - 72 \leq 2026$

$(x^2+12)(x+6) \leq 2098$

$(a+1)(b+1)(c+1) =$ $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot (1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1) +$

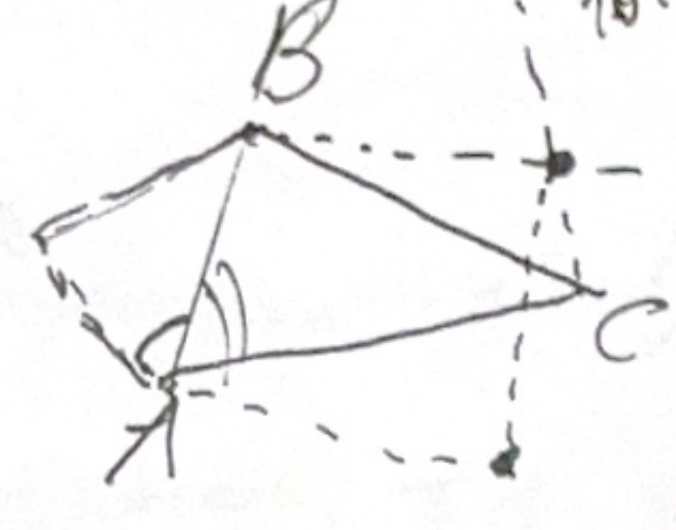
$= abc + a + b + c + ab + bc + ca$ $+ 4 \cdot (1+2+3) =$

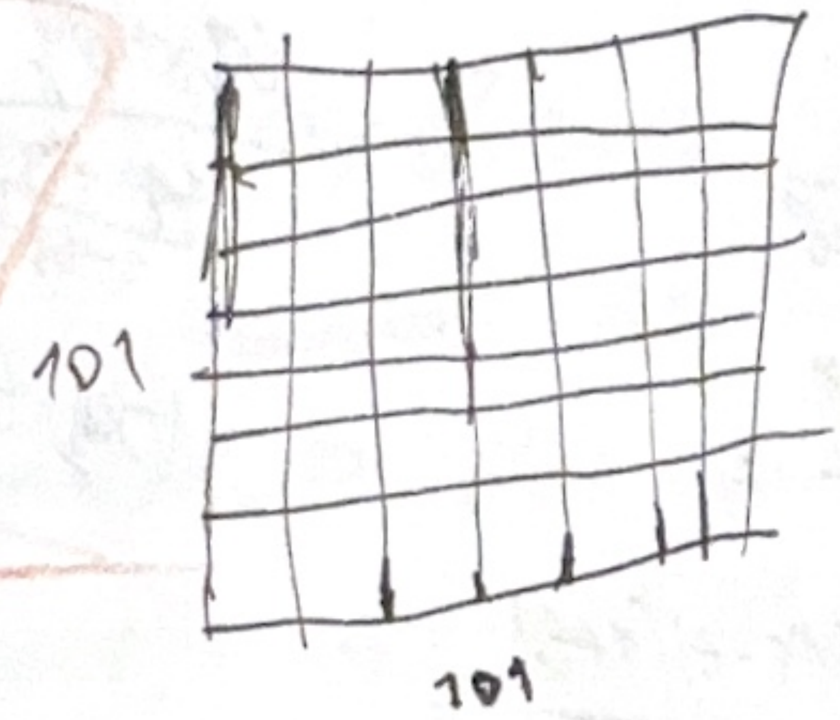
$2098 \mid 2$
1049

$(a+2)(b+2)(c+2)$ $= 6 + 2 \cdot 11 + 4 \cdot 6 =$

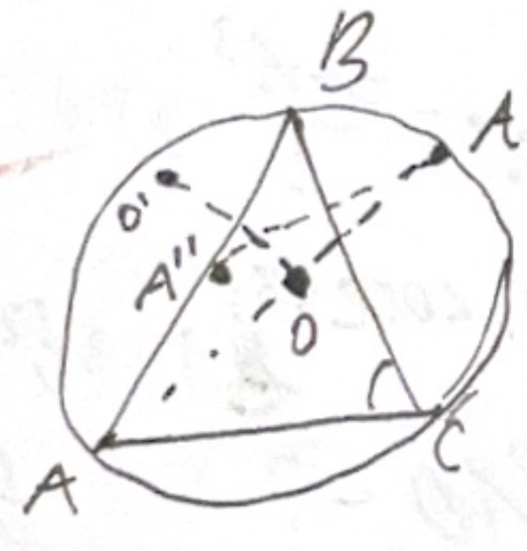
$= 52$

$1049 \mid 13$
8





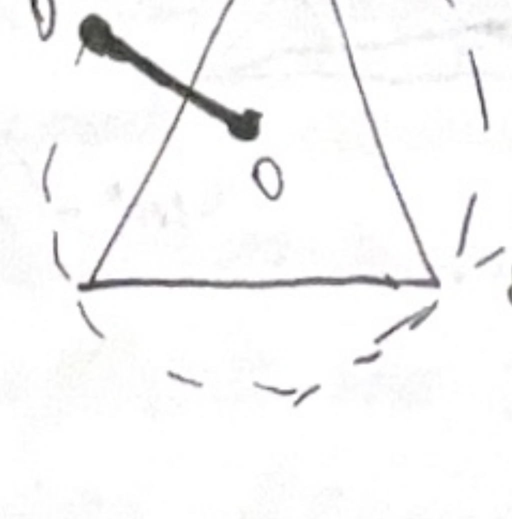
$4 \cdot \frac{(2 \cdot 101) \cdot (2 \cdot 101 - 1)}{2} +$

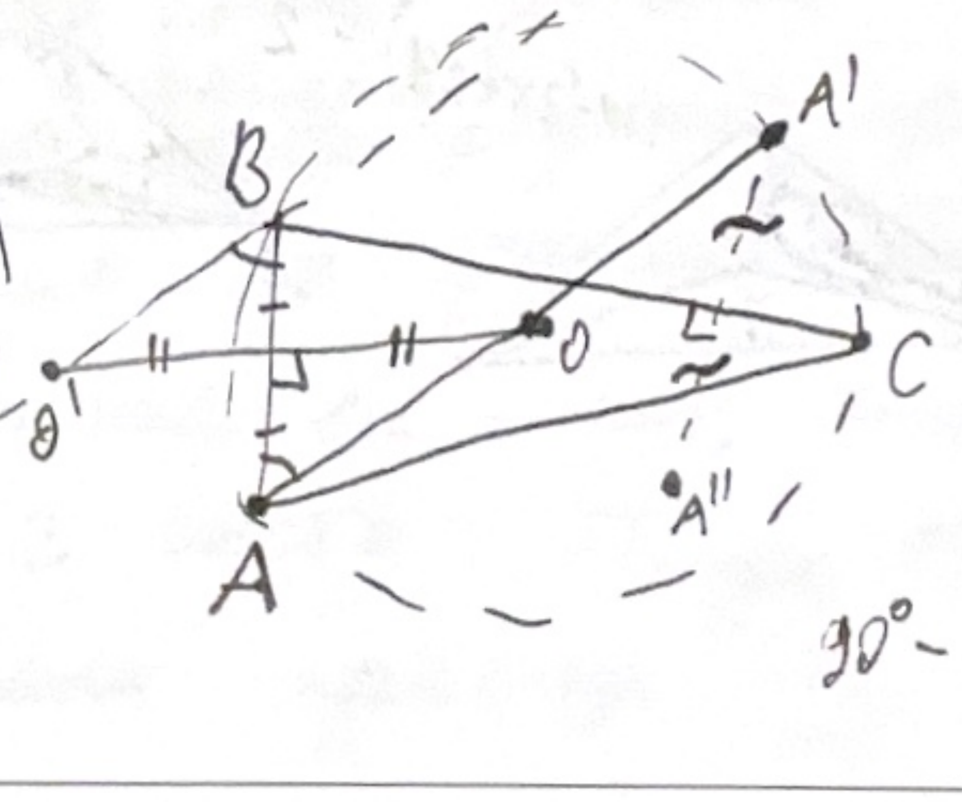


$60° + \angle B =$
$= 90° - \angle B$
$\angle B = 15°$

$+ 4 \cdot \frac{100 \cdot 99}{2} \cdot 100$

$\angle O'AB = 60°$

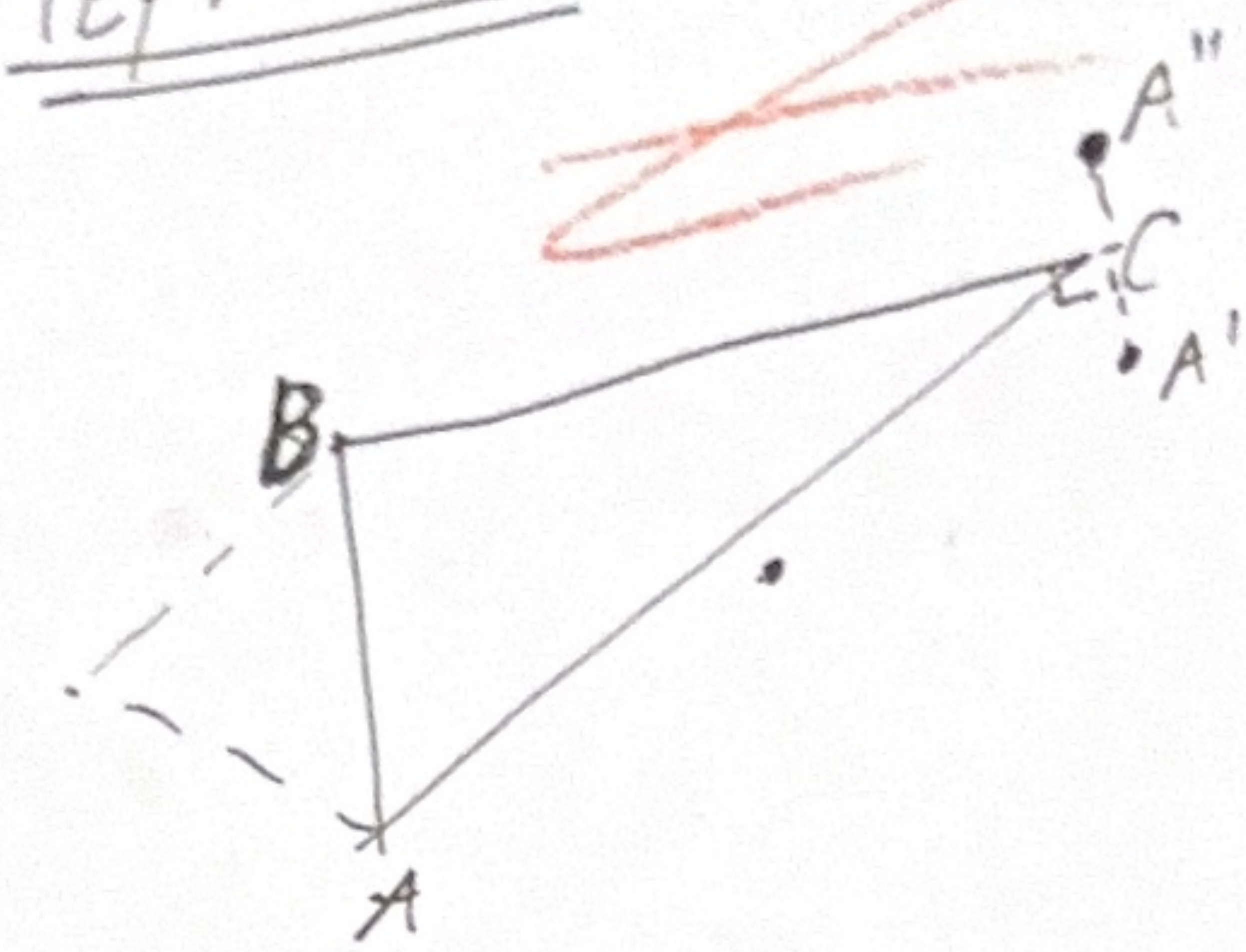


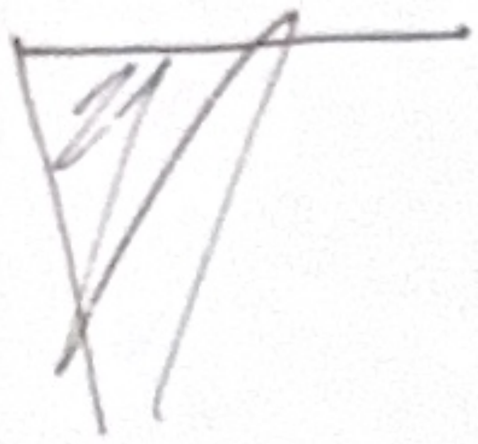


$90° - \angle B + \angle B$

$90° - \frac{\angle B}{2} \angle B$

Черновик





$\angle A''BC = \angle A'BC =$

$= A'AC =$

$= 90° - \frac{360° - 2\angle B}{2} =$

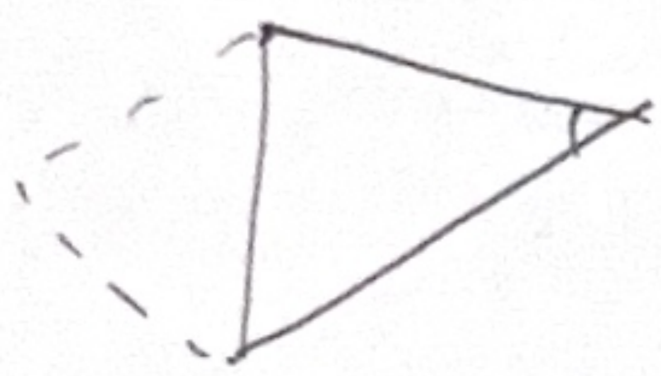
$= \angle B - 90°$

$\angle B - 90° + \angle B + 60° = 180°$

$2\angle B = 210°$

$\angle B = 105°$

$\begin{array}{r|l} 1017 & 9 \\ \hline 9 & 113 \\ 11 & \\ 9 & \\ 27 & \end{array}$



$tg\,x\, tg\,y\, tg\,z \to max$

$0 < x, y, z < \frac{\pi}{2}$,

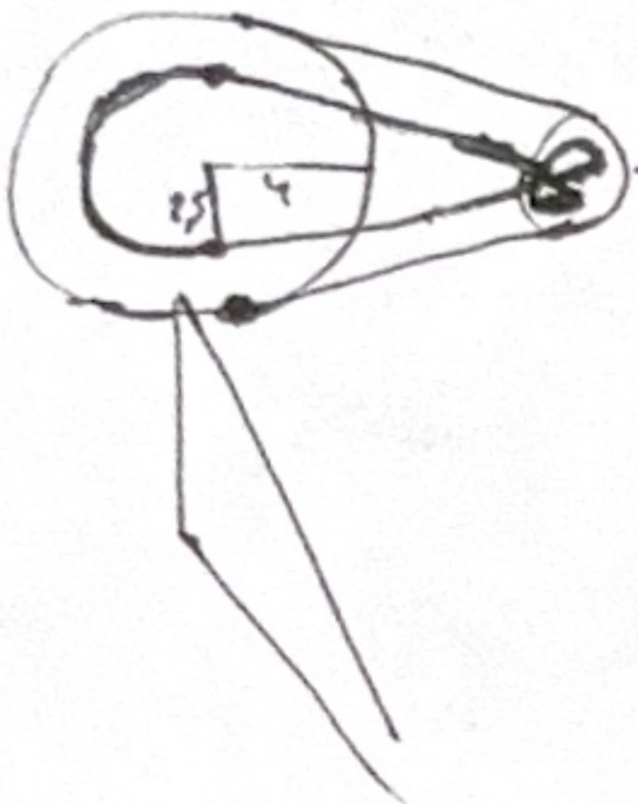
$x + y + z = \frac{\pi}{2}$

$tg\,x\, tg\,y\, tg\left(\frac{\pi}{2} - x - y\right) =$

$= \frac{tg\,x\, tg\,y}{tg(x+y)} =$

$= \frac{tg\,x\, tg\,y}{\frac{tg\,x + tg\,y}{1 - tg\,x\, tg\,y}} =$

$= \frac{(tg\,x\, tg\,y)(1 - tg\,x\, tg\,y)}{tg\,x + tg\,y}$



$\frac{ab(1-ab)}{a+b} \to max$

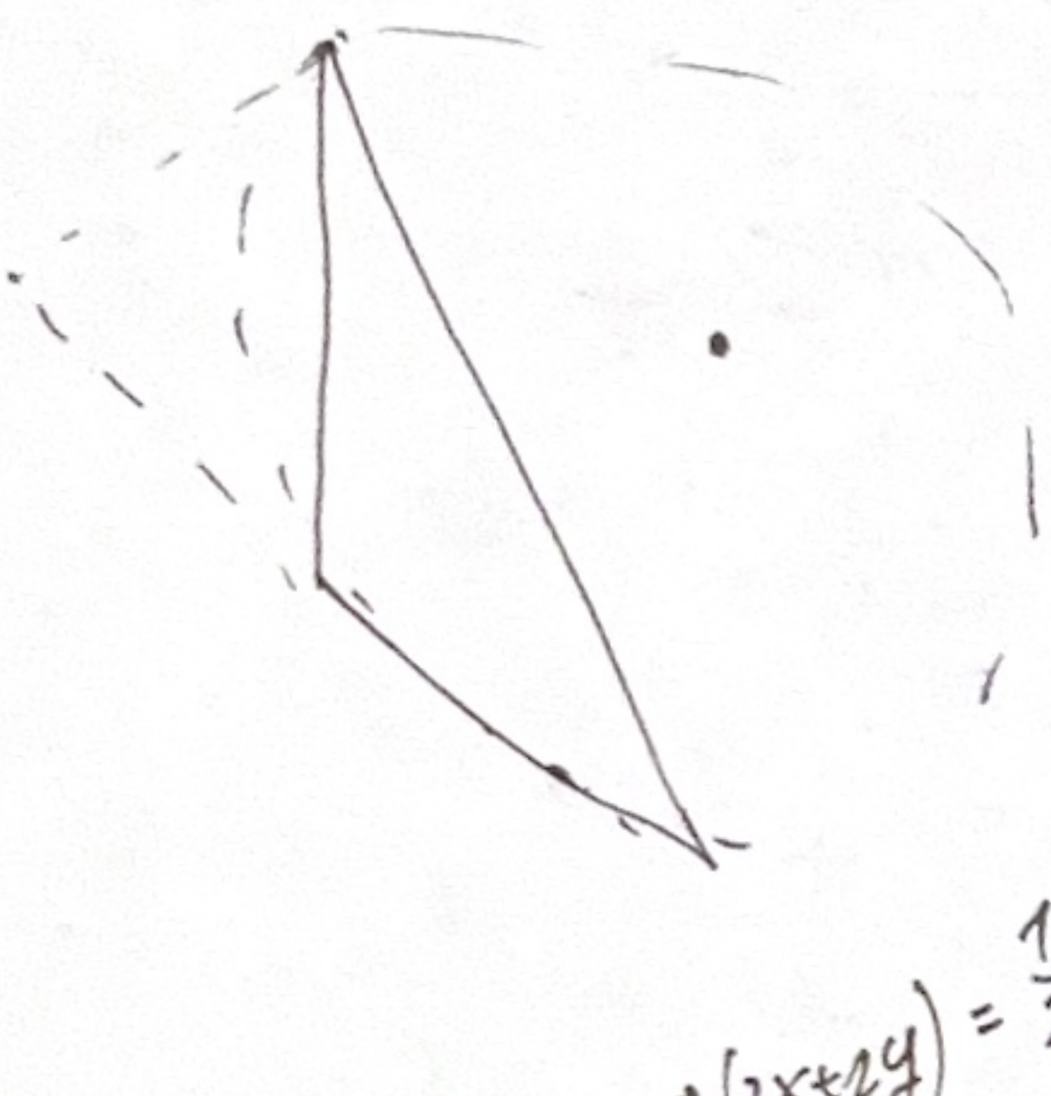
$a, b > 0$

$ab(1-ab) \leq \frac{1}{4}$

$a + b \geq 2\sqrt{ab}$

$\frac{ab(1-ab)}{a+b} \leq \frac{\sqrt{ab}(1-ab)}{2} =$

$= \frac{t(1-t)(1+t)}{2} = \frac{t - t^3}{2}$



32, 32, 116°

$\angle ABO = 29°$, $\angle OBC = 87°$

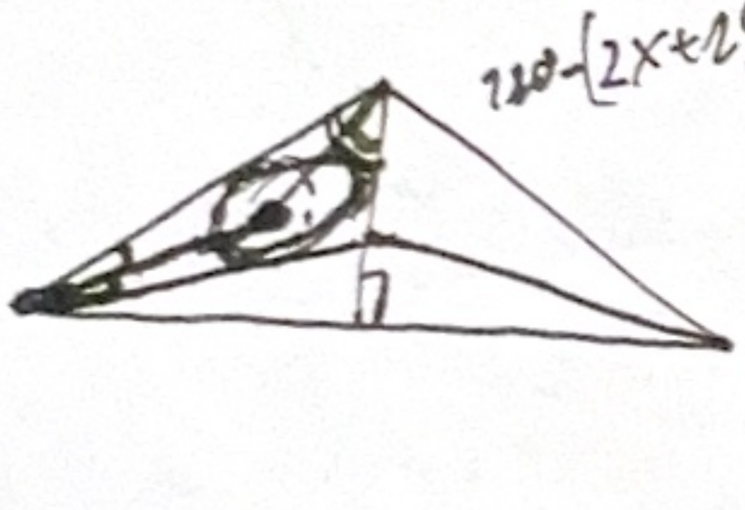
$1 - 3t^2 = 0$

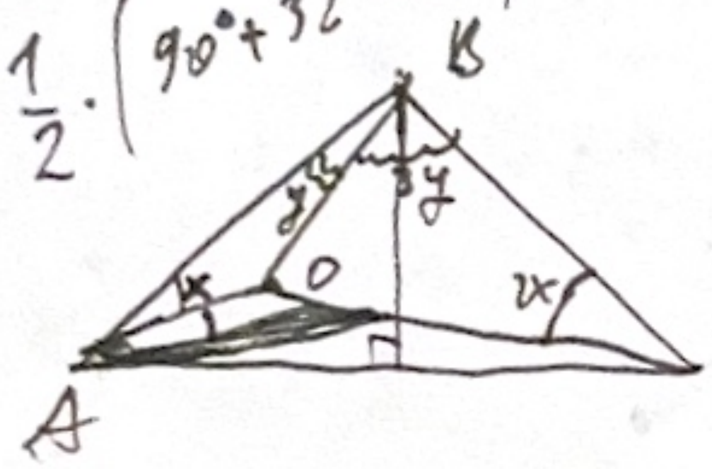
$\angle BOA \; \angle BAO - ?$

$t = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\sqrt{ab}$

$180 - (2x + 2y) = \frac{1}{2} \cdot (90° + 32° - 2x)$





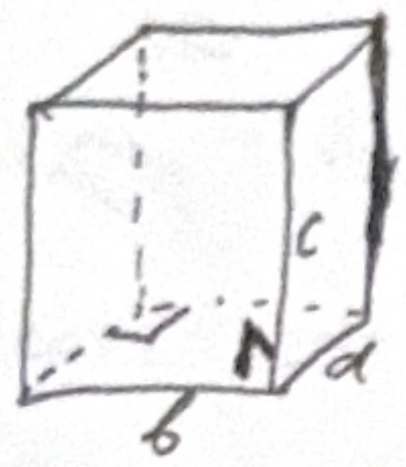
$180° - (32 - x + 32 - 2x) =$

$= 180° - 64° + 3x =$

$= 116° + 3x$

Чистовик 1

№1



Пусть длина, ширина и высота этой призмы равны a, b и c. Раз она прямая и прямоугольная, то она на самом деле прямоугольный параллелепипед. Тогда из условия:

$$\underbrace{abc}_{\text{объём}} + \underbrace{(2ab+2bc+2ac)}_{\Sigma \text{ площадей всех граней}} + \underbrace{(4a+4b+4c)}_{\Sigma \text{ длин всех рёбер}} = 2026$$

Заметим, что $(a+2)(b+2)(c+2) = \underbrace{abc+2ab+2ac+4a+2bc+4b+4c}_{=2026}+8 \Rightarrow$

$\Rightarrow (a+2)(b+2)(c+2) = 2034 = 2\cdot 3^2\cdot 113$, это разложение на простые множители.

Не умаляя общности, будем считать, что $a+2 \,\vdots\, 2$, т.е. $a+2=2k$ (очевидно, $k\neq 1$, т.к. $a\geq 1$), а $b<c$. Тогда возможны следующие варианты:

1) $a+2=2\cdot 3$, $b+2=3$, $c+2=113$

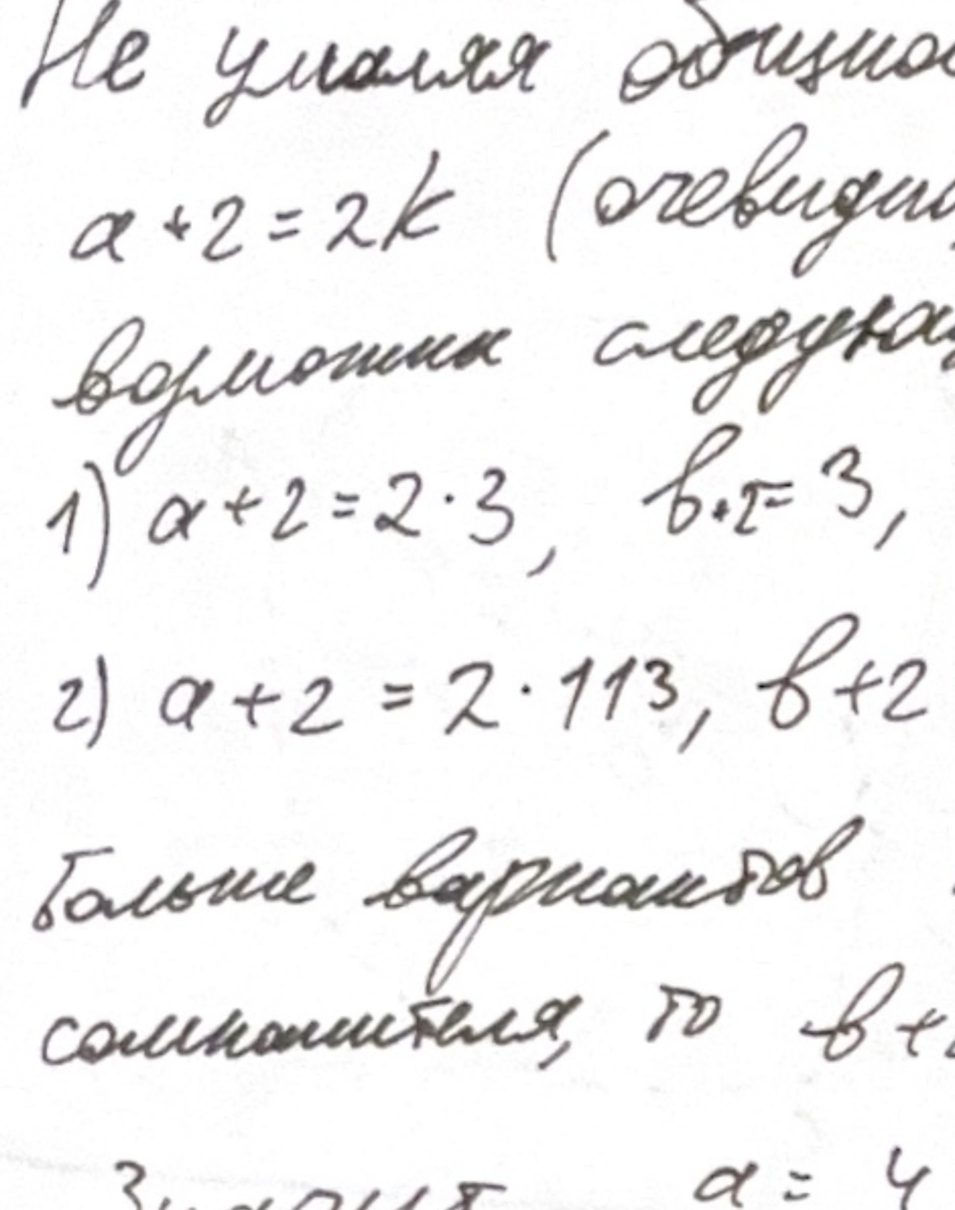
2) $a+2=2\cdot 113$, $b+2=3$, $c+2=3$ не подходит, $b=c$

Больше вариантов нет, т.к. если $a+2$ содержит ≥ 3 простых сомножителя, то $b+2$ или $c+2$ будет $=1$, противоречие.

Значит, $a=4$, $b=1$, $c=111$, и $abc=444$.

Ответ: 444.

№2



Очевидно, что чтобы условие выполнялось, какая-то сторона прямоуг. должна лежать на границе квадрата, а противоположная ей — нет, иначе распадётся на 2 части. Тогда, если ни одна вершина прямоуг. не

Чистовик 2

совпадает с угловыми вершинами квадрата, то 4 способами мы выбираем сторону, которой он „касается" квадрата, C_{100}^2 способами выбираем 2 узла на этой стороне (всего узлов 102, но 2 угловые $\Rightarrow 102-2=100$), а потом 100 способами выбираем „высоту" прямоуг., т.е. оставшиеся две вершины, т.к. высота может быть от 1 до 100.

А если какая-то клетка угловая, то 4 способами выбираем её, а затем 100^2 способами выбираем вершины 2 и 3, как на рисунке, среди всех $2\cdot 100$ обведенных клеток, выбирается автоматически.

последняя вершина

Итого, ответ: $4\cdot C_{100}^2\cdot 100 + 4\cdot 100^2 = 4\cdot\frac{100\cdot 99}{2}\cdot 100 + 4\cdot 100^2 =$

$= 4\cdot 100^2\cdot\left(\frac{99}{2}+1\right) = 4\cdot 100^2\cdot 50{,}5 = 202\cdot 100^2 = 202\cdot 10^4$.

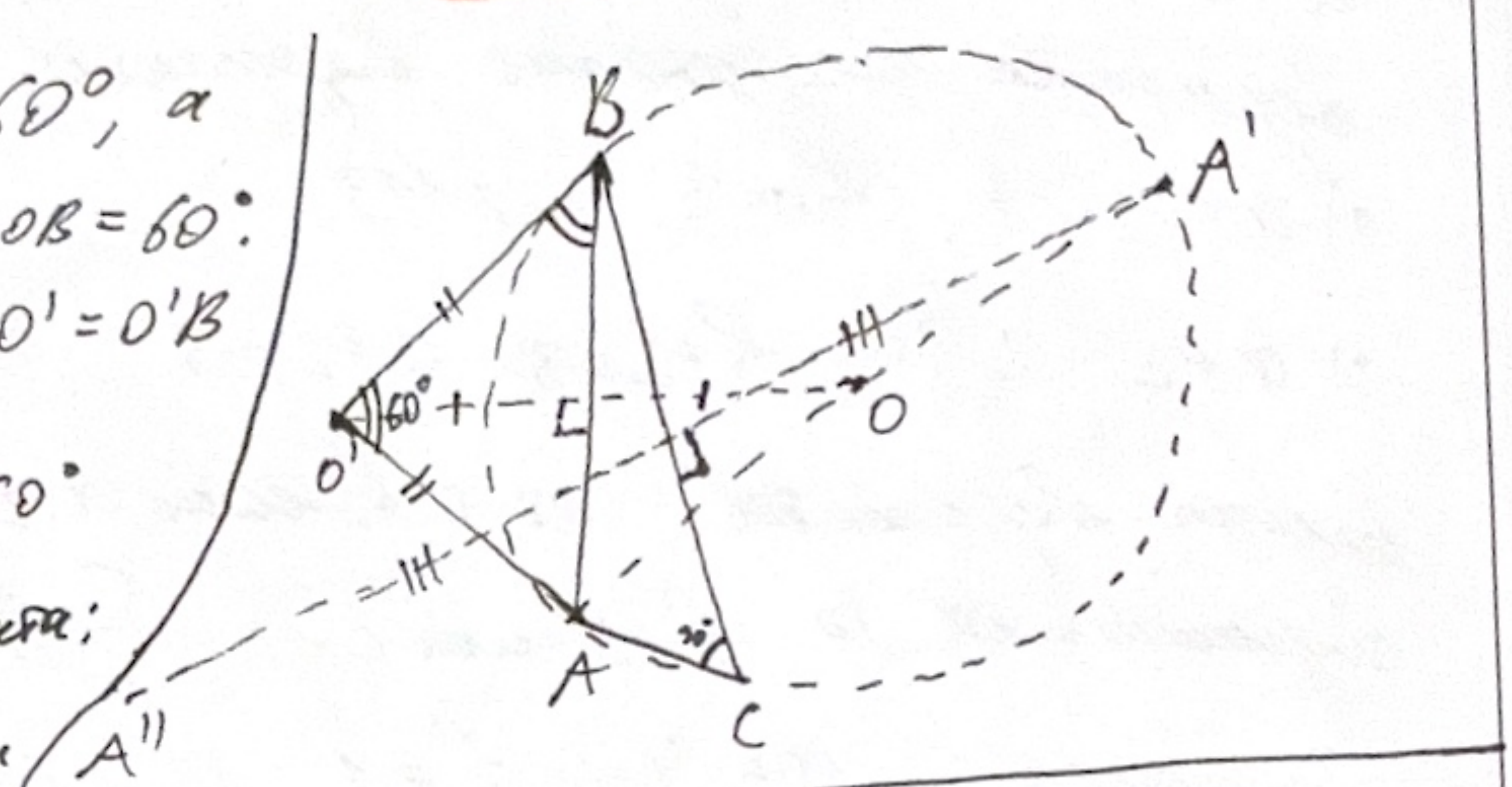
Ответ: $202\cdot 10^4$.

№3

$\angle C = 30^\circ \Rightarrow \angle AOB = 2\angle C = 60^\circ$, а по симметрии $\angle AO'B = \angle AOB = 60^\circ$.

$AO = OB \Rightarrow$ по симметрии $AO' = O'B$

$\Rightarrow \angle O'BC = \frac{180^\circ - \angle BO'C}{2} = 60^\circ$



Теперь возможны 2 варианта:

1) $\angle B$ острый. Тогда точки B и C лежат по разные стороны от AA'. А значит, A'' будет в той же полуплоскости относительно BC, что и A. Тогда, раз B, O', A'' лежат на одной прямой, $\angle O'BC = 60^\circ + \angle B = \angle A''BC =$

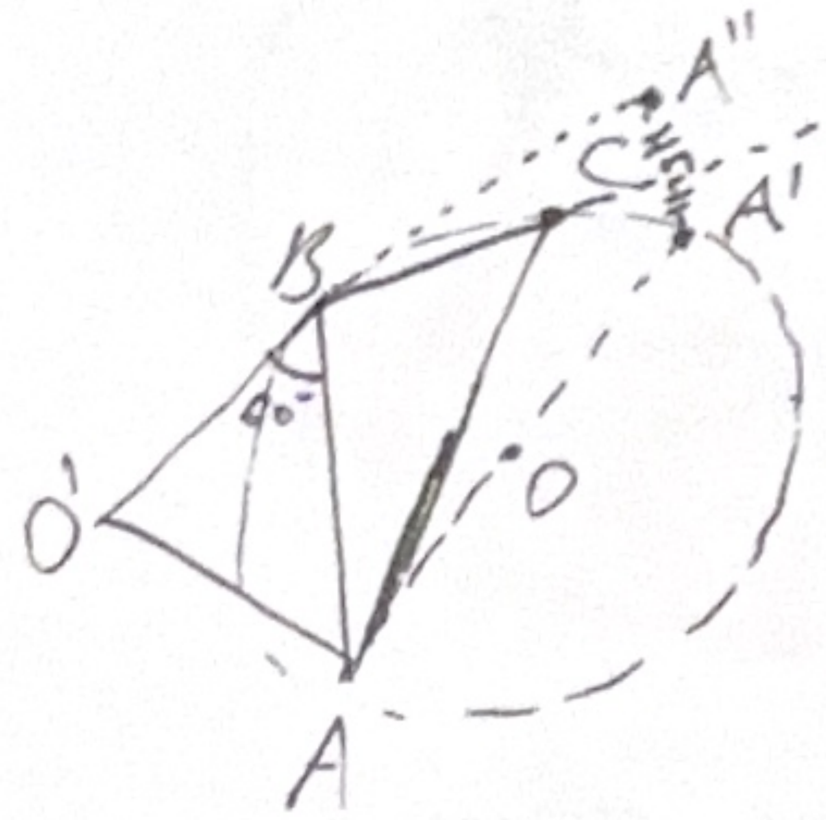
$= \angle A'BC$ (по симметрии) $= \angle A'AC = \angle OAC = \frac{180^\circ - \angle AOC}{2} =$

$= \frac{180^\circ - 2\angle B}{2} = 90^\circ - \angle B \Rightarrow 60^\circ + \angle B = 90^\circ - \angle B$, $\angle B = 15^\circ$.

75-42-53-79 (123.3)

Чистовик 3

2) $\angle B$ тупой. Тогда точки A и A'' будут лежать уже по разные стороны отн. BC $\Rightarrow$



$\Rightarrow O', B, A''$ на одн. прямой $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle A''BC + \angle CBO' = 180°$;

$\angle A''BC + \angle B + 60° = 180°$

$120° - \angle B = \angle A''BC = \angle A'BC = \angle A'AC =$

$= \angle OAC = \dfrac{180° - \angle AOC}{2} = \dfrac{180° - (360° - 2\angle B)}{2} =$

$= \angle B - 90° \Rightarrow 120° - \angle B = \angle B - 90°$; $\underline{\angle B = 105°}$.

Ответ: 15° или 105°.

№5

$0 < x, y, z < \frac{\pi}{2}$; $x + y + z = \frac{\pi}{2} \Rightarrow z = \frac{\pi}{2} - (x+y) \Rightarrow$

$\Rightarrow tgx\, tgy\, tgz = tgx\, tgy\, tg\left(\frac{\pi}{2} - (x+y)\right) = tgx\, tgy\, ctg(x+y) =$

$= \dfrac{tgx\, tgy}{tg(x+y)} = \dfrac{tgx\, tgy}{\frac{tgx + tgy}{1 - tgx\, tgy}} = \dfrac{tgx\, tgy\,(1 - tgx\, tgy)}{tgx + tgy}$, пусть

$tgx = a$, $tgy = b$: $\dfrac{ab(1-ab)}{a+b}$, раз мы хотим найти его максимум будем считать, что оно >0, т.е. что $ab < 1$, т.к. при $\forall x, y \in (0; \frac{\pi}{2})$: $a, b > 0$.

Тогда $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ по нер-ву о средних $\Rightarrow \dfrac{ab(1-ab)}{a+b} \leq$

$\leq \dfrac{ab(1-ab)}{2\sqrt{ab}} = \dfrac{\sqrt{ab}\,(1-ab)}{2}$, $\exists\, t = \sqrt{ab}$:

$\dfrac{t(1-t^2)}{2} = \dfrac{t - t^3}{2}$, р-рим производную: $\left(\dfrac{t-t^3}{2}\right)' = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2}t^2$,

она $= 0$ при $t = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$, причем очевидно, максимум — именно при $t = +\frac{\sqrt{3}}{3}$, а при $t = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ минимум, ведь при $t \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$: $\frac{1}{2} - \frac{3}{2}t^2 > 0 \Rightarrow$ от $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ до $+\frac{\sqrt{3}}{3}$ функция возрастает. Тогда $\dfrac{t - t^3}{2} \leq \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{3} - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3}{2} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{3\sqrt{3}}{27}}{2} =$

Чистовик 4

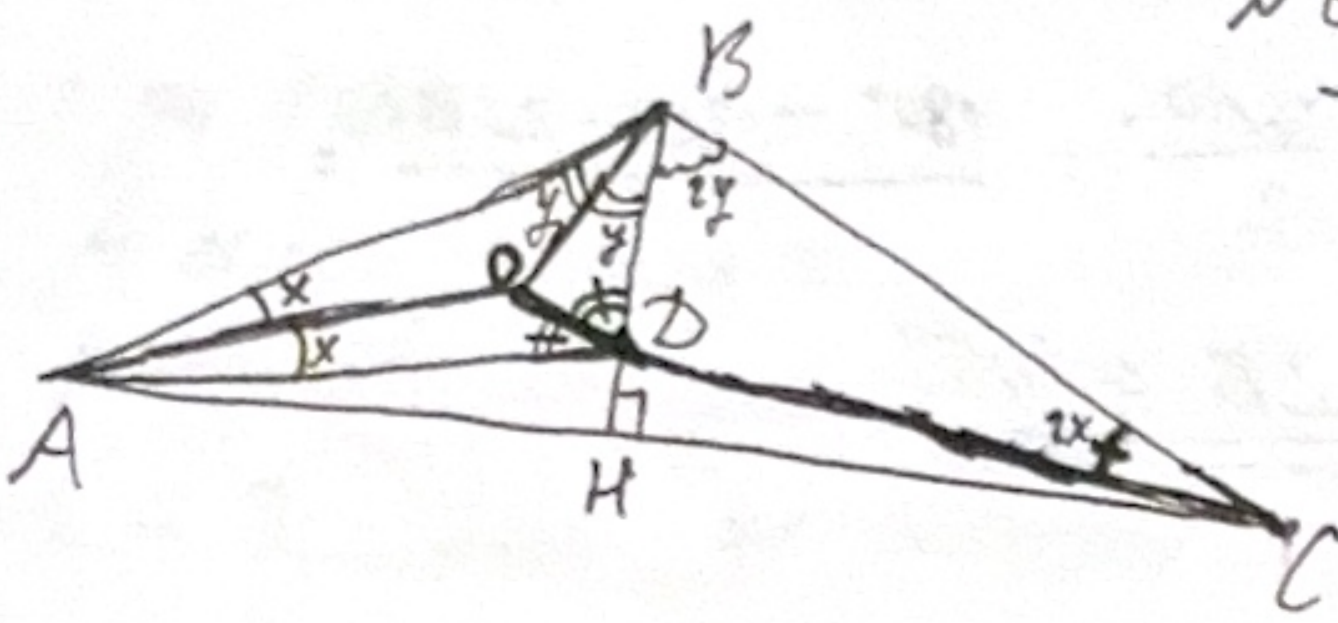
$= \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{9}}{2} = \dfrac{\frac{2\sqrt{3}}{9}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{9}$. Он достигается, например, при

$x = y = z = \frac{\pi}{6}$: $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z = \operatorname{tg}^3 \frac{\pi}{6} =$

$= \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{27} = \frac{\sqrt{3}}{9}$; $x + y + z = 3 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{9}$.

№6



Проведём высоту BH. Пусть $CO \cap BH = D$. Обозначим $\angle ABO = y \Rightarrow \angle OBC = 3y$; $\angle BAO = x \Rightarrow \angle BCO = 2x$.

Заметим, что т.к. $\triangle ABC$ равнобед., он симметричен относительно BH $\Rightarrow \angle DAB = \angle DCB = 2x \Rightarrow \angle DAO = \angle BAO = x$; $\angle ABC = 4y \Rightarrow \angle ABH = 2y \Rightarrow \angle ABO = \angle HBO = y \Rightarrow$ в $\triangle ABD$ т. O — центр впис. окружности $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ODB = \frac{1}{2}\angle ADB = \frac{1}{2}(\angle DAH + \angle DHA) = \frac{1}{2}(90° + 32° - 2x) =$ (т.к. внешний угол)

$= 61° - x$. Но при этом $\angle ODB = \angle DBC + \angle DCB =$ (опять внешний угол)

$= 2y + 2x \Rightarrow 61° - x = 2y + 2x$; $x = \frac{61° - 2y}{3}$; $4y = \angle ABC =$

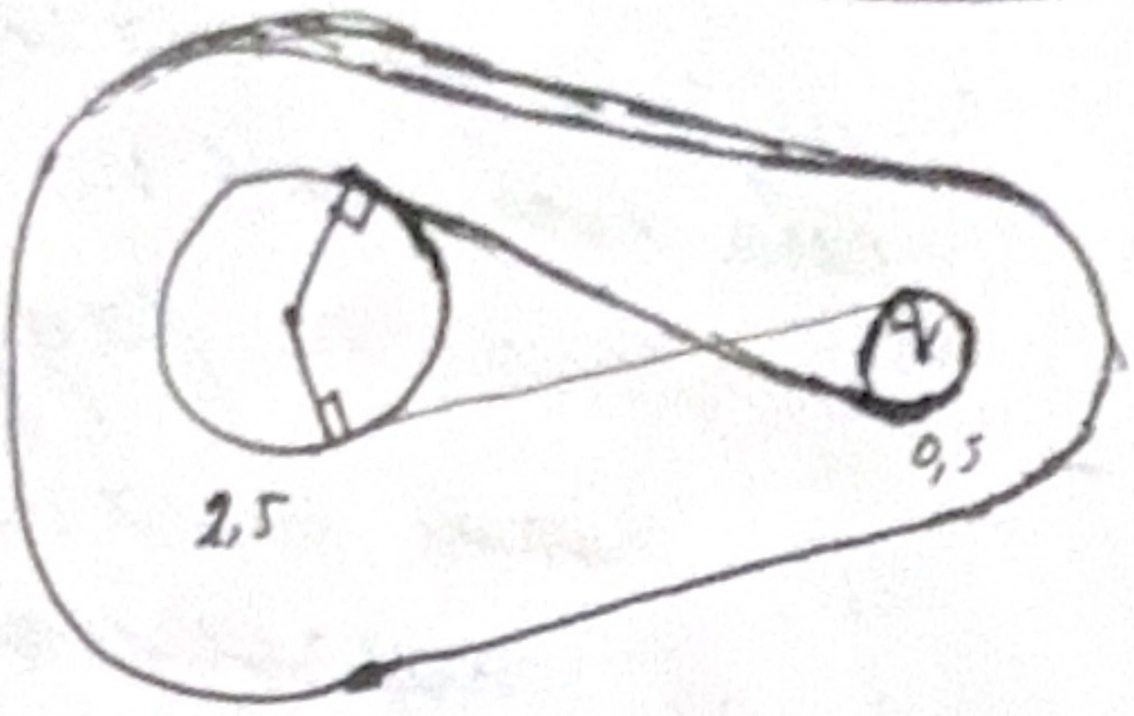
$= 180° - 2 \cdot 32° = 116° \Rightarrow y = 29° \Rightarrow 2y = 58° \Rightarrow x = \frac{61° - 58°}{3} = 1°$.

А тогда $\angle BOA = 180° - x - y = 180° - 1° - 29° = 150° \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\angle BOA}{\angle BAO} = \frac{150°}{1°} = 150$.

Ответ: 150.

Черновик



$t = a^x$

$t^2 - 3at + 2a^2 =$

$= (t-a)(t-2a)$

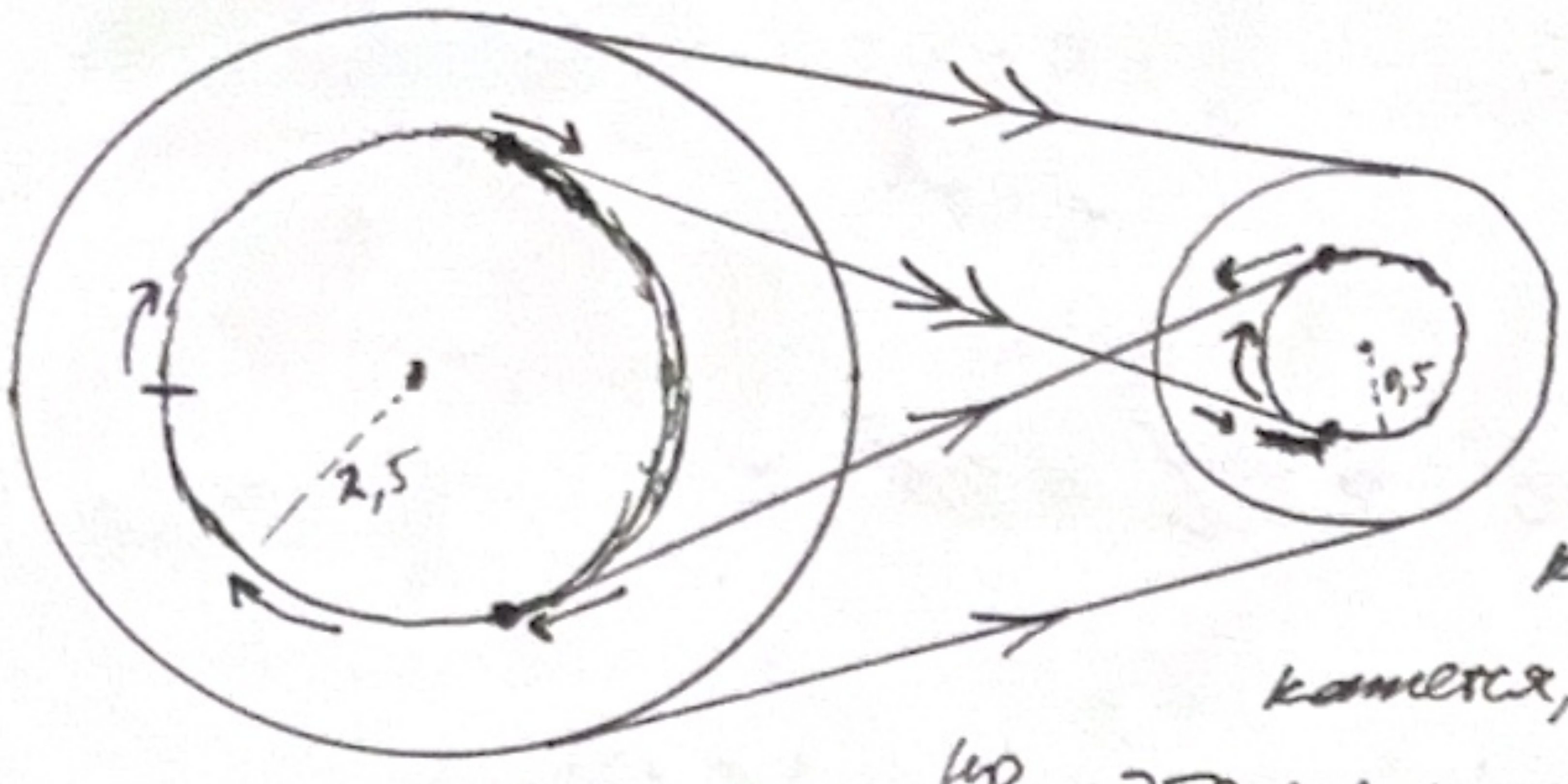
$$\frac{(a^x - a)(a^x - 2a)}{\log_2 a} \geq 0$$

Если a

$(2-1)(a-1)$

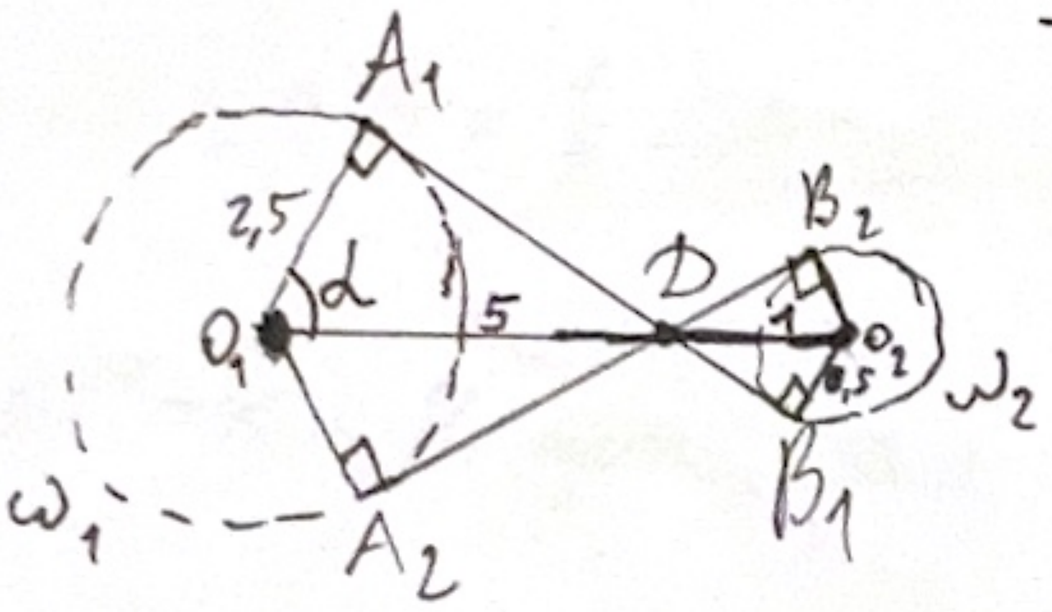
Чистовик 5

№7



Заметим, что сначала трава ложилась по дуге окружности радиуса 2,5, потом шла по прямой, параллельной касательной (на рисунке кажется, что они не параллельны, но это из-за несоответствия размеров, отмеченные „коллинеарные“ прямые на самом деле параллельны). Придёт на окружность радиуса 0,5 и пойдет по ней как показано стрелочками, ведь $1-1{,}5=-0{,}5$; эта окружность как бы „отрицательна“: след травы от косилки перелетит на её дальний кусок, как на рисунке:

А затем след пойдёт обратно по касательной и по внешней дуге большой окружности.



$\exists\, D = A_1B_1 \cap A_2B_2$. Очевидно, $\exists$ гомотетия с центром в D, переводящая ω_1 в ω_2 $\Rightarrow$ её коэф. равен $\frac{0{,}5}{2{,}5}=\frac{1}{5}$.

O_1 переходит в O_2 $\Rightarrow \frac{O_2D}{O_1D}=\frac{1}{5}$; $O_1O_2=6 \Rightarrow$

$\Rightarrow O_2D=1$; $O_1D=5$. Тогда $\cos\alpha=\frac{2{,}5}{5}=\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha=60^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle A_1O_1A_2=\angle B_1O_2B_2=2\cdot 60^\circ=120^\circ \Rightarrow \cup A_1A_2=\cup B_1B_2=120^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow |\cup A_1A_2|=\frac{120^\circ}{360^\circ}\cdot 2\pi\cdot 2{,}5=\frac{5}{3}\pi$; $|\cup B_1B_2|=\frac{120^\circ}{360^\circ}\cdot 2\pi\cdot 0{,}5=\frac{1}{3}\pi$;

$A_1D=O_1D\cdot\sin\alpha$; $B_1D=O_2D\cdot\sin\alpha \Rightarrow A_1B_1=O_1O_2\sin\alpha=6\cdot\frac{\sqrt3}{2}=3\sqrt3 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ суммарная длина $S=\frac{5}{3}\pi+\frac{1}{3}\pi+2\cdot 3\sqrt3=2\pi+6\sqrt3$.

Ответ: $2\pi+6\sqrt3$.

Чистовик 6

№4

ОГРАНИЧЕНИЯ: $a \neq 1$; $a > 0$

т.к. в знаменателе $\log_2 a$

$$\frac{a^{2x}-3a^{x+1}+2a^2}{\log_2 a} = \frac{a^{2x}-2a^{x+1}-a^{x+1}+2a^2}{\log_2 a} =$$

$$= \frac{a^x(a^x-2a)-a(a^x-2a)}{\log_2 a} = \frac{(a^x-a)(a^x-2a)}{\log_2 a} \geq 0$$

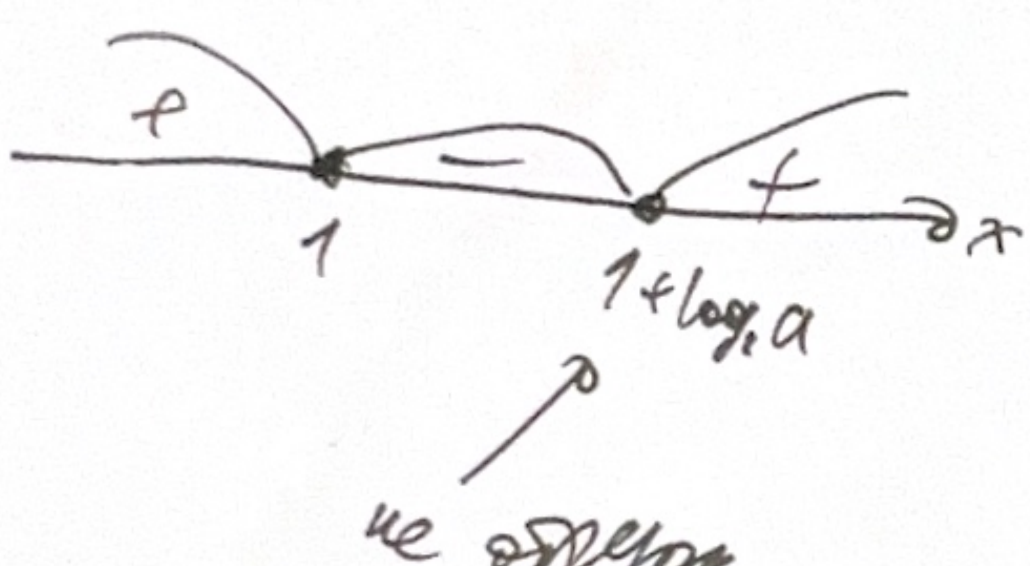
~~По методу рацио~~ Заметим, что $\log_2 a$ имеет тот же знак, что и $(a-1)$; $a^x - a$ имеет тот же знак, что и $(a-1)(x-1)$ (учитывая ОГР) по методу рационализации, и $a^x - 2a$ имеет тот же знак, что и $(a-1)(x-1-\log_2 a)$ (учитывая ОГР).

Тогда: $\dfrac{(a-1)(x-1)\cancel{(a-1)}(x-1-\log_2 a)}{\cancel{(a-1)}} \geq 0$

~~$(a-1)^2 \geq 0$ На: $\dfrac{(x-1)(x-(1+\log_2 a))}{a-1} \geq 0$~~

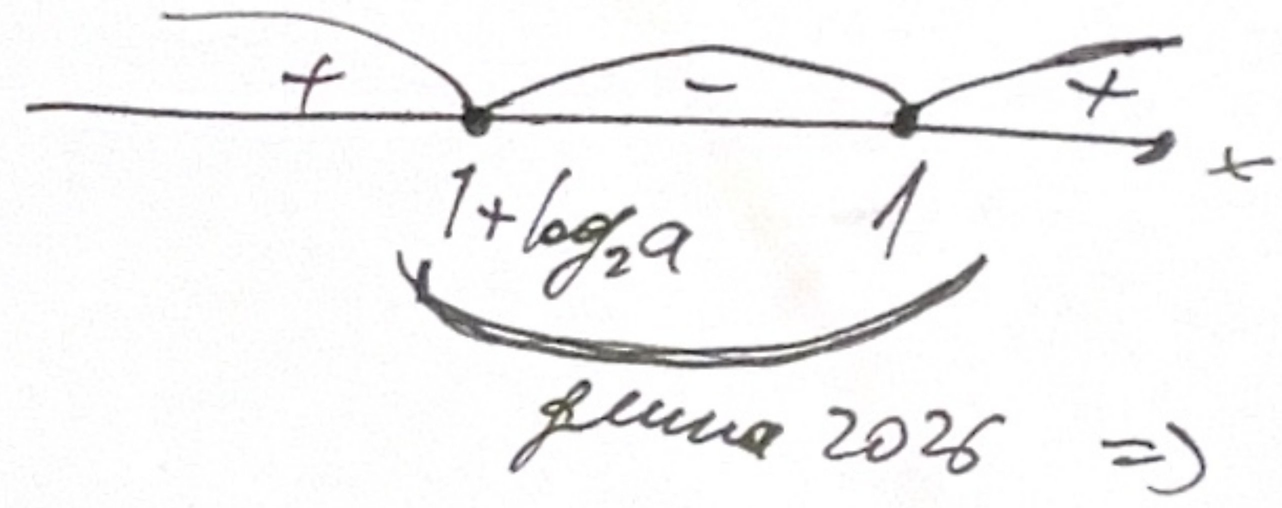
$(a-1)(x-1)(x-1-\log_2 a) \geq 0$

Если $a > 1$: то $\log_2 a > 0$:



Если $a<1$, то $\log < 0$:

$(x-1)(x-1-\log) \leq 0$



$\Rightarrow 1-(1+\log_2 a) = 2026$

$\log_2 a = -2026$

$\boxed{a = 2^{-2026}}$ <1 и удовл. ОГР.

Ответ: при $a = 2^{-2026}$.