0 520295 290001

62-02-95-29
(124.25)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11 класс 7

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Белкина Артёма Павловича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«29» марта 2026 года

Подпись участника
БА

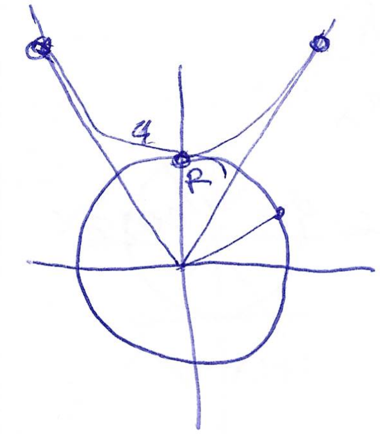
62-02-95-29
(124.25)

черновик

$3(1-ctg^2x) = 8\cos^2 x$ $ctg\,x = \frac{\cos x}{\sin x}$

$3(\sin^2 x - \cos^2 x) = 8\cos^2 x \sin^2 x$

$-3\cos 2x = 4\sin^2 2x = 4 - 4\cos^2 2x$



$y = ax^2 + R$ $(0, R)$

кас. $y = tg\,60^\circ x +$

$\frac{\sin 60}{\cos 60}$ $\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

$\begin{cases} y = ax^2 + R \\ y = \sqrt{3}x \end{cases}$ 1 реш.

$\left(\sqrt{\frac{a-b}{2}}, \frac{a+b}{2}\right)$

$\left(\sqrt{\frac{a+1-b}{2}}, \frac{a+1+b}{2}\right)$ $\left(\sqrt{\frac{a-b-1}{2}}, \frac{a+b+1}{2}\right)$

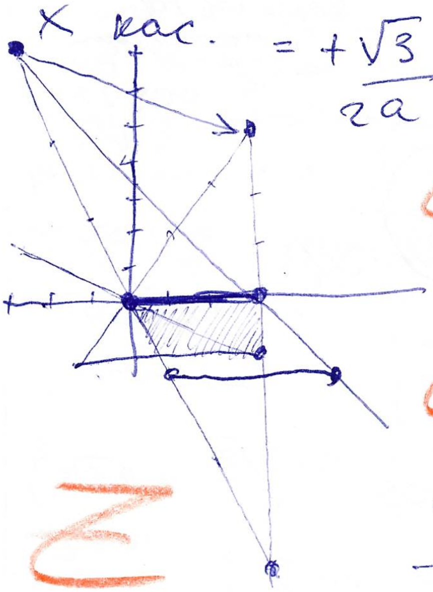
$ax^2 - \sqrt{3}x + R = 0$ $\left(\sqrt{\frac{a-b}{2}}, \frac{a+b}{2}\right)$

$D = 3 - 4aR = 0$ $aR = \frac{3}{4}$

x кас. $= +\frac{\sqrt{3}}{2a}$

$\frac{\sqrt{3}}{a} = 1 \Rightarrow a = \sqrt{3}$

$R = \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{3}}$

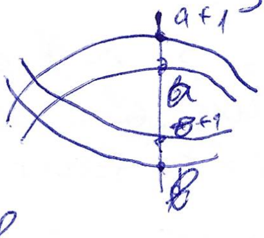


$11^2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 10^2 \cdot \frac{1}{2}$

$121 \cdot 100 \cdot 3 = 300 \cdot 121$

121
33
33
66
33
3993

36300



$y = x^2 + b$
$y = -x^2 + a$

$x^2 = \frac{a-b}{2}$ $x = \pm\sqrt{\frac{a-b}{2}}$ $y = \frac{a+b}{2}$

чистовик

№ 1

$\sqrt{3(1-ctg^2x)} = 2\sqrt{2}\cos x \quad \Rightarrow \cos x > 0$

$\sin x \neq 0$

$3(1-ctg^2x) = 8\cos^2 x$

$1-\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$

$3(\sin^2 x - \cos^2 x) = 8\cos^2 x \sin^2 x$

$3(-\cos(2x)) = 4\sin^2 2x = 4 - 4\cos^2 2x$

$4\cos^2 2x - 3\cos 2x - 4 = 0$

Пусть $t = \cos 2x$

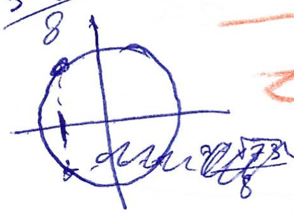
$4t^2 - 3t - 4 = 0$

$D = 9 + 64 = 73$

$t = \dfrac{3 \pm \sqrt{73}}{8}$

$\dfrac{3+\sqrt{73}}{8} > \dfrac{3+\sqrt{64}}{8} = \dfrac{3+8}{8} > 1$ – этот корень не подходит т.к $\cos 2x < 1$ $\forall x$

Получаем систему



$\begin{cases} \cos x > 0 \\ \cos 2x = \dfrac{3-\sqrt{73}}{8} < 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases}$

$\cos x > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) \quad k \in \mathbb{Z}$

$2x \in (-\pi + 4\pi k, \pi + 4\pi k)$

$\cos 2x = \dfrac{3-\sqrt{73}}{8} \Rightarrow 2x \in \left\{\pm \cancel{\tfrac{1}{2}} \arccos \dfrac{3-\sqrt{73}}{8} + 2\pi k\right\}$ $k \in \mathbb{Z}$

$\sin x \neq 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi k, k \in \mathbb{Z}\}$

пересекая мн-ва получим ~~ответ~~:

$2x \in \left\{\pm \arccos \dfrac{3-\sqrt{73}}{8} + 4\pi k\right\}$

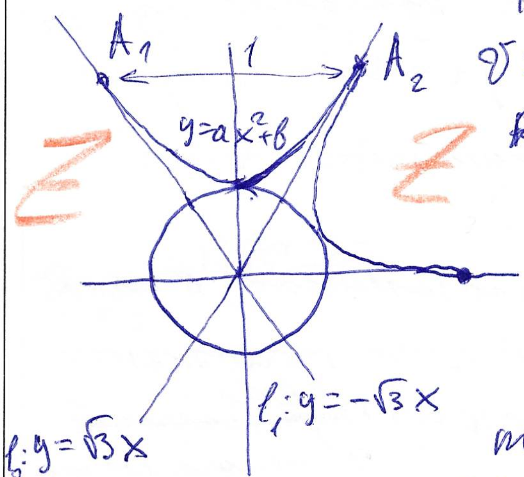
Ответ: $x \in \left\{\pm \frac{1}{2}\arccos \dfrac{3-\sqrt{73}}{8} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}\right\}$

62-02-95-29 (124.25)

Чистовик №5

Пусть радиус окр. равен R

Введем декартовы коорд. с центром в центре этой окр. чтобы ~~уравнени~~ одна из парабол была симметрична относительно Oy.



Тогда она задается уравнением $\gamma: y = ax^2+b$

~~Rx~~ Рассмотрим точку A_2 её касания с параболой которая идет за ней по часовой стрелке. ~~Пусть~~ Проведем в A_2 общую касательную l_2 к этим параболам. тогда они симметричны относительно её значит l_2 проходит через центр окр-ти.

пусть l_2 задается уравнением $y = tg\alpha\ x$

Т.к шестиугольник из условия равносторонний $\alpha = 60°$ значит $l_2 : y = \sqrt{3}x$. Пусть A_1 точка касания $y=ax^2+b$ со второй касательной l_1 проходящей через $(0,0)$ тогда она совпадает с точкой касания с параболой которая идет против часовой стрелке после $y=ax^2+b$.

В силу симметрии y-коорд. A_1 и A_2 совпадают. значит т.к $dist(A_1, A_2) = 1$ (по условию) то x коорд. A_2 равна 0.5. Из условия касания γ и l_2:

$\begin{cases} y = ax^2+b \\ y = \sqrt{3}x \end{cases}$ имеет ровно 1 решение

$ax^2 - \sqrt{3}x + b = 0 \quad 0 = D = 3 - 4ab \Rightarrow b = \frac{3}{4a}$

$x_{касания} = \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+0}{2a} \Rightarrow a = \sqrt{3} \Rightarrow b = \frac{\sqrt{3}}{4}$

В силу симметрии и ур-ия $y = ax^2+b$ точка $(0,b)$ является точкой касания вниз окр-ти и γ. Значит радиус равен b

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{4}$

Чистовик №3

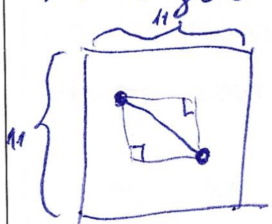
Точки из условия задают куб со стороной содержащей $11^{=5\cdot 2+1}$ точек. ~~Из условия следует~~

Т.к катеты треугольников $\parallel$ осям координат каждый лежит в плоскости которая пар-на Oyx, Oyz, Oxz и при том ровно в одной.

Вариантов выбрать такую плоскость

$3\cdot 11 = 33$

Теперь найдем кол-во треугольников в одной такой плоскости. Заметим что положение концов гипотенузы задают ~~треугольник~~ ровно ~~с точн~~ 2 треугольника (см. рис)

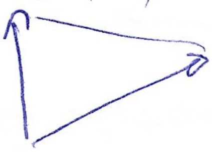


Но просто 2 любые точки из плоскости могут задавать вырожденный треугольник, поэтому корректность задания 2ух треугольников ~~точками~~ концами общей гипотенузы равносильна тому, что они не лежат ни в 1 строке ни в 1 столбце. Кол-во вариантов выбрать первую точку 11^2, тогда вторую 10^2.

Значит число треугольников лежащих в 1 такой плоскости равно $\frac{11^2\cdot 10^2}{2}\cdot 2$. Значит всего искомых в задаче треугольников равно $11^2\cdot 10^2\cdot 33 = 12100\cdot 33 = 399300$

Ответ: 399300

черновик



$S = \frac{1}{2}(ad - bc)$

$S_1 = \frac{1}{2}\left(\left(\sqrt{\frac{a+1-b}{2}} - \sqrt{\frac{a-b}{2}}\right)(1) - \frac{1}{2}(0)\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a-b+1}{2}} - \sqrt{\frac{a-b}{2}}\right)$

$S_2 = \frac{1}{2}\left(0 - 1\cdot\left(\sqrt{\frac{a-b}{2}} + \sqrt{\frac{a-b-1}{2}}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a-b}{2}} - \sqrt{\frac{a-b-1}{2}}\right)$

$S_{общ} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a-b+1}{2}} - \sqrt{\frac{a-b-1}{2}}\right)$

$4S^2 = \cancel{\frac{1}{2}}\underbrace{\frac{a-b+1-a+b+1}{2}}_{=1} - \cancel{2}\sqrt{(a-b+1)(a-b-1)}$

$(4S^2 - 1)^2 = (a-b+1)(a-b-1) = (a-b)^2 - 1$

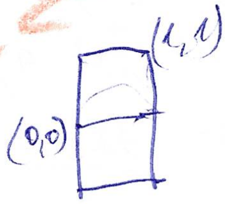
$A \vdots 81$ $\quad S_a \in \{9, 18, 27\}$ $\to 999 \vdots 81$

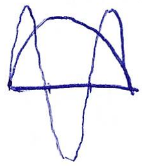
2	162
3	243
4	324
5	405
6	486
7	567
8	648
9	729
10	810
11	891
12	972

$13 \cdot 81$

81
243
81
1053

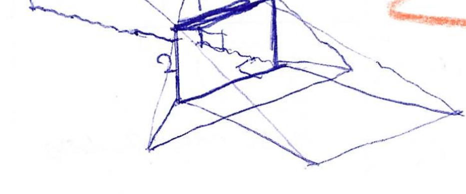
+810
~~243~~
1053
486
1539





14

$\sin 13\pi x - \sin 15\pi x = -2\cos\frac{28}{2}\sin\frac{2\pi x}{2}$

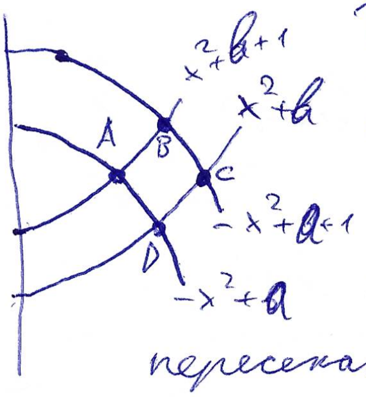


Чистовик №7

Будем называть параболы „одного знака" если у них ветви направлены в 1 сторону.

Заметим что $\forall$ клетке ~~ген прямоугольных полученной~~ ~~Вовой~~ образована двумя параболами 1 знака и 2-мя другого. ~~Действительно~~, причем если их уравнения это ~~а~~ x^2+b, x^2+c, $-x^2+a$, $-x^2+d$

где $b<c<a<d$ то $c=b+1$, а $d=a+1$ иначе в эту клетку входит полностью клетка для которой это соотношение выполняется.



Теперь найдем координаты вершин такой клетки. Для удобства будем работать в правой половине листа, т.к лист симметричен относительно Oy.

Параболы x^2+p и $-x^2+q$ где $p<q$ пересекаются в точках:

$$x^2+p=-x^2+q \Rightarrow x^2=\frac{q-p}{2} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{q-p}{2}}$$

$$y=x^2+p=\frac{q+p}{2}$$

получаем точки $\left(\pm\sqrt{\frac{q-p}{2}};\ \frac{q+p}{2}\right)$

Значит наши параболы x^2+a+1, x^2+a, $-x^2+b+1$, $-x^2+b$ пересекаются в точках ~~а>в~~ $a>b$

$A=\left(\sqrt{\frac{a-b-1}{2}};\ \frac{a+b}{2}\right)$ $B=\left(\sqrt{\frac{a-b}{2}};\ \frac{a+b+1}{2}\right)$ $C=\left(\sqrt{\frac{a-b+1}{2}};\ \frac{a+b}{2}\right)$

$D=\left(\sqrt{\frac{a-b}{2}};\ \frac{a+b-1}{2}\right)$. Заметим, что $AC \parallel Ox$ $BD \parallel Oy$ значит $ABCD$ это дельтоид, значит его площадь равна $\frac{AC\cdot BD}{2}$

$$AC=\sqrt{\frac{a-b+1}{2}}-\sqrt{\frac{a-b-1}{2}} \quad BD=1$$

$$2S_{ABCD}=\sqrt{\frac{a-b+1}{2}}-\sqrt{\frac{a-b-1}{2}} \Rightarrow 2S_{ABCD}=\sqrt{1-2\sqrt{(a-b+1)(a-b-1)}}$$

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}\sqrt{1-2\sqrt{(a-b)^2-1}}$$ то есть S_{ABCD} максимально, когда $a-b$ минимально, но $a>b$ значит $a-b\geq 1$

$$S_{ABCD\,max}=\frac{1}{2}\sqrt{1-0}=\frac{1}{2}$$

~~чер~~ чистовик

Такой четырехугольник существует, т. к

$0 < A_x < B_x = D_x < C_x = \sqrt{\frac{a-b+1}{2}} = 1 < \frac{29,7}{2}$

$B_y < A_y = C_y < B_y = \frac{a+b+1}{2}$

$\parallel$

$\frac{a+b-1}{2}$ если взять $a=1$, $b=0$ то

$\frac{a+b+1}{2} = 1$ $\frac{a+b-1}{2} = 0$ оба числа $< \frac{21,0}{2}$

Ответ: $\frac{1}{2}$

№2

Обозначим $S(x)$ сумму цифр числа $x \in \mathbb{N}$

если $\frac{x}{S(x)} \vdots 9$ то $x \vdots 9$, но тогда по признаку делимости на 9 $S(x) \vdots 9$, значит

$x \vdots 81$. $\Rightarrow x = 81k$, $k > 1$ т. к 81 двузначное

$k < 13$ т. к $13 \cdot 81 = 1053$ - четырехзначное.

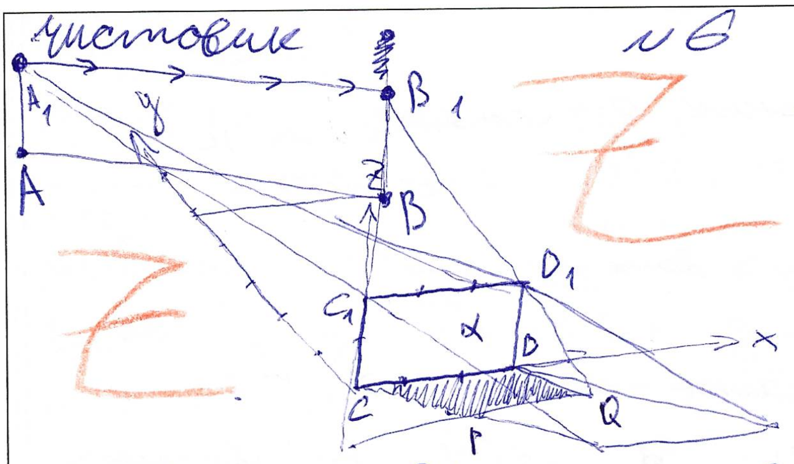
То есть $A \subset \{81k,\ k \in \mathbb{Z},\ 1 \le k \le 12\}$ Переберем их все:

k	x	S(x)	$\frac{x}{S(x)}$	подходит?
2	162	9	18	да
3	243	9	27	да
4	~~342~~ 324	9	36	да
5	405	9	45	да
6	486	18	27	да
7	567	18	не делится	нет
8	648	18	36	да
9	729	18	не делится	нет
10	810	9	90	да
11	891	18	не делится	нет
12	972	18	54	да

Ответ: $A = \{162, 243, 324, 405, 486, 648, 810, 972\}$

$S_{2,5,7} = 1539$

чистовик №6



$A=(-3,7,0)$
$A_1=(-3,7,6)$
$B=(3,5,0)$
$B_1=(3,5,6)$
$C=(0,0,0)$
$C_1=(0,0,2)$
$D=(3,0,0)$
$D_1=(3,0,2)$

рассмотрим 3мерное пр-во где плоскость Oyx совпадает с пл-ю из условия. Пусть C и D это концы забора. Пусть A_1 точка старта светлячка, B_1 — ~~финиша~~. C_1 и D_1 — верхние углы забора. Пусть $F(X)$ это проекция полуплоскости C_1D_1C содерж C не на границе ~~на~~ на Oxy из точки X.

Пусть $g(X)$ — аналогично но для полуплоскости CC_1D где D не лежит на границе

Пусть $e(X)$ — аналогично но для полуплоскости DD_1C, где C не лежит на границе.

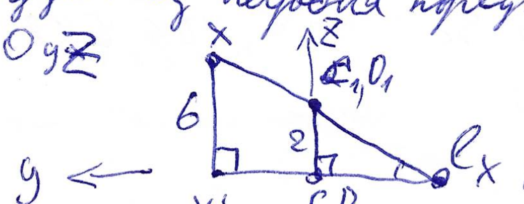
Тогда если муха стоит в точке X, то тень от забора это пересечение $g(X)\cap e(X)\cap F(X)\cap\{z=0, y\le 0\}$ так как тень — это пересечение конуса с основанием CC_1D_1D с вершиной в X с Oxy, а оно как раз проекциями плоскостей и задается.

Рассмотрим $F(X) = l_x$ если C_1D_1 переходит в l_x то ~~dist~~ $l_x \parallel Ox$ т.к $C_1D_1 \parallel Ox$ ~~значит dist плоскость~~ пусть $\alpha :=$ плоскость CC_1D_1D тогда

$$\frac{dist(\alpha, l_x)}{dist(X', \alpha)} = \frac{dist(l_x, C_1D_1)}{dist(X, C_1D_1)}$$

где X' — проекция X на Oxy

это следует из подобия треугольников при проекции на пл-ть Oyz



$$\frac{dist(X', l_x)}{dist(Ox, l)} = \frac{6}{2}$$

Отсюда следует что если $dist(X', \alpha)$ уменьшается, то уменьшается и $dist(l_X, \alpha) = dist(l_X, CD)$

значит $\bigcap\limits_{X \in A_1B_1} f(X) = f(B_1)$. то есть ~~граничные~~ пересечение задается граничными точками, аналогичные рассуждения можно провести и для ~~...~~ функций e, g.

Значит нам нужно ~~...~~ найти $f(A_1) \cap f(B_1) \cap g(A_1) \cap g(B_1) \cap e(A_1) \cap e(B_1)$. ~~...~~ $\bigcap \underbrace{\{z=0, y<0\}}_{\beta}$

Заметим что $\underbrace{\{z=0, y<0\}}_{\beta} \cap g(A_1) \cap g(B_1) = g(A_1) \cap \beta$

$\beta \cap e(A_1) \cap e(B_1) = \beta \cap e(B_1)$

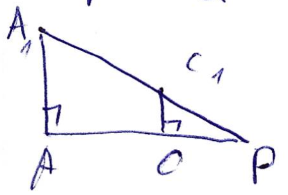
$\beta \cap f(A_1) \cap f(B_1) = \beta \cap f(B_1)$

Значит искомая ~~...~~ площадь это четырехугольник ~~образованный~~ $e(B_1) \cap f(B_1) \cap g(A_1) \cap \beta$ пусть его вершины это $CDPQ$ (см рис)

$PQ \parallel CD$ это мы уже доказывали в св-ах $f(X)$

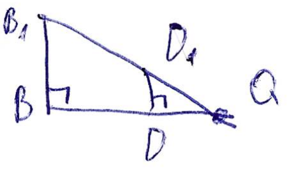
$h = dist(B, CD)$. $\quad \frac{D_1D}{B_1B - D_1D} = \frac{5}{1} \cdot \frac{2}{6-2} = \frac{5}{2}$

$CD = 3$ (из усл.)



$P = (1.5, -\frac{5}{2})$

$Q = (3, -\frac{5}{2})$ получено из подобия



$PQ = 1.5$

$CDPQ$ - трапеция значит

$S_{CDPQ} = \frac{CD + PQ}{2} \cdot h = \frac{5}{2} \cdot \frac{9}{4} = \frac{45}{8}$

Ответ: $\frac{45}{8}$