0 567324 050000

56-73-24-05
(124.6)

1755

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 1

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Белогрудевой Алины Александровны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«29» марта 2026 года

Подпись участника

56-73-24-05 (124.6)

 100 (сто) Андреева

Черновик

162 243 324
405 485 567
648
729
810
891
972

$\sqrt{6(1-tg^2x)} = 4\sin x \quad \uparrow^2$

$6(1-tg^2x) = 16\sin^2x$

$6-6tg^2x = 16\sin^2x$

$tg^2x = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 \qquad \sin^2x = 1-\cos^2x$

$(1-\cos^2x)$

45

117

$6-6tg^2x-16\sin^2x=0 \;|\cdot\cos x$

$6-6\left(\frac{\sin^2x}{\cos^2x}\right)-16\sin^2x=0 \;|:\sin x$

$\frac{6}{\sin x} - 6\frac{\sin x}{\cos^2x} - 16\sin x \qquad 6-6\frac{tg^2x}{\cos x}\cdot\cos x - 16tgx\cdot$

$6-6tg^2x = 16-16\cos^2x \qquad tgx=\frac{\sin x}{\cos x} \;|\cdot\cos^2x$

$6\cos^2x-6\sin^2x = 16\cos^2x-16\cos^4x$

$6(\cos^2x-\sin^2x) = 16\cos^2x(1-\cos^2x)$

А:

натур. числа:

x – число

z – сумма цифр

$\frac{x}{z} = y \;(\text{mod } g)$

треугольник Паскаля

$6\cos2x = 16\cos^2x\cdot\sin^2x \qquad \sin^2x$

$6(2\cos^2x-1) = 16\cos^2x\cdot\sin^2x$

$12\cos^2x-6 = 16\cos^2x\cdot\sin^2x$

$16\cos^2x\cdot\sin^2x\neq0$

$\sin^2x\neq0$

$16\cos^2x\neq0$

$\left[\begin{array}{l}\sin^2x\neq0\\ \cos^2x\neq0\end{array}\right.$

$9\cdot3=27$

$9\cdot4=36$

$12\cos^2x-6=0$

$6(2\cos^2x-1)=0$

$2\cos^2x=1$

$\cos^2x=\frac12$

$\cos x=\pm\frac{\sqrt2}{2}$

$x=\pm\arccos\frac{\sqrt2}{2}$

126

$18:9=2$

$\frac{x}{z} = y$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

999

108

27

$9:9$

$9\cdot y = 85$

$18:9$

$\frac{x}{z} = 9$

1396

144

$18:9=2$

153

162

$9\cdot11=99$

81

$9\cdot8=72$

$9\cdot9=81$

$9\cdot10=80$

$9\cdot7=63$

$9\cdot5=45$

$9\cdot12=$

$9\cdot6=54$

891

972

117

153

72

108

567

324

32

40

810

486

$+54+2=56$

$45+3=48$

Черновик

F – кол-во точек
координаты – целые числа
≡ (mod 4)

(4 ; 4)

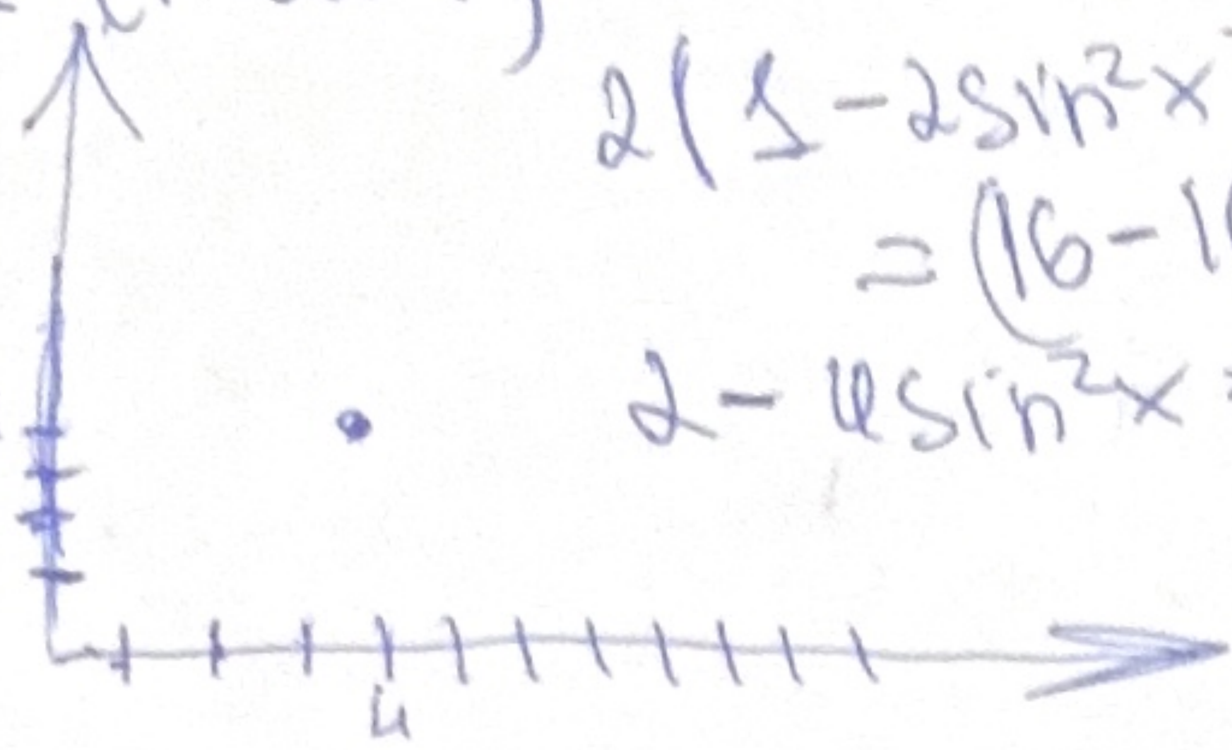
$2(1-2\sin^2 x) =$
$= (16-16\sin^2 x)\cdot\sin^2 x$

$0 \le x \le 1 \quad -1 \le y \le 1$

$2-4\sin^2 x = 16\cdot\sin 2x$

$y = \sin k\pi x$

$k \in \{13; 15; 17\}$



$2(2(1-\sin^2 x)-1) = 16(1-\sin^2 x)\cdot\sin^2 x$

$2(2-2\sin^2 x-1) = 16$

$\sin x = \pm\sqrt{\frac{1}{4}}$

$\sin x = \pm\frac{1}{2}$

$b^2 - 4ac$

14×14, 56, 14, 166, 206

14×14, 56, 14, 196

$196 - 4\cdot 8\cdot 3$

$12 \times 8 = 96$

$\frac{24}{16}$

$24 \,|\, 16$, 16, 8, $1\frac{8}{16} = 1\frac{1}{2}$

$8x^2\log_a x - \log_x a - 2x \le 0$

$8x^2\log_a x - \frac{1}{\log_a x} - 2x \le 0$

Зп: $\log_a x = t$

$8x^2\cdot t - \frac{1}{t} - 2x \le 0 \;|\cdot t$ $\quad \frac{3}{2}$

$8x^2\cdot t^2 - 1 - 2xt \le 0$

$8x^2\cdot t^2 - 2xt - 1 \le 0$

$b^2 - 4ac$

$4x^2 + 4\cdot 8x^2 = 4x^2 + 32x^2 = 36x^2$

$\frac{1}{\log_x a} \ge -\frac{1}{4x}$ $\quad \log_x a \ge -4x$ $\quad a \ge x^{-4x}$

56-73-24-05 (124.6)

Чистовик

№1

$\sqrt{6(1-tg^2x)} = 4\sin x \;|^2$; $6(1-tg^2x)=16\sin^2x$

$6(1-tg^2x)=16(1-\cos^2x)$; $6-6tg^2x=16-16\cos^2x \;|\cdot\cos^2x$

$6\cos^2x-6\sin^2x=16\cos^2x-16\cos^4x$; $6(\cos^2x-\sin^2x)=16\cos^2x(1-\cos^2x)$

$6\cos 2x=16\cos^2x\cdot\sin^2x$; $6(2\cos^2x-1)=16\cos^2x\cdot\sin^2x$;

~~$12\cos^2x-6=(16\cos^2x\cdot\sin^2x)$~~ $|$ ~~$?(16\cos^2x\cdot\sin^2x)$~~ $\neq 0$

$6(2(1-\sin^2x)-1)=16(1-\sin^2x)\cdot\sin^2x$ $\left[\begin{array}{l}\cos x\neq 0\\ \sin x\neq 0\end{array}\right.$

$6(2-2\sin^2x-1)=16\sin^2x-16\sin^4x$

$6(1-2\sin^2x)=16\sin^2x-16\sin^4x$

$6-12\sin^2x=16\sin^2x-16\sin^4x$ ЗП: $\sin^2x=t$

$16\sin^4x-28\sin^2x+6=0 \;|:2$

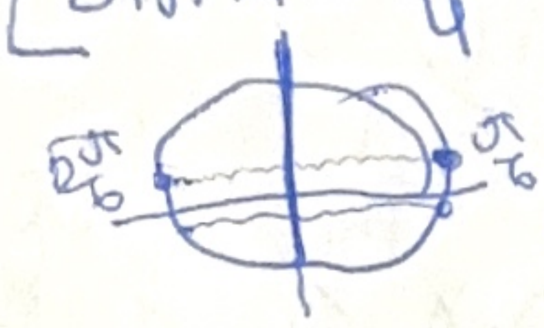
$8\sin^4x-14\sin^2x+3=0 \iff 8t^2-14t+3=0$

$D=b^2-4ac=196-4\cdot3\cdot8=196-96=100$

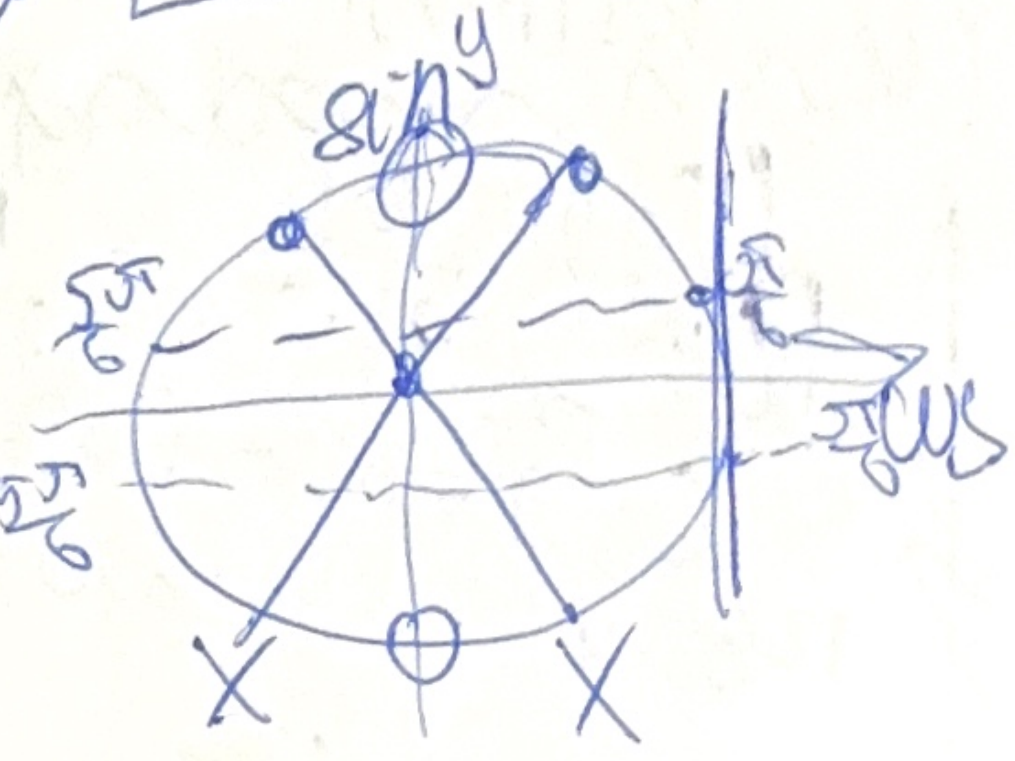
$t_1=\frac{14+10}{16}=1\frac{1}{2}$

$t_2=\frac{14-10}{16}=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$

ОЗП: $\left[\begin{array}{l}\sin^2x=\frac{3}{2}\\ \sin^2x=\frac{1}{4}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\cancel{x=\pm\arcsin\sqrt{\frac{3}{2}}}\text{ не подход}\\ x=\frac{\pi}{6}+2\pi n\\ x=\frac{5\pi}{6}+2\pi n\end{array}\right.$ $n\in Z$



~~Ответ: x = ±arcsin√(3/2); x = ±π/6 + 2πn; x = ±5π/6 + 2πn, n∈Z~~



Ответ:
$\left[\begin{array}{l}x_1=\frac{\pi}{6}+2\pi n\\ x_2=\frac{5\pi}{6}+2\pi n\end{array}\right.$

№2

Дано: мн-во A - натур числа

x - число

Z - сумма его цифр

$\frac{x}{z}=y \,\vdots\, 9$

Чистовик

~~Метод подбора: $9\cdot 2=18$ $18\cdot 9=162$~~ (1)

$9\cdot 3=27$; $27\cdot 9=\boxed{243}$ (2) ; $9\cdot 4=36$ $36\cdot 9=324$ (3)

$9\cdot 5=45$ $45\cdot 9=405$ (4) ; $9\cdot 6=54$ $54\cdot 9=\boxed{486}$ (5)

$9\cdot 7=63$ $63\cdot 9=567$ (6) ; $9\cdot 8=72$ $72\cdot 9=648$ (7)

$9\cdot 9=81$ $81\cdot 9=729$ (8) ; $9\cdot 10=90$ $90\cdot 9\boxed{=810}$ (9)

~~$9\cdot 11=99$ $99\cdot 9=891$~~ (10) ; ~~$9\cdot 12=108$ $108\cdot 9=972$~~ (11)

Пусть N — такое число тогда n-ое число $\in[100;999]$

$N=9K\cdot S$, где S — сумма $N\vdots 9\Rightarrow$ по приз. цифр

Сумма 2: $243=2+4+3=\boxed{9}$

Сумма 5: 486 ~~$4+8+6=18=9$~~

Сумма предпосл.: 810 ~~$8+1+0=9$~~

$243+486+810=1539$

$S\vdots 9\Rightarrow N\vdots 81$

✓162 486 810
✓243 ~~567~~ 891
✓324 648 972
✓405 ~~729~~

~~Ответ: Сумма 2, 5, предпосл. = 9~~

Ответ: 1539

№3

Решение: Расст. плоскости $\parallel z=0\Rightarrow$ 9 верт + 9 гориз прямых

A, B, C — вершины п/у $\triangle ABC$, $A,B,C\in F$

~~Дано:~~ ~~Пусть F — мн-во точек~~

$AB\parallel$ одной из 3-х коорд. осей

$BC\parallel$ одной из 3-х коорд. осей

катеты $\parallel$ одной из 3-х коорд. осей

$C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

~~(4;4) ... (4;4) (4;4;4)~~

$(C_9^2)=\dfrac{9!}{2!\cdot 7!}=\dfrac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9}{1\cdot2\cdot4\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}$

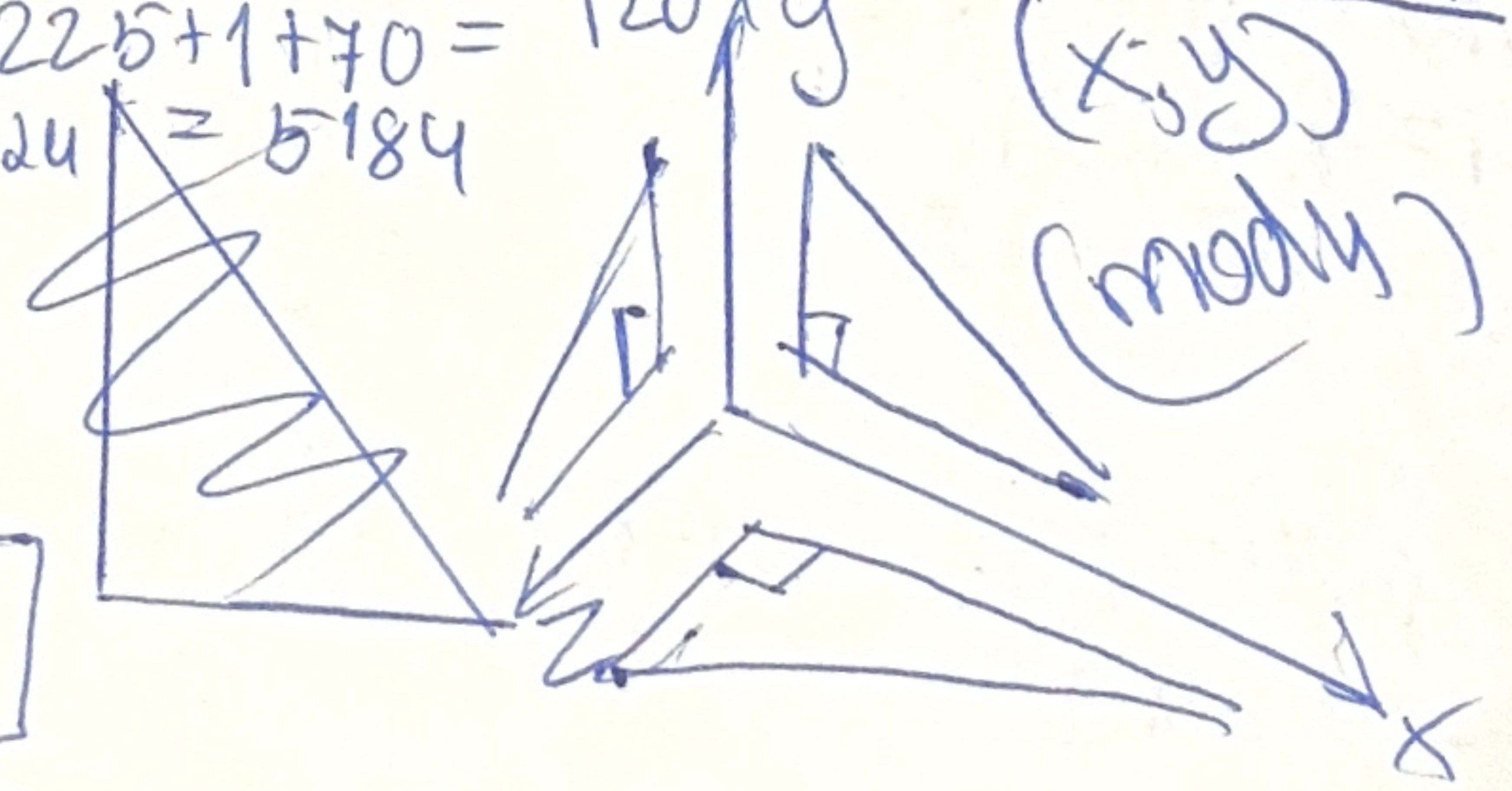
~~П/у $\triangle$~~ Найти:

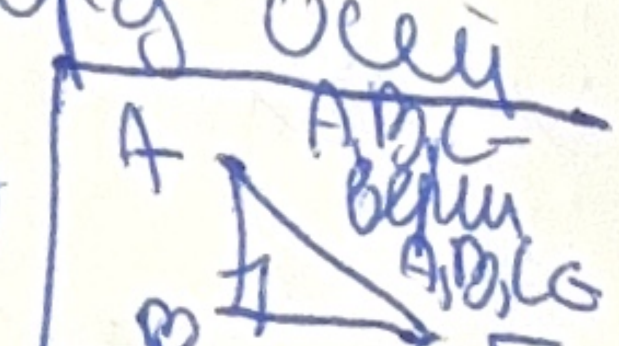
$(C_9^2)^2=36^2=(35+1)^2=1225+1+70=1296$

$1296\cdot 4=4000+800+360+24=5184$

(x;y)

(mod y)





Ответ: 139968

56-73-24-05 (124.6)

Решение:
$k \in \{13; 15; 17\}$
$0 \le x \le 1$
$-1 \le y \le 1$

Дано: $\sin 13\pi x = \sin 15\pi x$

Чистовик

$2\cos(14\pi x)\sin(-\pi x) = 0$

$14x = \frac{1}{2} + n$ $x = 0, 1$

$x = \frac{\frac{1}{2}+n}{14}$ 14

$0 \le x \le 1$
$-1 \le y \le 1$

$y = \sin k\pi x$ $\sin 13\pi x = \sin 17\pi x$

$\sin(2\pi x)\cos(15\pi x) = 0$

$k \in \{13; 15; 17\}$ $x = 0, \frac{1}{2}; 1$ $x = \frac{\frac{1}{2}+n}{15}$ 15 $x = \frac{\frac{1}{2}+n}{15}$

$\sin 15\pi x = \sin 17\pi x$ $\sin \pi x \cos 16\pi x = 0$

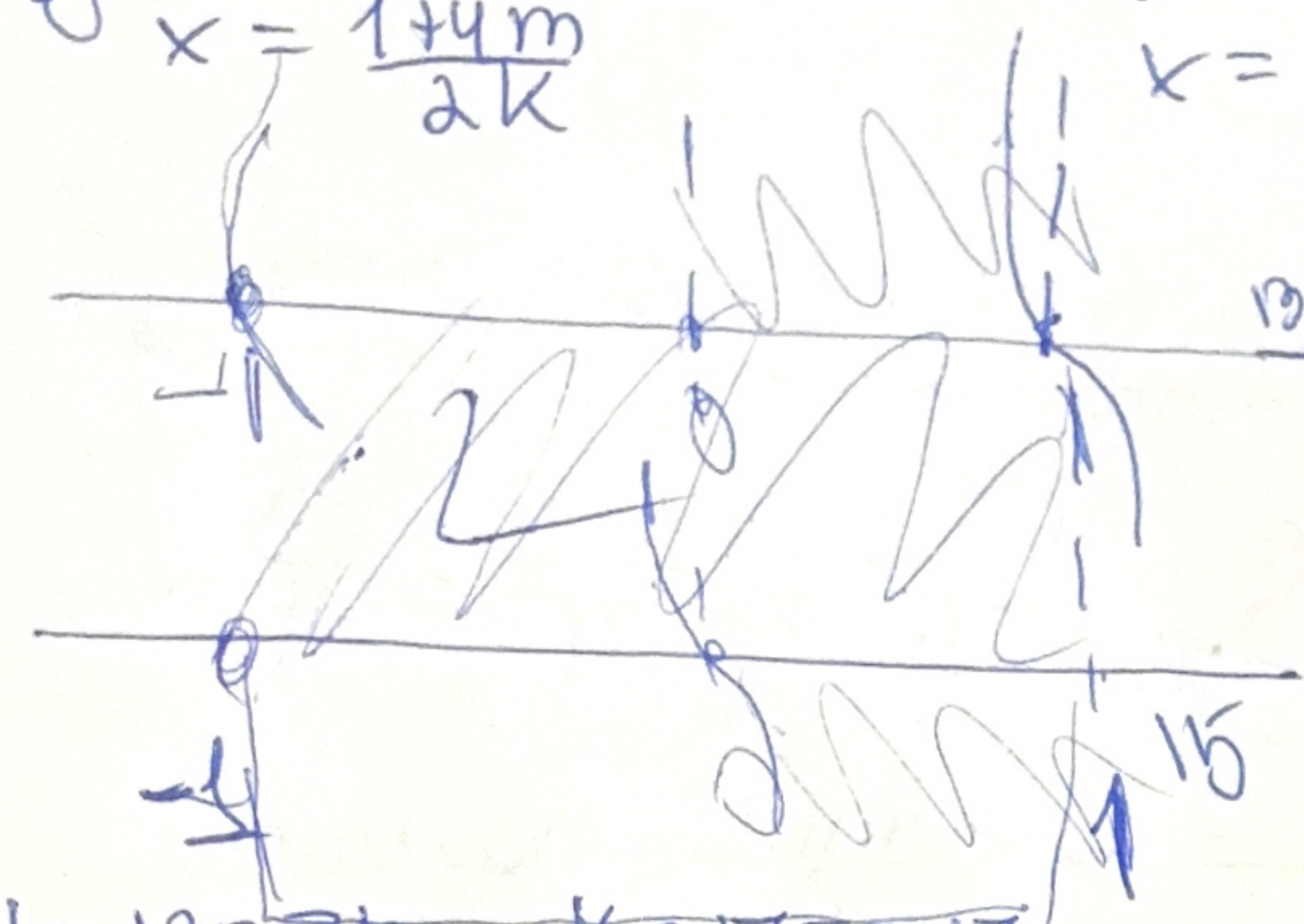
$x = 0, 1$ $x = \frac{\frac{1}{2}+n}{16}$ 16

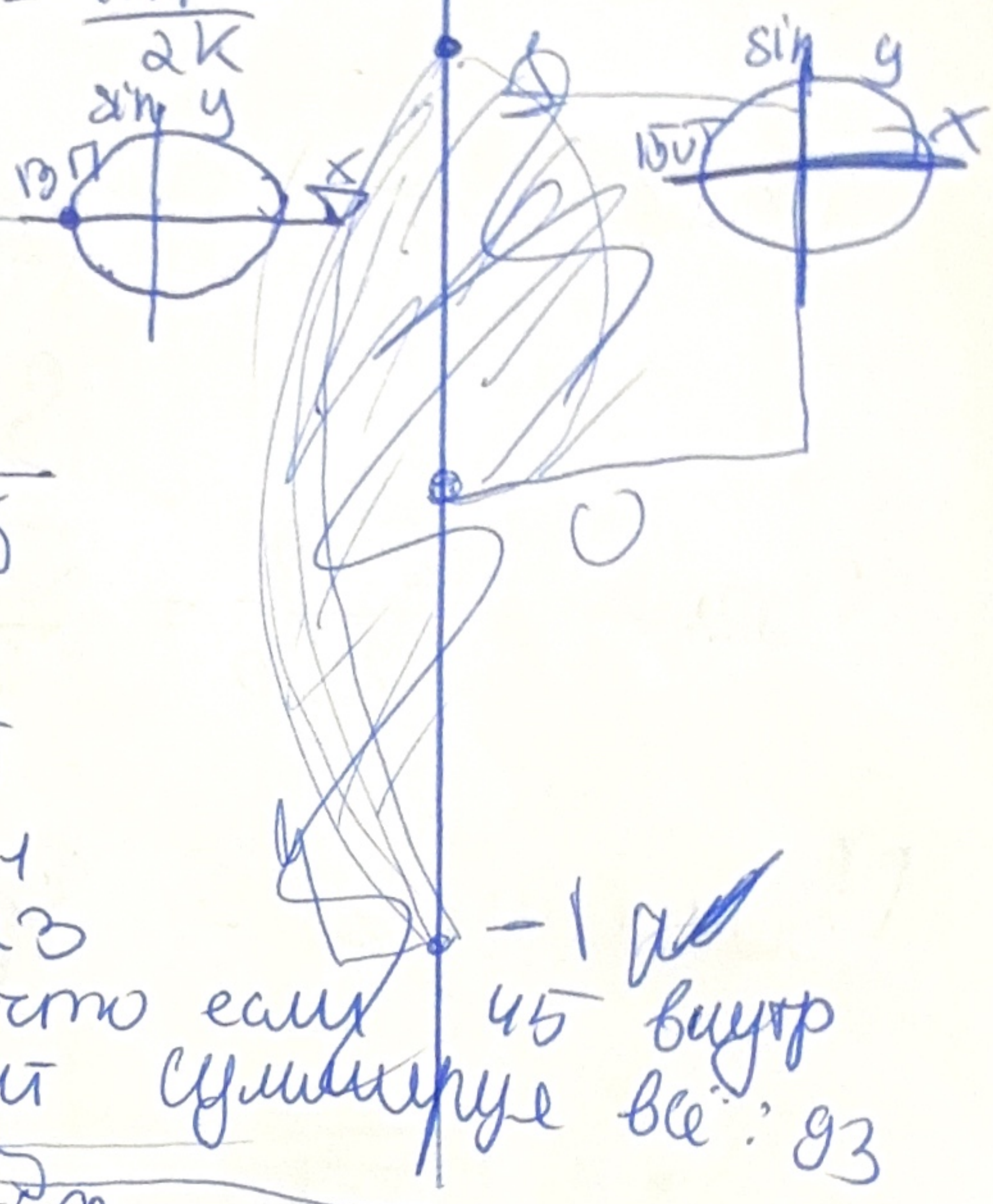
Решение:

$k \in \{13; 15; 17\}$ Если $\sin k\pi x = 1$ или -1

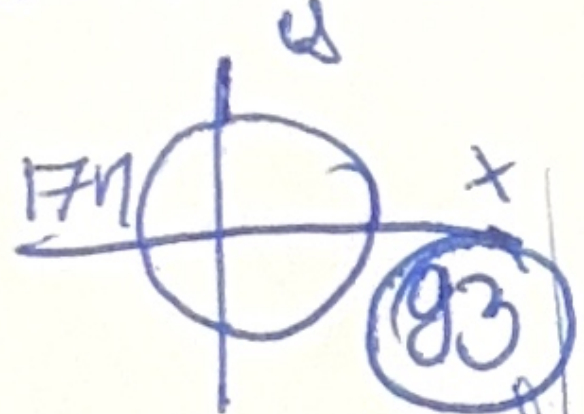
$k\pi x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m$ $k\pi x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m$

$x = \frac{1+4m}{2k}$ $x = \frac{4m-1}{2k}$



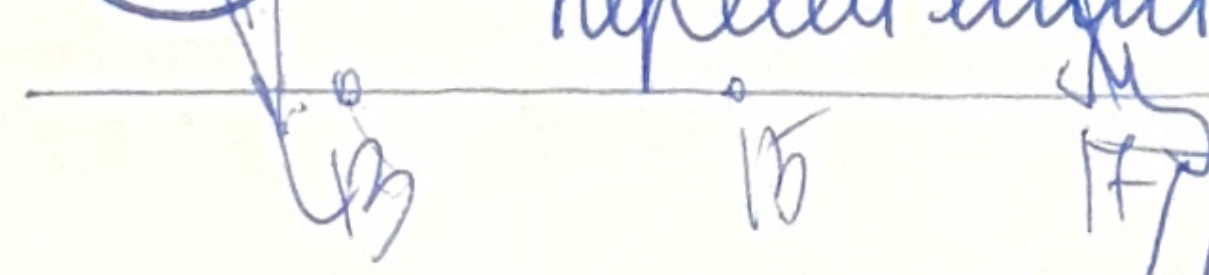


$k = 13 \Rightarrow 13$ $k = 17 \Rightarrow 17$
$k = 15 \Rightarrow 15$ $14 + 15 + 16 = 45$
$y = -1 \Rightarrow 21$
$y = 1 \Rightarrow 23$



93

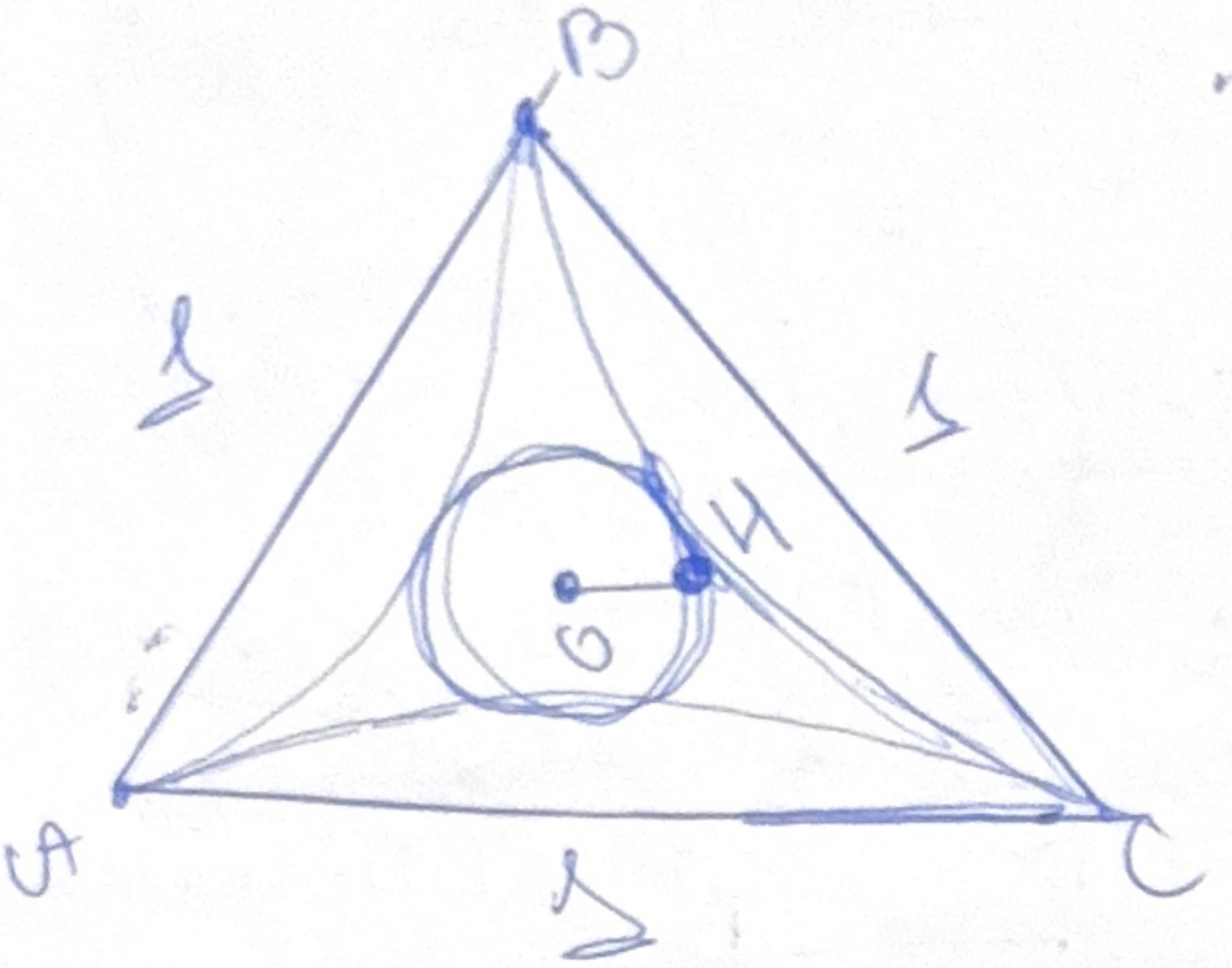
также учтем, что если 45 внутр пересекающ суммируем все: 93



Ответ: 93

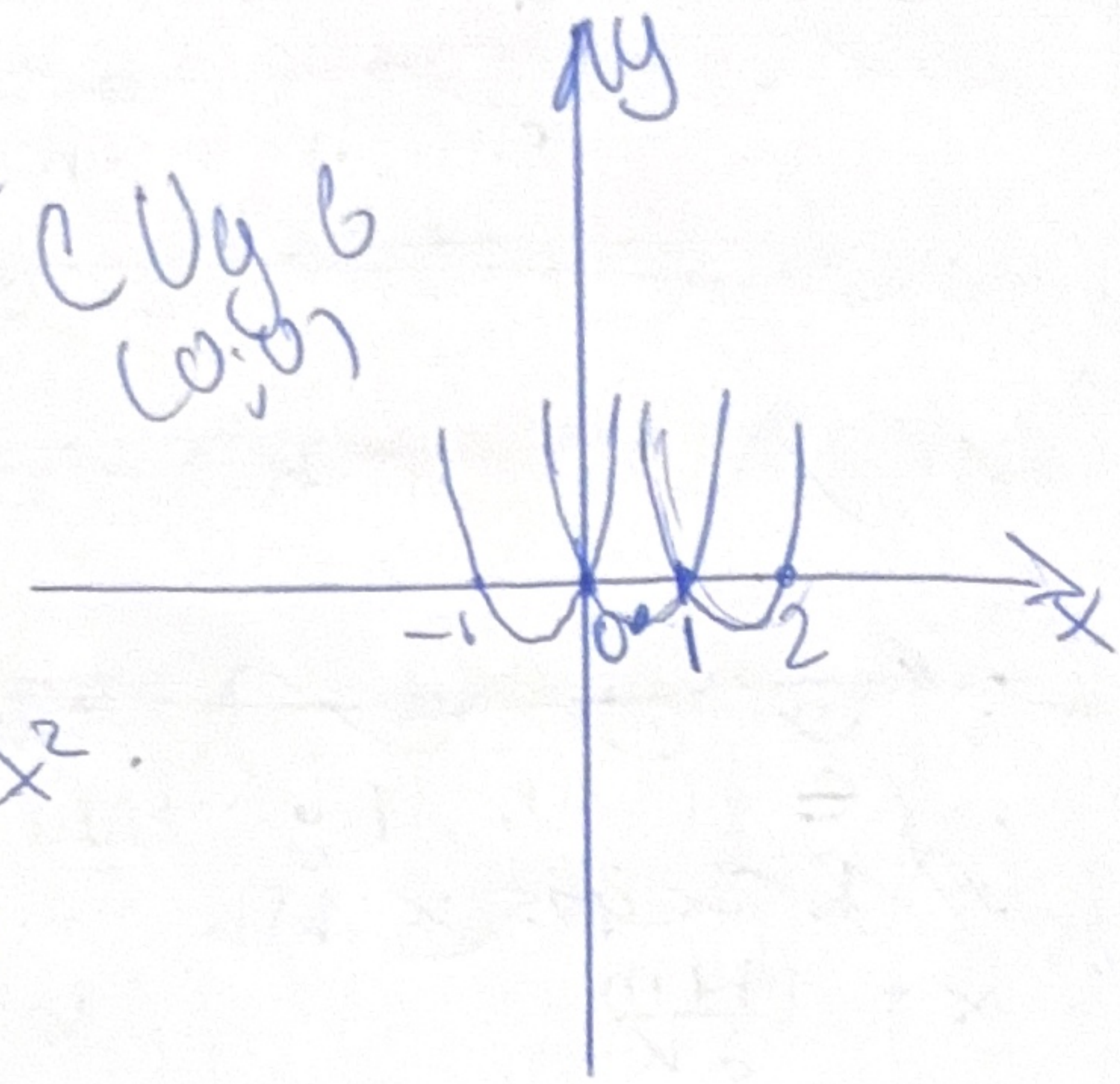
Дано: 3 Гб $y = Cx^2$ р/с 1

Черновик



Найти: $r = OH = ?$

Решение:



C Oy в (0;0)

Пересечение с Ox в т. (1;0) и (0;0)

$0 = C \cdot 1$

$\cancel{C = 0}$

$y = Cx^2$.

$\cancel{(1;0)}$

$r_{впис} = \frac{S}{p}$ $p_{\triangle ABC} = \frac{1+1+1}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5$

$S_{рк} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{1\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

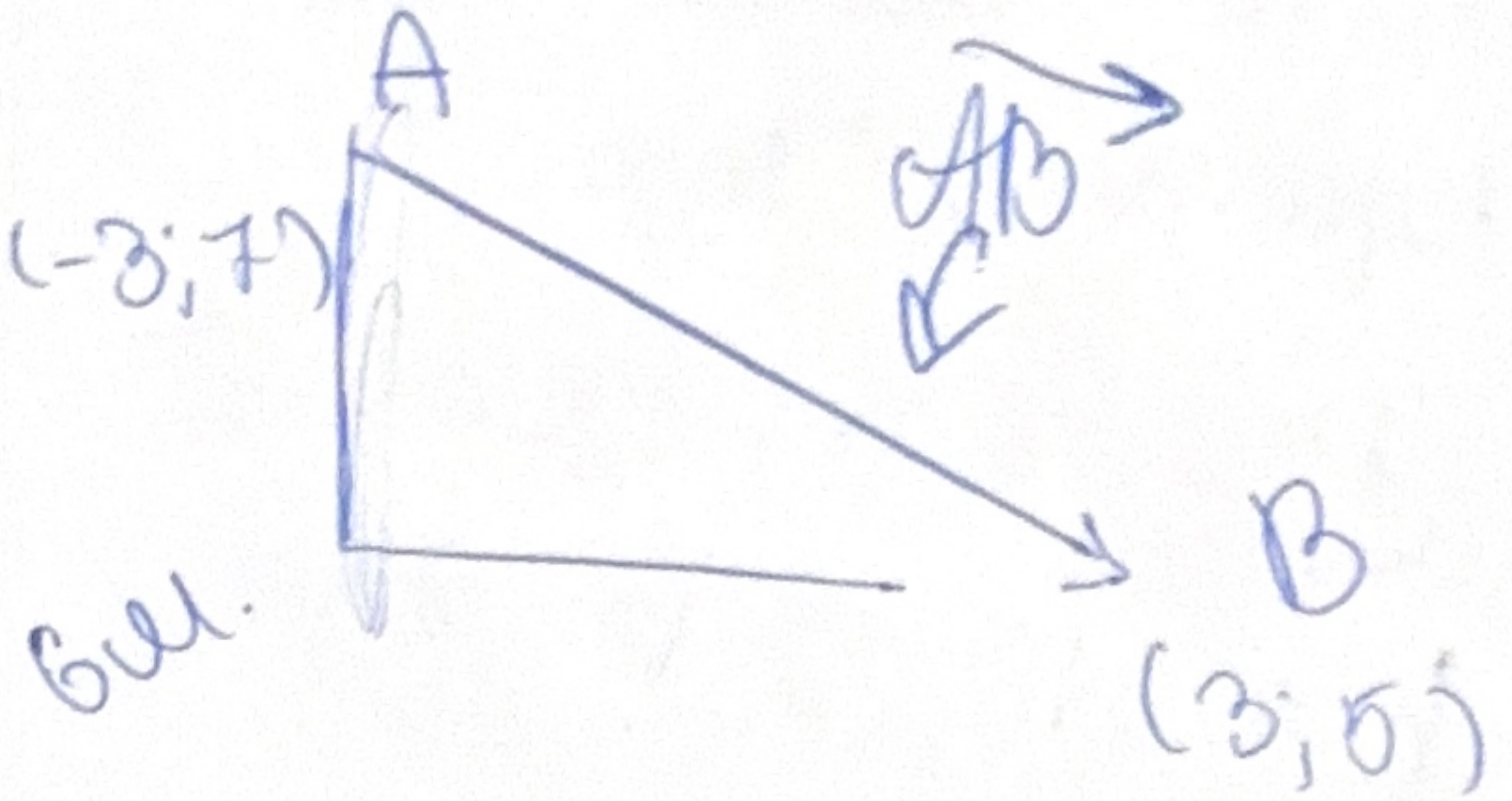
$r_{впис} = \frac{\sqrt{3} \cdot 2}{4 \cdot 3} = \frac{\sqrt{3}}{6}$ – радиус полного $\triangle ABC$ с $a = 1$

$r_{впис. с и/л} \angle = r_{пол} - x$

№ 6

Дано: Секция сплошного забора
$h = 2м$

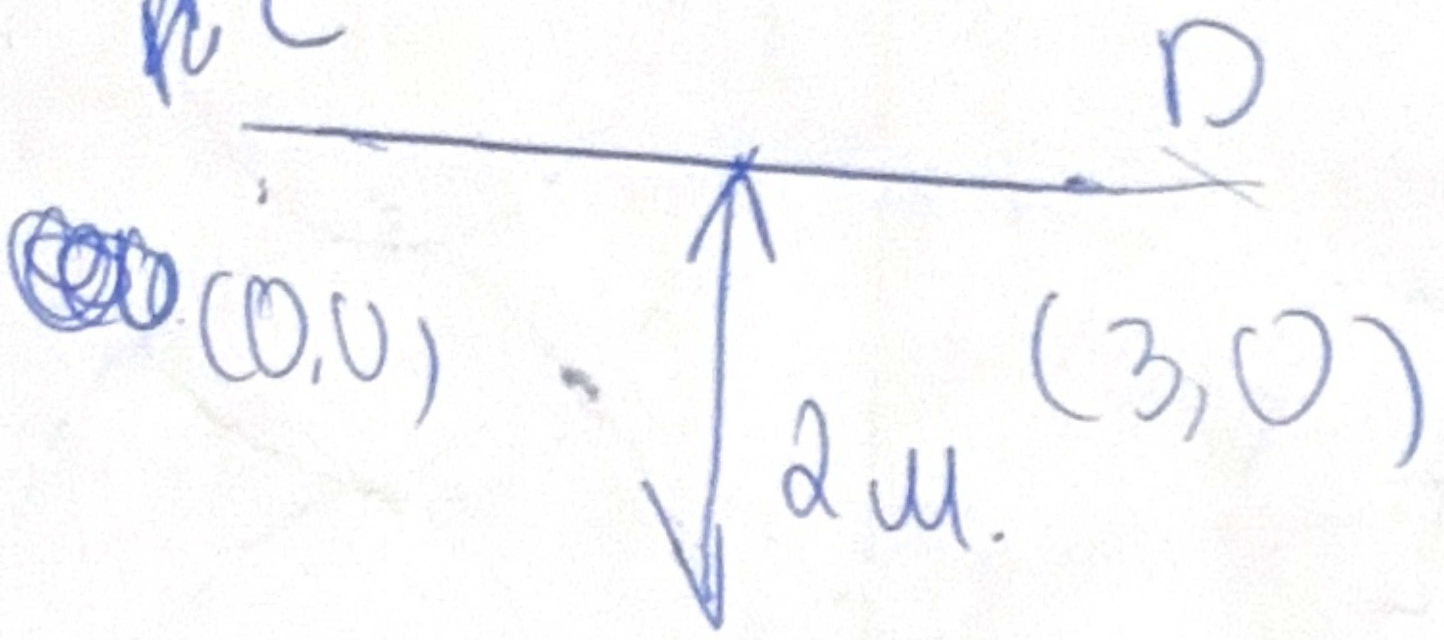
h = 6м — постоянная высота из A в B.



Длина вектора $|\vec{AB}| = ?$

$\vec{AB} = (3;5) - (-3;7) =$

$= (6;-2)$



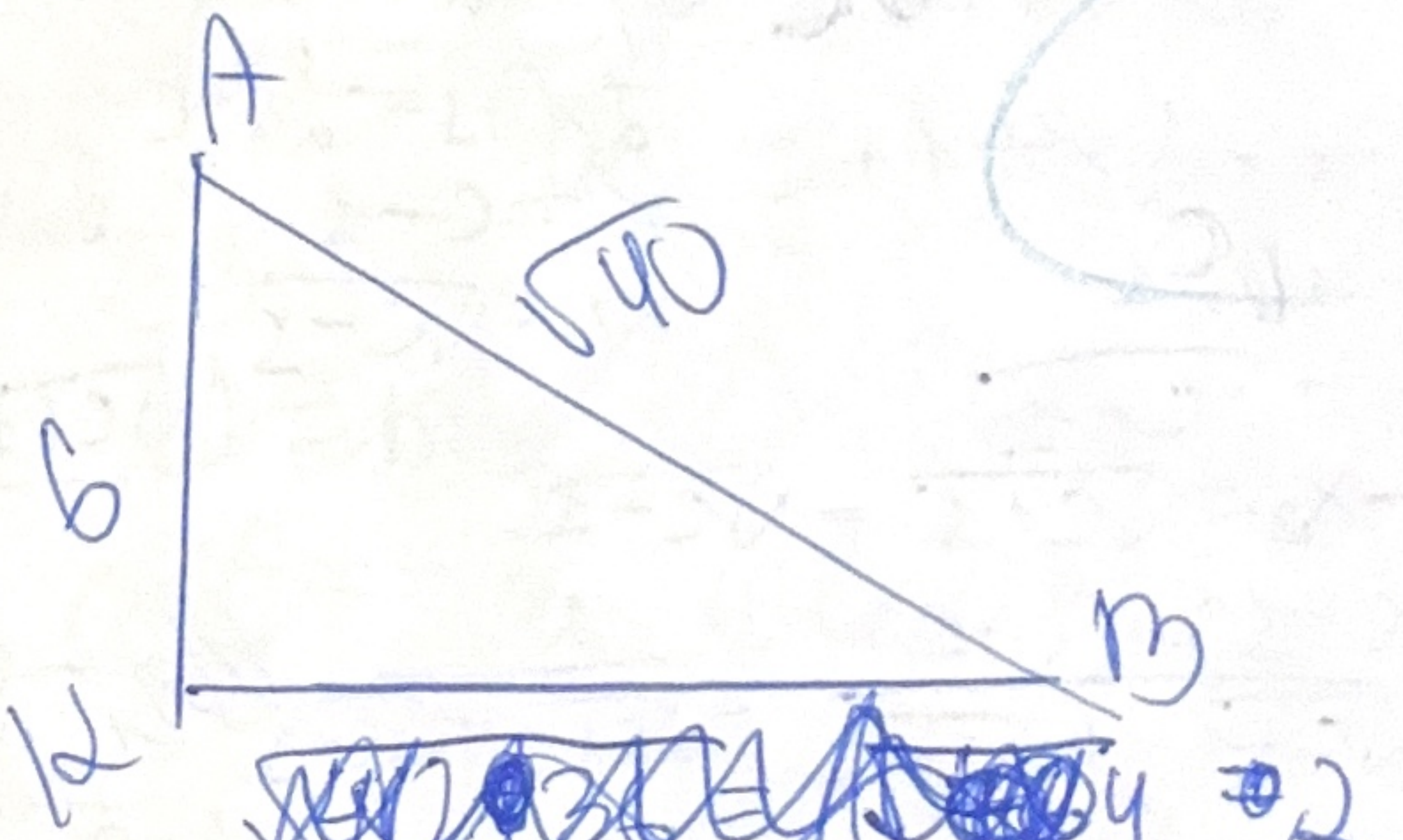
$|\vec{AB}| = \sqrt{36+4} =$

$= \sqrt{40}$

Путь сквозь сплошного забора — вектор $\vec{CD}$

$\vec{CD} = (3;0) - (0;0) = (3;0)$

$|\vec{CD}| = 3$



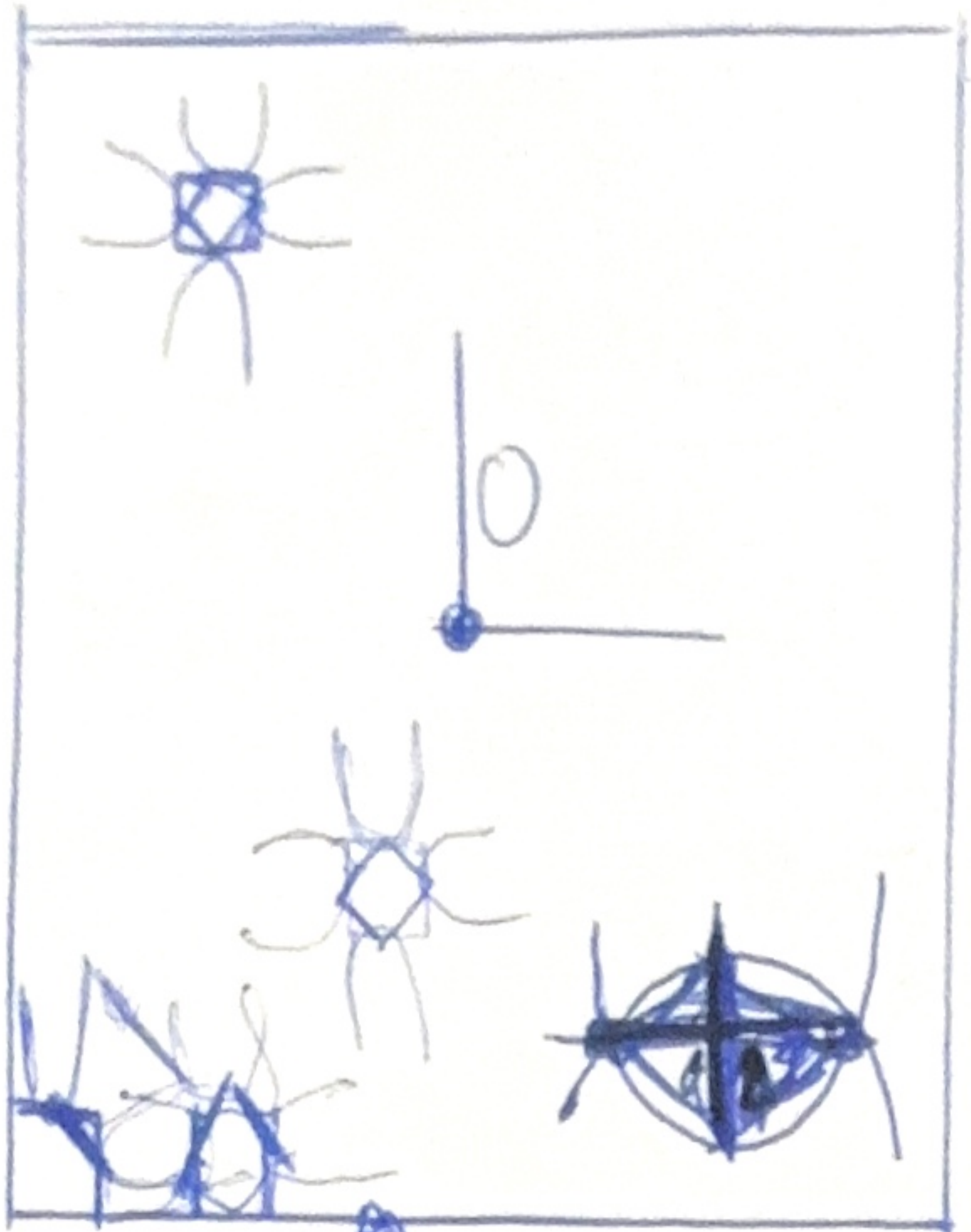
По т. Пифагора

$KB = \sqrt{AB - AK} =$

$= \sqrt{40-36} = \sqrt{4} = \boxed{2}$

№7

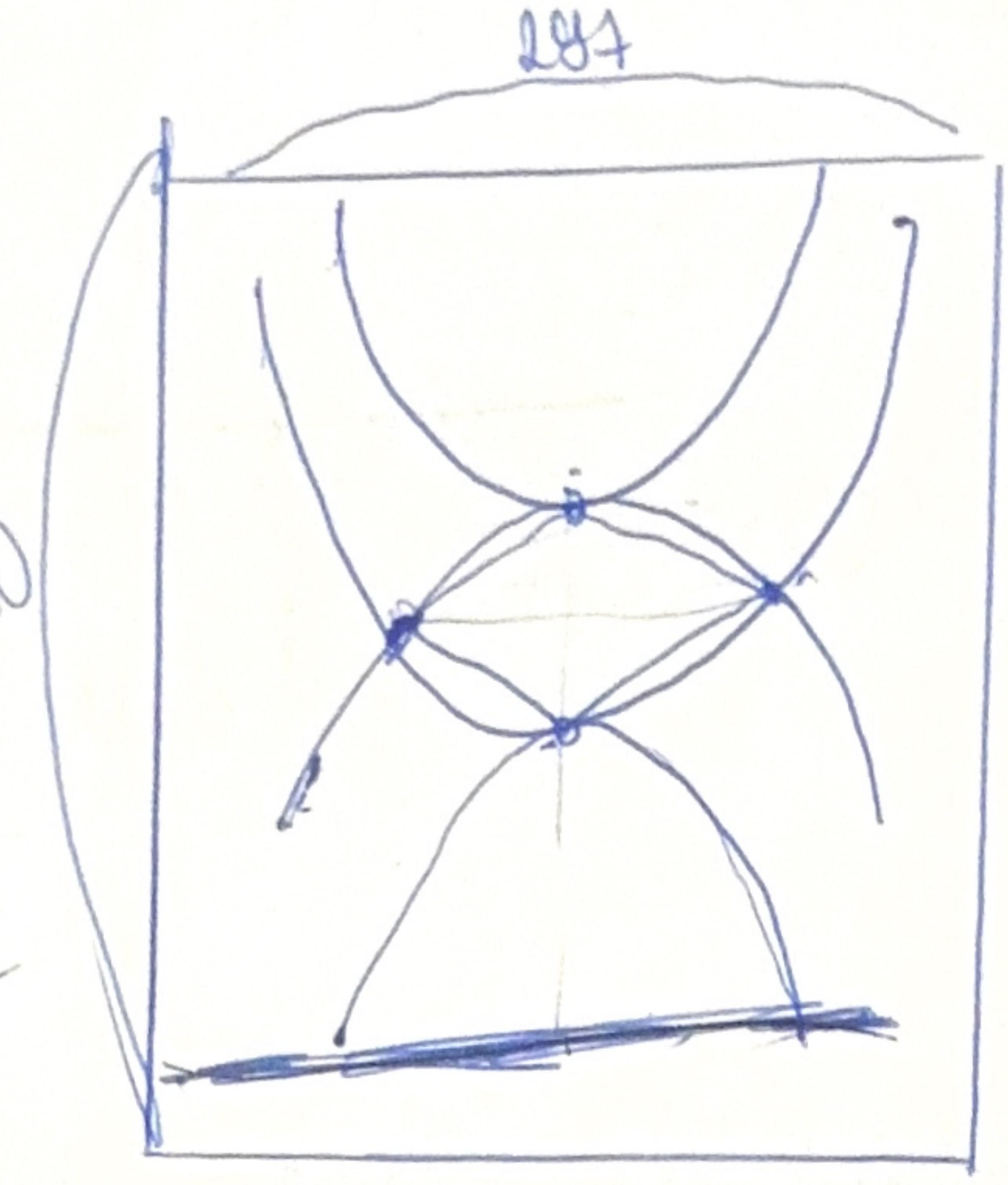
Чистовик



Дано: Линии сетки параболы вида $y = \pm\frac{x^2}{2} + c$, где $c \in \mathbb{Z}$

$h = 210$ $b = 297$

$\frac{1}{2}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{2}{3}$



$\begin{cases} y = ax^2 \\ y = 1 - ax^2 \end{cases}$

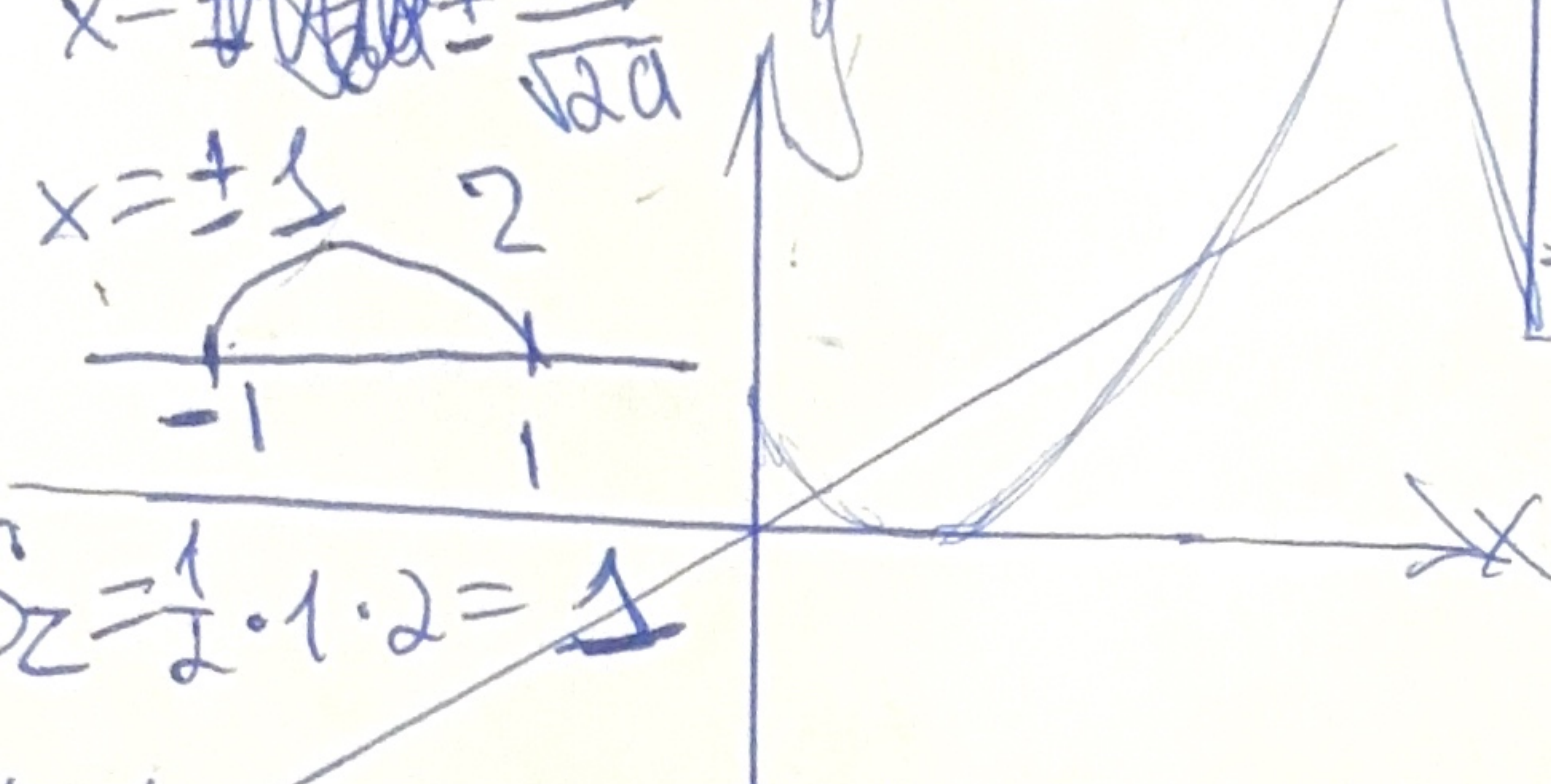
$ax^2 = 1 - ax^2$

$2ax^2 = 1$ $a = \frac{1}{2}$

$h = 210$

$x = \pm\frac{1}{\sqrt{2a}}$

$x = \pm 1$



$S_z = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1$

Клетка — огранич. параболами

$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 \\ y = -\frac{1}{2}x^2 + 1 + c \end{cases}$

$\frac{1}{2}x^2 = -\frac{1}{2}x^2 + 1 + c$

$x^2 = c + 1$

$x_1 = \sqrt{c+1}$

$x_1 - x_2 = \sqrt{c+1} - \sqrt{c-1}$

$= \frac{(c+1) - (c-1)}{\sqrt{c+1} + \sqrt{c-1}} = \frac{2}{\sqrt{c+1} + \sqrt{c-1}}$ — ф-ция убывающая

$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 + 1 \\ y = -\frac{1}{2}x^2 + c \end{cases}$ (высота × ширина)

$\frac{1}{2}x^2 + 1 = -\frac{1}{2}x^2 + c$ 210×297 мм

$x^2 = c - 1$

$x_2 = \sqrt{c-1}$

$\Rightarrow d = \frac{(\sqrt{c+1} - \sqrt{c-1})(\sqrt{c+1} + \sqrt{c+1})}{\sqrt{c+1} \cdot \sqrt{c-1}}$

Значит макс $S_н = 1$

Ответ: 1

№8

Дано: При каких $a = ?$ мн-во решений нер-ва

$8x^2 \log_a x - \log_x a - 2x \le 0$

(сити x) состоит из ~~пищевых~~ полуинтервала и точки (не принадл. полуинтервалу и не явл. концом?)

ОДЗ: $x \neq 1$, $a > 0$, $x > 0$, $a \neq 1$

Решение: $8x^2 \log_a x - \log_x a - 2x \leq 0$

$\log_a x = \frac{1}{\log_x a}$; $\log_x a = \frac{1}{\log_a x}$

$8x^2 \log_a x - \frac{1}{\log_a x} - 2x \leq 0$

ЗП: Пусть $\log_a x = t \Rightarrow x = a^t$. Получим

$8a^{2t} t^2 - 2a^t t - 1 \leq 0$ при $t > 0$

$8a^{2t} t^2 - 2a^t t - 1 \geq 0$ при $t < 0$

$f(t) = 8a^{2t} t^2 - 2a^t t - 1$ $\quad c = a^t \cdot t$

$f(c) = 8c^2 - 2c - 1$ $\quad f(c) = 8(c - \frac{1}{2})(c + \frac{1}{4}) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(c) = (2c - 1)(4c + 1)$

$a^t \cdot t \nearrow (0; +\infty)$ $\quad a^t t = \frac{1}{2}$

$-\frac{1}{4}$ $\quad \frac{1}{2}$

$(-\infty; 0)$ min $-\frac{1}{e \ln a} \Rightarrow -\frac{1}{e \ln a}$ $\quad \exists!$ корень $t > 0$

$-\frac{1}{4x}$ $\quad 0$ $\quad \frac{1}{2x}$

$a^t t = -\frac{1}{4}$ $\quad e \ln a = 4$ $\exists!$ корень

$-\frac{1}{4}$ $\quad \frac{1}{2}$

Ответ: $a = e^{4/e}$

$\boxed{\text{Чистовик}}$

$\log_a x \geq \frac{1}{4x} \Rightarrow x \geq a^{\frac{1}{4x}}$

$\log_a x < 0 \Rightarrow x < 1$

$\log_a x \leq \frac{1}{2x} \Rightarrow x \leq a^{\frac{1}{2x}}$

$\log_a x \geq 0$

Допустим:

$\boxed{\log_a x = \frac{1}{\log_x a}}$

Тогда: (1) $\frac{1}{\log_x a} \geq \frac{1}{4x}$

$\log_x a \geq -4x$

$a \geq x^{-4x}$

(2) $\frac{1}{\log_x a} < 0 \iff \log_x a < 0$

$a < 1$

(3) $\frac{1}{\log_x a} \leq \frac{1}{2x} \iff \log_x a \leq 2x$

$a \leq x^{2x}$

(4) $\frac{1}{\log_x a} \geq 0 \iff \log_x a \geq 0$

$a \geq 1$

$\boxed{\text{Чистовик}}$

Ответ: ~~$a \in [x^{-4x}; 1) \cup (1; x^{2x}]$~~