0 491134 640000

49-11-34-64
(123,9)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант ____________________

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по МАТЕМАТИКЕ
профиль олимпиады

Белоручкина Дмитрия Игоревича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«29» МАРТА 2026 года

Подпись участника

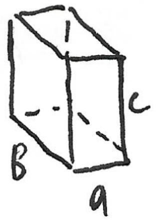
50 (пятьдесят) ~~Абдурагим~~

~~Нет~~

49-11-34-64
(123,9)

Черновик

№1.



$V = abc$, $S_{пов} = 2(ab+bc+ac)$, $S_{\ell} = 4(a+b+c)$

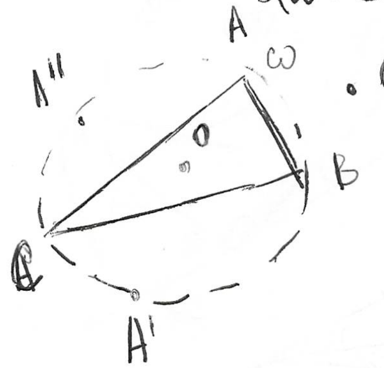
$abc + 2(ab+bc+ac) + 4(a+b+c) = 2026$

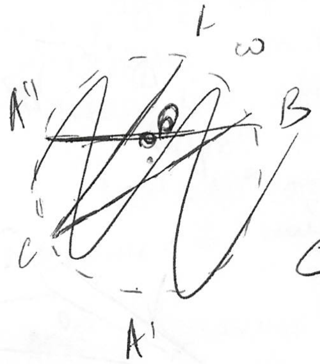
$abc \to \min$?

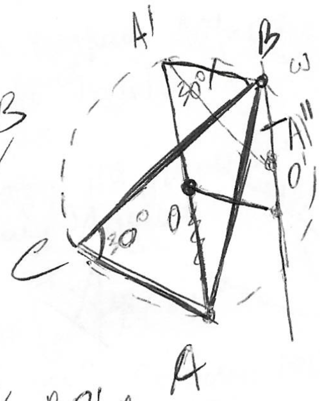
$2(ab+bc+ac)+4(a+b+c) = \cancel{2a(b+c+2)}$

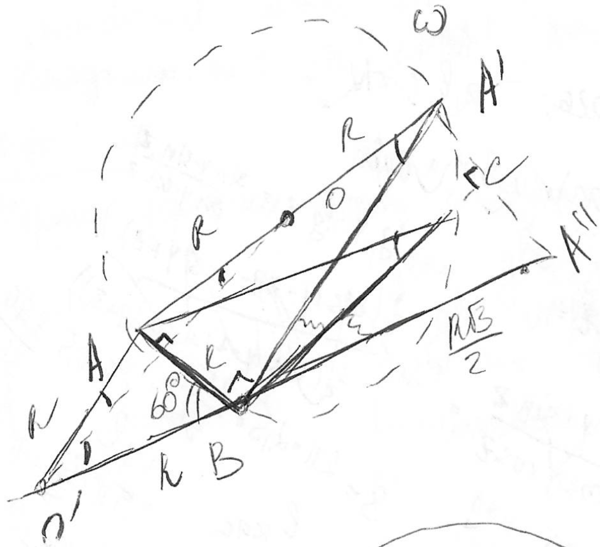
$\cancel{= (a+b+c)^2 - a^2 - b^2 - c^2 + 4(a+b+c)}$

№3.









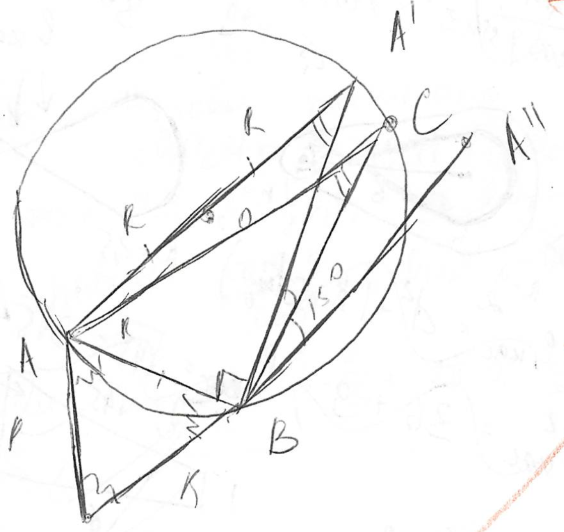
$AB = R$, $BO' = R$

$AA' \parallel OB$

$\angle A'BC = \angle A'BC = \frac{180^\circ - 60^\circ - 90^\circ}{2} = 15^\circ$

$\Rightarrow \angle B = 105^\circ$

Отв: 105°

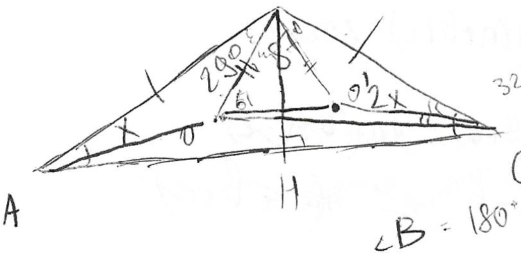


Черновик:

№6.

$\angle BCO = 2\angle BAO$, $\angle OBC = 3\angle ABO$

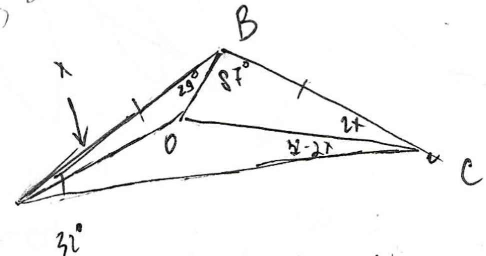
$\frac{\angle BOA}{\angle BAO} = ?$



$\angle B = 180^\circ - 2\cdot 32^\circ = 180^\circ - 64^\circ = 116^\circ$

$\angle OBC = \frac{116}{4}\cdot 3 = 87^\circ$, $\angle ABO = 29^\circ$

$\angle OAC = 32^\circ - x$, $\angle OCA = 32^\circ - 2x$



№1. $\cancel{abc + 2(ab+bc+ac) + 4(a+b+c) = 2026}$, $a, b, c \in N$

$abc \,\vdots\, 2$

$(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3 + 3(a^2b+b^2a+ac)(a+b+c) + 6abc$

$(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac)(a+b+c)$

№5 $tg\,x + tg\,y + tg\,z \to max$

$x = \frac{\pi}{2} - y - z$

$tg\,x + tg\,y + tg\,z = ctg(y+z) + tg\,y \cdot tg\,z =$

$= \frac{\cos y \cos z - \sin y \sin z}{\sin y \cos z + \cos y \sin z} \cdot \frac{\sin y \cdot \sin z}{\cos y \cos z} =$

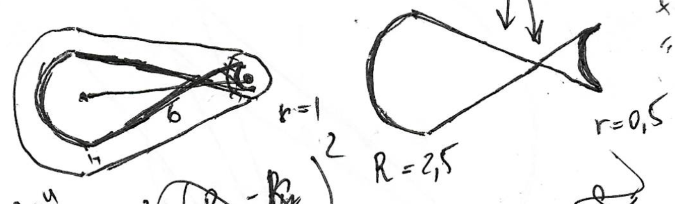
$tg\,y \cdot tg\,z = \frac{\sin y \cdot \sin z}{\cos y \cdot \cos z} = \frac{\frac{1}{2}(\cos(y-z) - \cos(y+z))}{\frac{1}{2}(\cos(y-z) + \cos(y+z))}$

2,5 – рад.

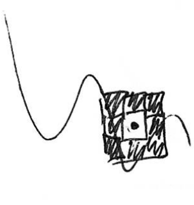
$S = 2\pi \cdot 2{,}5 \cdot \frac{240}{360} + 2\pi \cdot 0{,}5 \cdot \frac{240}{360} + 2l = 5\pi \cdot \frac{2}{3} + \pi \cdot \frac{2}{3} + 2l = 4\pi + 6\sqrt{3}$

Ответ: $4\pi + 6\sqrt{3}$

№7



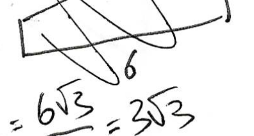
№8

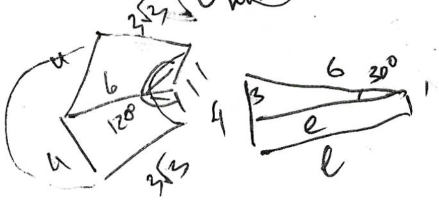


$l_{кас}^2 = d^2 + (R_0 - R_0)^2$

$l_{кас}^2 = 36 + 9$, $l_{кас} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} < 5$

arctg, arcsin $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

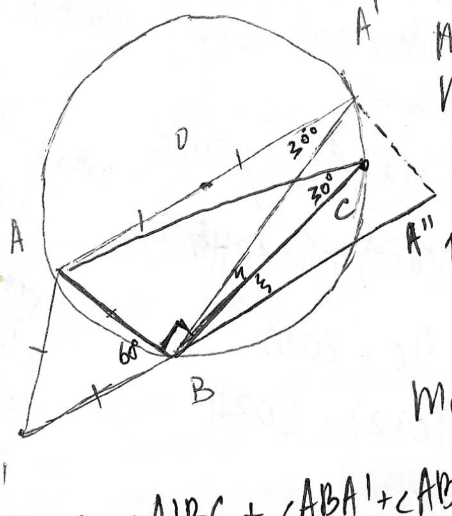




$l = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$

Чистовик - 1

Задача 3.



Точку, диам. противоп. т. A, обозначим A'

Тогда $\angle AA'B = \angle ACB = 30°$

Получается, в п/у $\triangle AA'B$: $AB = \frac{1}{2}AA' = R$ (радиус окр.)

В силу симметрии $AO' = O'B = R$

Имеем, что $\triangle AO'B$ – р/с, т.е. $\angle ABO' = 60°$

$\angle ABA' = 90°$ (опир. на диам. AA')

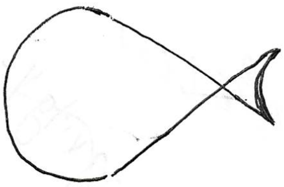
Также в силу симм.: $\angle A'BC = \angle A''BC$

Тогда $2 \cdot \angle A'BC + \angle ABA' + \angle ABO' = 180°$, откуда: $\angle A'BC = 15°$

Получили, что $\angle B = \angle ABA' + \angle A'BC = 90° + 15° = 105°$ Ответ: 105°

Задача 7.

Форма дорожки будет следующей:

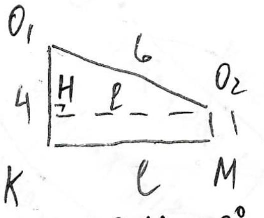


Здесь две дуги окр. с радиусами 2,5 и 0,5 и два отрезка, равные отрезкам касательных на трассе

Посчитаем отрезки: (для удобства – l)

$l^2 = 36 - (4-1)^2$

$l = 3\sqrt{3}$



Чтобы посчитать дуги, посчитаем:

$\angle O_1O_2M = \angle O_1O_2H + \angle HO_2M = 30° + 90° = 120°$

($\angle O_1O_2H = 30°$ т.к. $O_1H = 3 = \frac{1}{2}O_1O_2$, где O_1O_2 – расст. между ц. окр.)

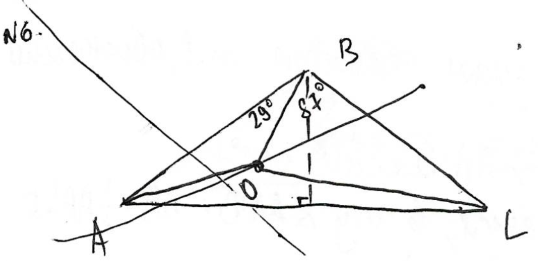
Тогда дуги равны: $\frac{2\pi \cdot 2,5}{360°} \cdot 2\angle O_1O_2M$ – большая, $\frac{2\pi \cdot 0,5}{360°} \cdot 2\angle O_1O_2M$ – меньшая

Длина дорожки: $S = 2\pi \cdot 2,5 \cdot \frac{2}{3} + 2\pi \cdot 0,5 \cdot \frac{2}{3} + 2l = 4\pi + 6\sqrt{3}$

Ответ: $4\pi + 6\sqrt{3}$

Черновик

№6.



№2.

1x1: 400

2x1:

№1. $abc + 2(ab+bc+ac) + 4(a+b+c) = 2026$

abc_{min} - ?

$444 + 2\cdot 444 + 2\cdot 4 + 2\cdot 111$

$444 + 2\cdot$

$+ 4\cdot 116 =$

$= 1200+120+12+8+222$

$+ 464 =$

$= 1562+464$

$= 2026$

$= V$

~~$ab(\frac{c}{3}+2) + bc(\frac{a}{3}+2) + ac(\frac{b}{3}+2) + 4(a+b+c) = 2026$~~

~~$2090 = (ab+4)(c+2) + (bc+4)(a+2) + (ac+4)(b+2)$~~

$ab(c+2) + 2(a+b)(c+2) + 4c = 2026$

$ab(c+2) + 2(a+b)(c+2) + 4(c+2) = 2034$

$(c+2)(ab + 2a + 2b + 4) = 2034$

$2034 = 2\cdot 1017 = 2\cdot 3\cdot 3\cdot 113$ Делители:

~~$c+2 =$~~

$(c+2)(a(b+2) + 2(b+2)) = 2034$

$(a+2)(b+2)(c+2) = 2034$

Делители 2034: $1, \cancel{2}, 3, 6, 9, 18, 113, 226, 339, 678, 1017, 2034$

Тройки: $(3, 6, 113)$, $(3, 3, 226)$, ~~$(1, ...)$~~

1) $a \geq b \geq c$

$a = 111,\ b = 4,\ c = 1$

$V_1 = 444$

$V_1 > V_2$,

2) $a = 224,\ b = 1,\ c = 1$

$V_2 = 224$

Ответ: 444

№5. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z) (x+y)$ ~~$= \operatorname{ctg}(x+y) \cdot \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y$~~

$\operatorname{ctg}(x+y) \cdot \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y$

~~$\frac{\cos x \cos y - \sin x \sin y}{\sin x \cos y + \cos x \sin y} \cdot \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y =$~~

~~$\frac{\cos x \cdot \sin x \cdot \cos y \cdot \sin y - \sin^2 x \cdot \sin^2 y}{\cos x \cdot \sin x \cdot \cos^2 y + \cos^2 x \cdot \sin y \cdot \cos y}$~~

$=$

49-11-34-54
(123.9)

Чистовик - 2

Задача 1

Обозначим $a \geq b \geq c$ – длину, ширину, высоту

Тогда: $abc + 2(ab + bc + ac) + 4(a + b + c) = 2026$

Преобразуем: $ab(c+2) + (2a+2b)(c+2) + 4\cancel{c} + \cancel{4a+4b} = 2026$

$(ab + 2a + 2b + 4)(c+2) + \cancel{4c} = 2026 + 8$

$(a+2)(b+2)(c+2) = 2034$

$2034 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 113$

Произведение трёх разл. нат. чисел должно равняться 2034.

Ясно, что один из множителей больше 113, а наименьший из множителей больше 2 (ведь $a, b, c \in N$)

Нетрудно перебрать варианты. Понятно, что подходит лишь: $c + 2 = 3$, $b + 2 = 6$, $a + 2 = 113$

Тогда $a = 111$, $b = 4$, $c = 1$

$V = abc = 444$

Ответ: 444

Черновик

№8

4 вар. комн.

1) Вер.: $\frac{2}{6}$ Ходов всего: 8

Вер.: $\frac{1}{2}$

(Без потери общности)

Всего ходов 9 Вер.: $\frac{2}{9}$

Подходят: 2

а) б)

всего: 11

Вер.: $\frac{2}{11}$

всего: 10

Вер.: $\frac{2}{10}$

Симм!

Всего: 12

Вер.: $\frac{2}{12}$

$\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{13}$

$\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{12}$

Далее 14 вар., вер. $\frac{1}{14}$, что закроет в кольцо

2) 

Вер.: $2/3$

$2/3\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{21}{110}\cdot\frac{25}{156}=$

$=\frac{21\cdot 5}{3\cdot 7\cdot 9\cdot 11\cdot 3\cdot 13}=\frac{5}{9\cdot 11\cdot 3\cdot 13}$

$\frac{35}{99\cdot 12\cdot 156}\cdot\frac{1}{13}=$

$=\frac{35}{9\cdot 11\cdot 12\cdot 12\cdot 13\cdot 13}$

$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{9}\cdot\left(\frac{2}{11}+\frac{2}{10}\right)=$

$=\frac{2}{27}\cdot\frac{21}{110}=\frac{7}{9}\cdot\frac{1}{55}=\frac{7}{495}$

$\frac{7}{495}\cdot\frac{1}{12}\cdot\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{13}\right)=\frac{7\cdot 25}{495\cdot 12\cdot 156}=\frac{35}{99\cdot 12\cdot 156}$

$\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y+\operatorname{tg}z=\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y+\operatorname{tg}y$

$=\operatorname{ctg}(x+y)+\operatorname{tg}(x+y)+\frac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}$

$\operatorname{ctg}(x+y)+\frac{\cos(x+y)}{\sin(x+y)}+\frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)}$

$\frac{\cos(x+y)}{\sin(x+y)}$

$\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y+\operatorname{tg}z}{3}\geq\sqrt[3]{\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y\cdot\operatorname{tg}z}$

$\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y+\operatorname{tg}z\leq(\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y+\operatorname{tg}z)^3$

27

Итак, тут:

а) $\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{2}{11}\cdot\frac{2}{12}\cdot\frac{1}{14}=$

$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{77}=\frac{1}{3\cdot 6\cdot 7\cdot 9\cdot 11}$

б) $\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{2}{10}\cdot\frac{2}{12}\cdot\frac{1}{14}=$

Черновик