Выход 12^{55} — 13^{00}

0 874467 190006

87-44-67-19
(124.41)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11 класс Вар. 1

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов"
наименование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Беляновa Александра Павловна
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Выход 12

Дата

«29» марта 2026 года

Подпись участника

90 (Девяносто) [signature]

87-44-67-19
(124.41)

Чистовик

Задача N1

$\sqrt{6(1-\operatorname{tg}^2 x)} = 4\sin x \Rightarrow$ $\boxed{\text{условие: } |\operatorname{tg} x| \le 1}$

$\sqrt{6\,\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x}} = 4\sin x$

~~$\sqrt{6\cos 2x} = 2\cdot\sin 2x$~~

~~$6\cos 2x = 4 - 4\cos^2 2x$~~

~~можно~~

$\sqrt{6\cos 2x} = 2\cdot 2\cdot\sin x\,|\cos x|$

$(2\sin 2x)$

при $\cos x \geq 0$
$\sin x$ должен быть ≥ 0

$6\cos 2x = 4 - 4\cos^2 2x$ (ОТТ)

$(2\cos 2x - 1)(\cos 2x + 2) = 0$

$\cos 2x \leq -1$
решений нет

$\cos 2x = \frac{1}{2}$

I при том, что $\sin x \geq 0$
есть только $2x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$,
$k \in \mathbb{Z}$

частично подходит

$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$

у другого варианта $\sin < 0$

при $\cos x < 0$
$\sin x$ должен быть ≥ 0

$6\cos 2x = 4\cos^2 2x - 4$ (ОТТ)

$(2\cos 2x + 1)(\cos 2x - 2) = 0$

$\cos 2x \geq 1$
решений нет

$\cos 2x = -\frac{1}{2}$

II $2x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

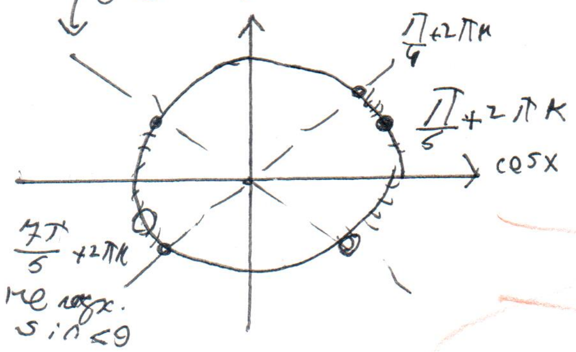
$\boxed{2x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}}$

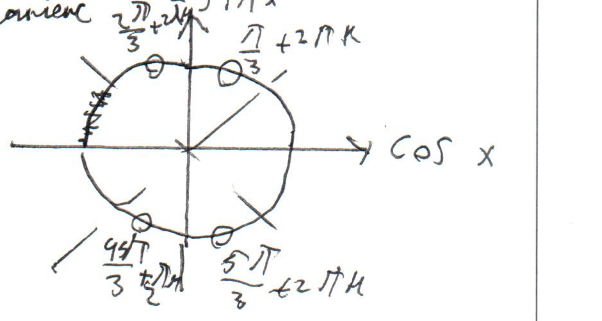
подходит частично, $\cos x < 0$, $\sin x > 0$

$\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

но не подходит под тангенс

не подх. под тангенс





тут решений нет

Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ (30°)

Чистовик

Задача 2

Пусть наше 3-х значное число N имеет вид:

$100a+10b+c$, по условию:

$N = 100a+10b+c$

$\frac{100a+10b+c}{a+b+c} = 9m$, где $a, b, c, m \in \mathbb{Z}$

и $0 \le a, b, c \le 9$

и $a > 0$, $m > 0$

получается, что $N = 9m(a+b+c)$, откуда

$N \vdots 9$, а раз число кратно 9, то и его

сумма цифр $a+b+c \vdots 9$, значит $N \vdots 81$

все трехзначные числа, кратные 81:

$162 = 9 \cdot 18$; $243 = 9 \cdot 27$; $324 = 9 \cdot 36$; $405 = 9 \cdot 45$;

$486 = 18 \cdot 27$; 567 не подх. Σ цифр $= 18$; $648 = 18 \cdot 36$;

729 не подх Σ цифр $= 18$; $810 = 9 \cdot 90$; 891 - не подходит; $972 = 18 \cdot 54$

(первый множитель - сумма цифр)

Ответ: 162, 243, 324, 405, 486, 648, 810, 972.

Сумма 2-го 5-го и седьмого:

$$\begin{array}{r} 243 \\ +486 \\ +810 \\ \hline 1539 \end{array} = \boxed{1539}$$

Задача 3

Назовем точкой C вершину прямого угла нашего 3-к-ка, пусть C имеет координаты $(c_1; c_2; c_3)$, что значит, что 2 координаты идут $\parallel$ оси, значит, что 2 координаты совпадают, а только 3-я отличается, соответственно, где отличается, параллельно той оси катет идет. Пусть A и B - 2 другие точки возможно 3 случая: у A и B отличаются x и y (неважно, что у какой точки, если будем считать 2 случая - назовем Δ-к лесенкой и двигаем), у A и B отличаются $y; z$, или у A и B отличаются $x; z$.

87-44-67-19 (124.41)

Задача 3 (прод.) Чистовик.

посчитаем для x, y, а потом ~~это~~ число умножим на 3. Выбрать C можно 9^3 способами x посред. - 9 - 9 ..... 0 ..... 4 y, z посредине. потому A - восемью (8) она должна быть не меньше, если условие x покрывала почти C, потому B - тоже. Итак, ~~для~~ ~~этого~~ выбрать можно $9^3 \cdot 8^2$ вариантов. но не забываем и про домножение на 3 итого: $3 \cdot 9^3 \cdot 8^2$ способов.

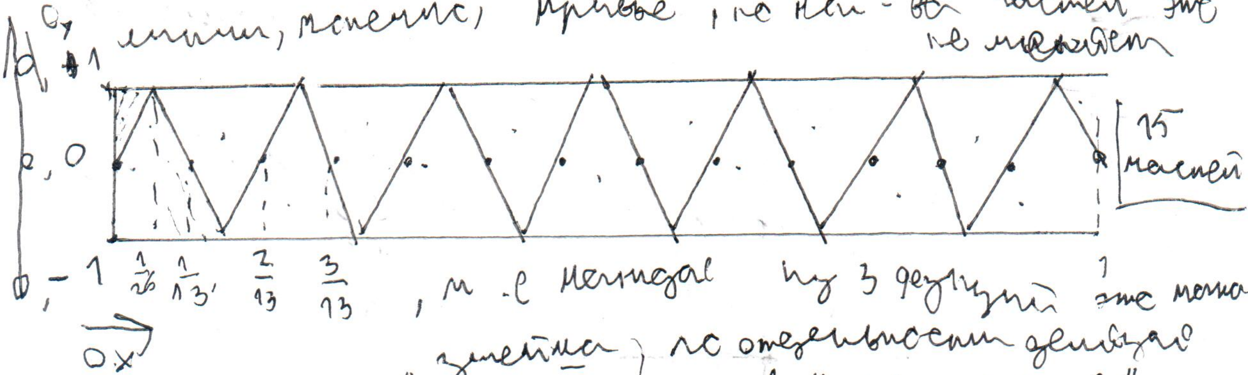
$2187 \cdot 64 = 139968$

Ответ: 139968 $(3^7 \cdot 2^6)$.

Задача 4 ~~Поймем, как~~

Поймем, как примерно ~~выглядит~~ графики 1 такой функции на полосе

линии, ломаные, кривые, но кол-во частей это не меняет



, т.е нечетные из 3 функций это можно заметить), по отдельности делящие полосу на k+2 "части", сделав k+1 "разрезов"

числа 13, 15 и 17 имеют НОД 1, значит верхние и нижние точки нигде не совпадают

на этой же полосе строим условный график для 15

первый разрез дает нам +1 часть (и последний)

все остальные дают по +2 части (+14·2)

итого $15 + 2 + 28 = 45$

Если у нас ~~...~~ добавится еще и график для 17, то первый и последний разрез дадут, опять же по +1 часть

1/30 1/25 +1 часть

+1 но остальные АБ по +3,

т.к. каждый разрез пройдет через 2 линии разреза а не через 1

итого $45 + 2 + 48 = 95$

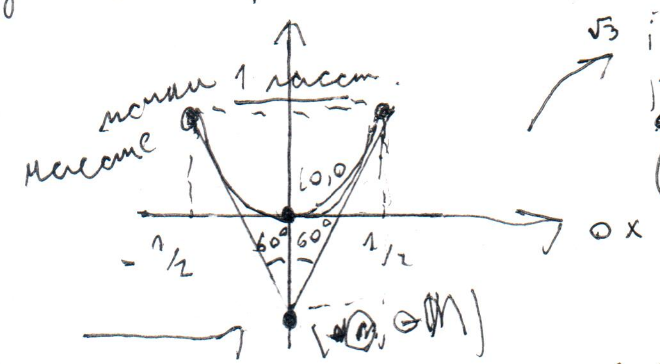
Ответ: 95.

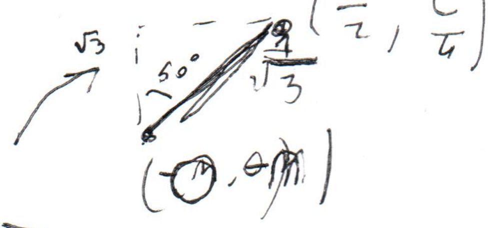
Чистовик

Задача 5

Посмотрим на рисунок:

Линии, проведенные из центра к углам являются касательными к параболе, т.к ~~это пра~~ углы — нулевые, угол между этими касательными — 120°, в правильном Δ-ке это центр, т.к длина „стороны" равна 1, то длина касательной равна $\frac{1}{2} : \sqrt{3} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, посмотрим на одну из парабол:





Впис. окр-ти задача сводится к тому, чтобы найти $|M|$, это и есть радиус впис. окр-ти.

~~расстояние по y между (M) и~~ $\frac{c}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ~~из $\cos 60^\circ$, значит $c = \sqrt{3} \cdot 2$~~

~~Соответственно $M = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{c}{4}$~~

~~$\frac{1}{4} \ldots = \sqrt{3}$~~

$y = C \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{C}{4}$ ур-е касательной (верхней)

$f'\left(\frac{1}{2}\right) \quad \left(x - \frac{1}{2}\right) \quad f\left(\frac{1}{2}\right)$

87-44-67-19 (124.41)

Задача 5 (прод) Чистовик

$f(x) = y = Cx - \frac{C}{4}$

угол 60°, а значит если x меняется на $\sqrt{3}$, то y меняется на 1 $C = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$f(0) = m = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 0 - \frac{1}{4\sqrt{3}} = -\frac{1}{4\sqrt{3}}$

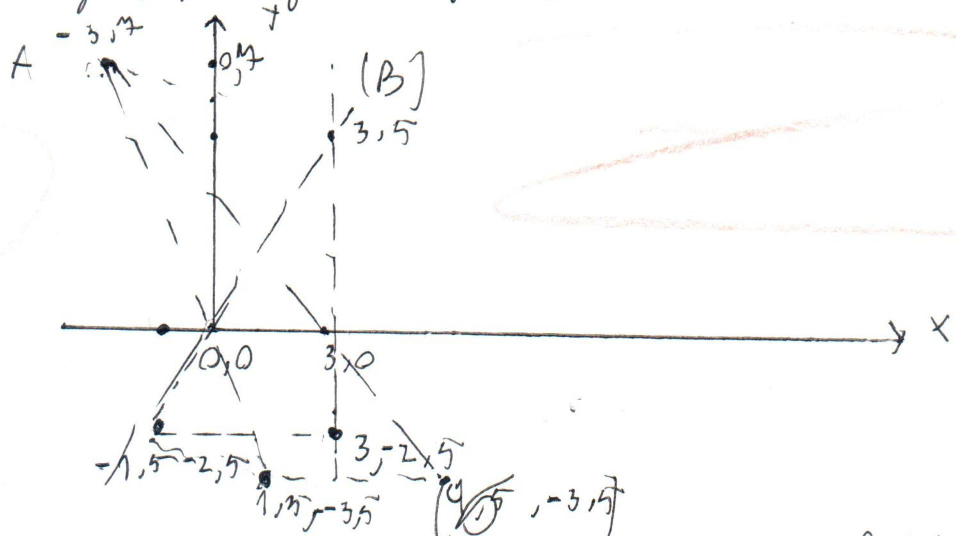
там где 2 нас. пересекаются

Радиус $-(m) = \frac{1}{4\sqrt{3}}$

Ответ: $\frac{1}{4\sqrt{3}}$

Задача 6

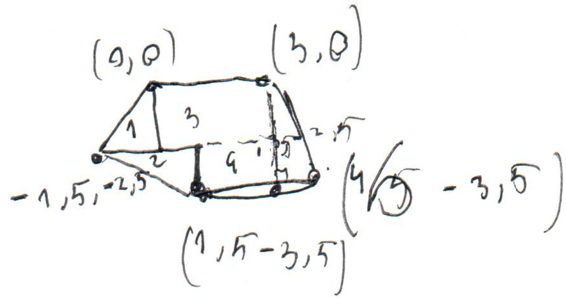
Опираясь на подобие А-в, понимаем, что т. M выстой ~~светлячка~~ в 3 раза больше, то расстояние от светлячка до точки забора в 2 раза больше, чем от точки забора до конца тени



путь концов 2 крайних положений тени, в A и B, а что между ними? Длина границы стыка (самой дальней) - не меняется из-за подобия и равна 4,5 и по мере движения от A к B она движется ~~вверх~~ вверх.

Задание 6 (прод) чистовик.

Итак, имеем площадь фигуры



Нужно её площадь найти

$S_1 = \frac{2,5 \cdot 1,5}{2} = \frac{15}{8}$

$S_2 = \frac{3 \cdot 1}{2} = \frac{6}{4} = \frac{12}{8}$

$S_3 = 3 \cdot 2,5 = \frac{30}{4} = \frac{60}{8}$

$S_4 = 1 \cdot 1,5 = \frac{6}{4} = \frac{12}{8}$

$S_5 = \frac{3,5 \cdot 3}{2} = \frac{21}{4} = \frac{42}{8}$

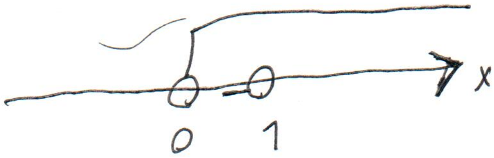
$\frac{15 + \overset{24}{12 \cdot 2} + 42 + 60}{8} = \frac{141}{8}$

Ответ: $\frac{141}{8}$

Задача 17. чистовик

~~черновик~~,

1. логарифмы существуют, это значит, что $x, a > 0$; $x, a \neq 1$



где же у нас полуинтервал иксов либо от 0 до чего-то < 1 либо наоборот, либо от 1 до чего-то > 1

$\log_a x = m$

$8mx^2 - \frac{1}{m} - 2x = 0$

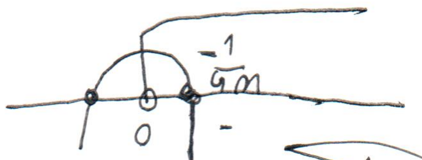
$D = 4 + 32 = 6^2$

$x = \frac{2 \pm 6}{16m} = \frac{1}{2m}; -\frac{1}{4m}$, что, значит разных знаков,

т.е один из x-ов < 0

положим, что $m < 0$ т.е $x < 1$

тогда



но это не полуинтервал, от $-\frac{1}{4}m$ до $+\infty$

~~причем полуинтервал $(0, -\frac{1}{4m})$ и корень $\frac{1}{2m})$~~

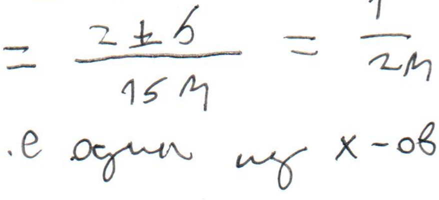
$-\frac{1}{4m} < 1$ $-m < 4$ $m \in (-4, 0)$ $\log_a x \in (-4, 0)$

$\log_x a \in (-\frac{1}{4}, 0)$

при $x \in (0, 1)$

$a \in (0, 1)$

Иначе при $m > 0$



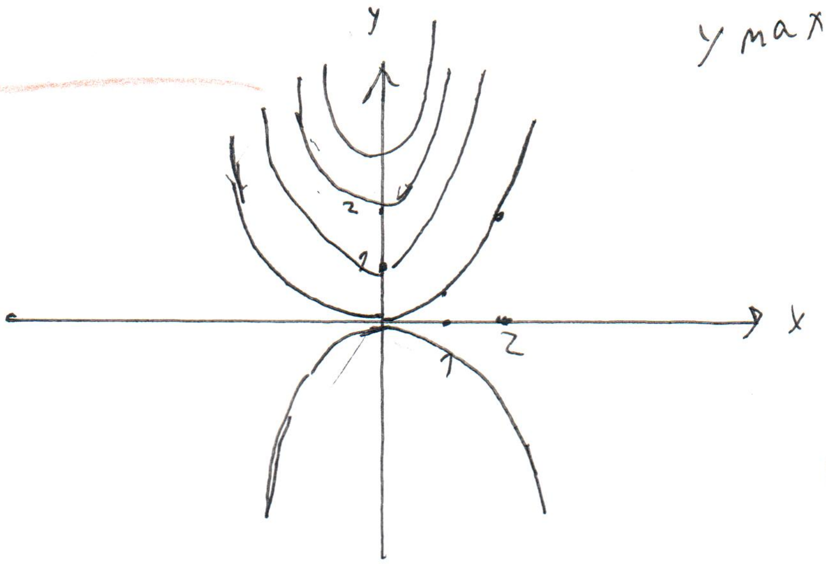
Вместе, только путь ~~...~~ полуинтервал $(0, \frac{1}{2m}]$ и $-\frac{1}{4m}$ $m < \frac{1}{2}$ т.к $x < 1$

$\log_a x \in (0, \frac{1}{2})$ x - максимум ~~...~~, но < 1

значит $a \in (0, 1]$ ответ: $a \in (0, 1)$.

ЧЕРНОВИК

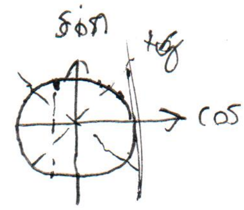
$y_{max} = 10,5$



ЧЕРНОВИК

$\sqrt{5\left(\frac{\cos 2x}{\cos^2 x}\right)} = 4\sin x$

$tg^2 x \leq 1$



$\sqrt{\frac{5\cos 2x}{\cos x}} = 4\sin x$

$2a^2 - 3a - 2 = 0$

$(a-2)(2a+1)$

$\sqrt{5\cos 2x} =$

293

$\frac{162}{9} =$

$\frac{486}{18}$

$-9, \dots$

$\frac{1}{8m} = 0$

9 9 9

4 . 9 . 6

$8mx^2 - 2x + \frac{1}{8m}$

$\frac{81 \cdot 7}{567}$

A: $(C_1; C_2; C_3)$

4 + 4

A: не совпадает?

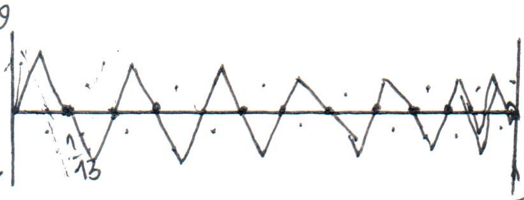
B: не совпадает?

$\frac{81 \cdot 8}{648}$

15

$\frac{81 \cdot 9}{729}$

12000
6000
1080
92
13172



81 · 9 = 729

81
12
162
810
972

729 × 43 = 2187
× 64
8748
13122
139968

18 9.6

9 . 9 . 12