



0 310726 000001

31-07-25-00

(129.11)



31-07-26-00

# МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 2 класс, 2

GMT+4

Выход 14:09 - 14:11

Заяв

Место проведения Ульяновск  
город

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „ Ломоносов ”  
наименование олимпиады

по математике  
профиль олимпиады

Берзниковой Софьи Васильевны  
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

Подпись участника

« 29 » марта 2026 года

31-07-2000

Чистовая *М.В.*  
 Задача 1.  $\sqrt{3(1-\cos^2 x)} = 2\sqrt{2}\sin x$

$$\begin{cases} \sin x \geq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases}$$

$$3\left(1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right) = 8\sin^2 x \Rightarrow \begin{cases} \sin x \geq 0 \\ \cos x \neq 0 \\ \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{8\sin^2 x}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x \geq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases}$$

$$3\cos 2x = 2\sin^2 2x = 1 - \cos^2 2x$$

$$\begin{cases} \sin x \geq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases}$$

$$2\cos^2 2x + 3\cos 2x - 2 = 0$$

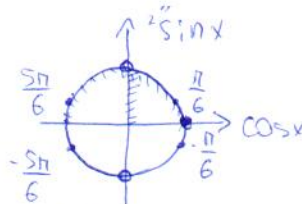
$$\begin{cases} (2\cos 2x - 1)(\cos 2x + 2) = 0 \\ \sin x \geq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases}$$

$$\forall k. |\cos 2x| \leq 1$$

$$\begin{cases} \cos 2x = \frac{1}{2} \\ \sin x \geq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases}$$

$$2x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z})$$

$$\begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n \quad (n \in \mathbb{Z}) \\ \sin x \geq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases}$$



$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Чистовик  
Задача 2.

3-значн  $\Rightarrow \overline{abc}$

$$\frac{100a+10b+c}{a+b+c} = 9k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$(100a+10b+c) : 9 \Rightarrow (a+b+c) : 9$$

$$(100a+10b+c) = 9k \cdot \frac{(a+b+c)}{9}$$

$$100a+10b+c : 81$$

$$100a+10b+c \in \{162; 243; 324; 405; 486; 567; 648; 729; 810; 891; 972\}$$

$$162 : (1+6+2) = 18 : 9$$

$$243 : (2+4+3) = 27 : 9$$

$$324 : (3+2+4) = 36 : 9$$

$$405 : (4+0+5) = 45 : 9$$

$$486 : (4+8+6) = 27 : 9$$

$$567 \neq (5+6+7)$$

$$648 : (6+4+8) = 36 : 9$$

$$729 \neq (7+2+9)$$

$$810 : (8+1) = 90 : 9$$

$$891 \neq (8+9+1)$$

$$972 : (9+7+2) = 54 : 9$$

$$S_{\text{чек}} = 162 + 648 + 972 = 1782$$

Ответ: 1782.

31-07-25-00  
(129.1)

Чистовик

Задача 3

$$\begin{matrix} x \in [-6; 6] & x \in \mathbb{Z} \\ y \in [-6; 6] & y \in \mathbb{Z} \\ z \in [-6; 6] & z \in \mathbb{Z} \end{matrix}$$

Будем считать  $\Delta$  по прямой углу:

Всего вар-в точки в прямом угле:  $13^3$  (любая точка).

Т.к. катеты параллельны осям координат  $\Rightarrow$  с ~~каждой~~

каждой из оставшихся вершин  $y$  и  $z$  совпадает 2 координаты; а 3-я принимает любое значение в соответствующей оси из 12 вар-в (т.к. 1 уже занят прямой углом)

$$\begin{matrix} \text{Всего: } 13^3 \cdot 12^2 \cdot 3 \cdot 2 & - \text{здесь также подсчитаны} \\ \text{(прямой } \Delta) & \text{р/в } \Delta. \\ \downarrow & \text{выбор} \\ \text{координаты} & \text{осей} \\ \text{оставшихся} & \text{катетов} \end{matrix}$$

Для точки с координатами  $(x, y, z)$

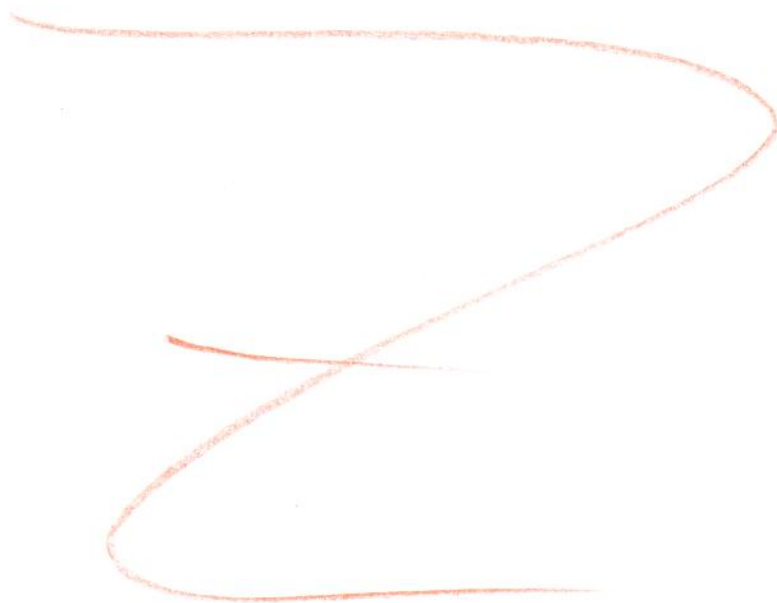
$$\text{кол-во р/в } \Delta = \max(6-|x|, 6-|y|) + \max(6-|x|, 6-|z|) + \max(6-|y|, 6-|z|)$$

с прямым углом в ней.

Все координаты  $6/-6 \Rightarrow 8$  точек  $\Rightarrow$  р/в  $\Delta - 36$ .

Все 2 коор:  $6/-6 \Rightarrow 4 \cdot 11$  точек  $\Rightarrow$  р/в  $\Delta - 36$

1 коор:  $6/-6 \Rightarrow$  ~~24~~ р/в  $\Delta$ .  $\geq 30$  р/в  $\Delta$ .





31-07-25-00  
(22.15)

Числовик

Задача 4.

$$x \in [0; 1] \Rightarrow \pi x \in [0; \pi]$$

$$k\pi x \in [0; k\pi]$$

$$k=11 \Rightarrow 12 \text{ корней } y = \sin k\pi x \text{ от } 0 \text{ до } 1$$

$$k=13 \Rightarrow 14 \text{ корней}$$

$$k=15 \Rightarrow 16 \text{ корней}$$

$$\sin k\pi x = \sin d\pi x$$

$$\text{при } \sin \frac{k\pi x - d\pi x}{2} = 0 \text{ или } \cos \frac{k\pi x + d\pi x}{2} = 0$$

сопадают корни только на концах отрезка.

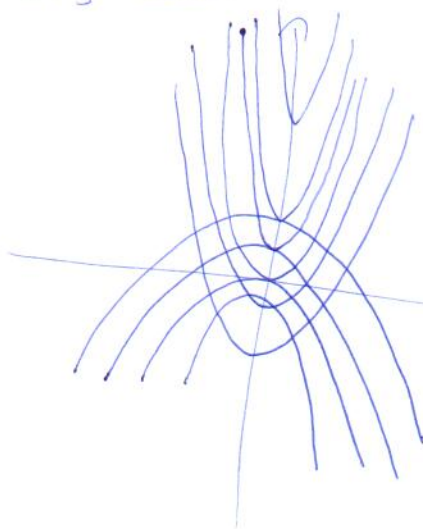
$$\text{Всего } 11 \cdot 13 \cdot 15 - 1 = 2144 \text{ области.}$$

Ответ: 2144.

Задача 7.

Пересекаются параболы  $bx^2+a \neq 2\sqrt{2}ax - 2x^2+b$ .  
При этом точки пересечения имеют координаты:  $(\pm \frac{\sqrt{b-a}}{2}; \frac{a+b}{2})$ .

Самая нижняя парабола с коэфф. 2 при  $\sqrt{2}$  имеет наибольшее кол-во пересечений с другими пар. её вершина имеет коорд:  $(0; -10)$   
Она вышится на 20 при  $x = \sqrt{10} < \frac{29.7}{20} \Rightarrow$  она пересекает верхнюю границу места.



Клеточками является пересечение парабол:  $2x^2=a; 2x^2+a=1$  ( $b>a+1$ )  
 $-2x^2+b; -2x^2=b+1$

координаты пересеч. (с одним знаком; п.к. ближайшие):

$$\left(\frac{\sqrt{b-a}}{2}; \frac{a+b}{2}\right); \left(\frac{\sqrt{b-a}}{2}; \frac{a+b+1}{2}\right)$$

$$\left(\frac{\sqrt{b-a-1}}{2}; \frac{a+b+1}{2}\right); \left(\frac{\sqrt{b-a}}{2}; \frac{a+b+2}{2}\right)$$

2 точки имеют  $y_1=y_2; a2; x_3=x_4 \Rightarrow$

$$S_{4-3x} = \frac{|x_1-x_2| \cdot |y_3-y_4|}{2} = \frac{(\sqrt{b-a}-\sqrt{b-a-1}) \cdot 2}{8}$$

Числовая

$$\sqrt{b+1-a} - \sqrt{b-1-a} \stackrel{?}{=} \sqrt{(2)-25\dots} \leq \sqrt{2} < 2$$

(b+1-a-b+1-a=2)

$$S_{a-y} \leq \frac{1}{2}$$

Рассмотрим клетки, расположенные с одинаком на разных сторонах  $x$  от  $Oy \Rightarrow$  их  $S = \frac{1}{2} (1 - y_1 - y_2; 1 - x_1 - x_2)$

(т.к.  $x_1 - y_2 = 2x_1 = 2 \cdot \frac{\sqrt{b-a}}{2} = 1$ )

Ответ:  $S_{\text{клеток}} = \frac{1}{2}$ .

Задача 8.

$$3x^2 \log_a x - \log_a a - 2x \leq 0 \quad \text{Q3: } a, x \neq 1$$

$$3x^2 \log_a^2 x - 2x \log_a x - 1 \leq 0 \quad a, x > 0$$

$$x \log_a x \in \left[-\frac{1}{3}; 1\right] \Rightarrow \text{числ.} \leq 0$$

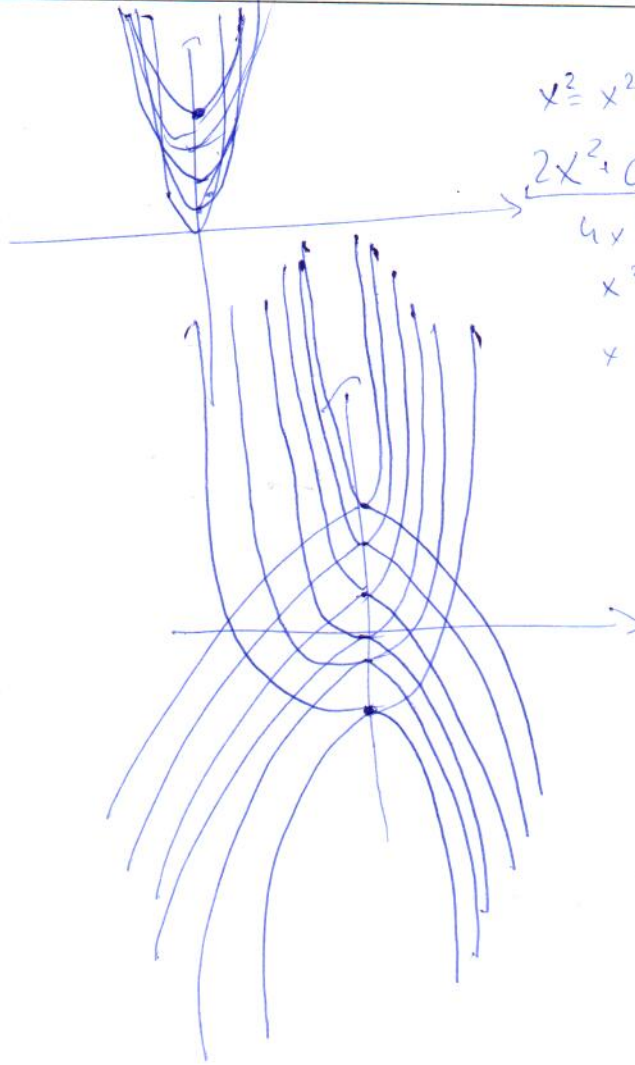
$$\begin{cases} x \log_a x \in \left[-\frac{1}{3}; 1\right] \\ \log_a x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^x \in [a^{-\frac{1}{3}}; a] \quad (a > 1) \\ x^x \in [a; a^{\frac{1}{3}}] \quad (a < 1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_a x < 0 \\ x \log_a x \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right] \cup \left[1; +\infty\right) \end{cases}$$

$x^x \downarrow$  на  $x \in (0; 1)$ ;  $x^x \uparrow$  на  $x \in (1; +\infty)$



Черносек



$$x^2 = x^2 + 1$$

$$2x^2 + a = -2x^2 + b$$

$$4x^2 = b - a$$

$$x^2 = \frac{b - a}{4}$$

$$x = \pm \frac{\sqrt{b - a}}{2}$$

$$\frac{b - a}{2} = \frac{a - b}{2}$$

$$\frac{a - b}{2} = b \quad \frac{a + b}{2}$$



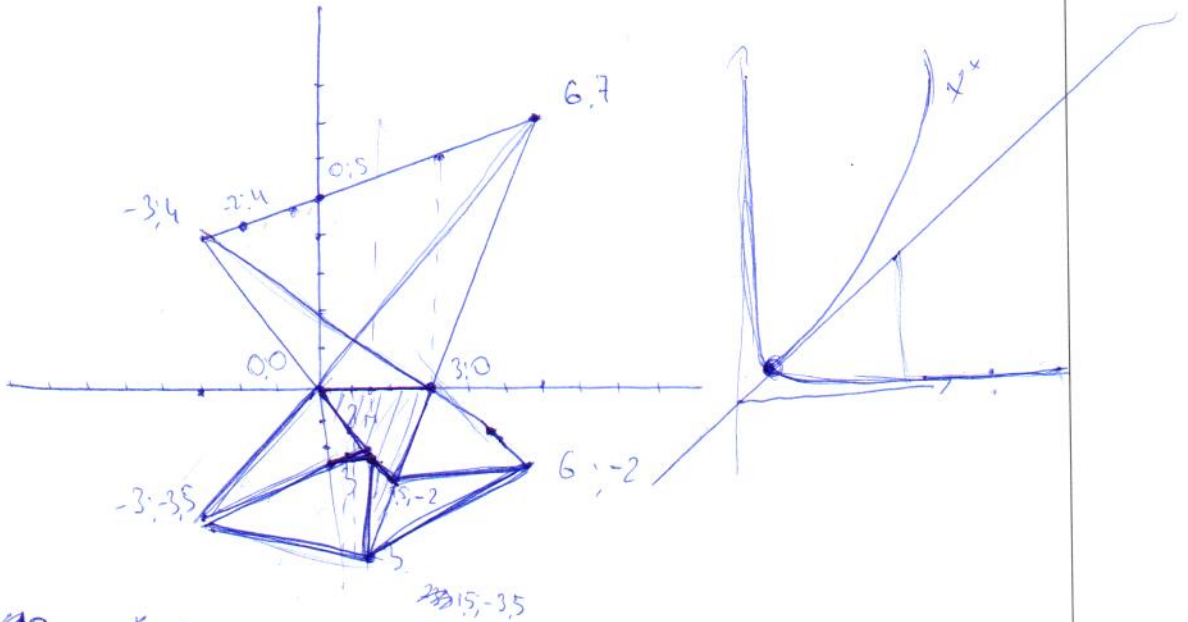
$$x^x = y^y$$

$$x < y < 1$$

$$x^x > x^y > y^y$$



Черновик



$$\sin k\pi x = \sin d\pi x$$

$$2 \sin \frac{k\pi x - d\pi x}{2} \cdot \cos \frac{k\pi x + d\pi x}{2} = 0$$

$$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

~~Handwritten scribbles and crossed-out text.~~

$$\sin \frac{\pi(11a-13a)}{2} \quad \text{---} \quad \frac{\pi}{2} + \pi k = \pi(ka) \cdot x$$

$$3x^2 \log_a x - \log_a x - 2x < 0$$

$$a \neq 1 \quad a > 0$$

$$x \neq 1$$

$$x > 0$$

$$3x^2 \log_a x - \frac{1}{\log_a x} - 2x < 0$$

$$3x^2 / \log_a^2 x - 2x \cdot \log_a x - 1 < 0$$

$$\left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{1}{10}} > \frac{1}{5}$$

$$x \cdot \log_a x > \frac{1}{\log_a x}$$

$$\frac{1}{\sqrt[10]{10}} > \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$3t^2 - 2t - 1 < 0$$

$$\frac{1}{10} > \frac{1}{25}$$

$$(3t+1)(t-1) < 0$$

$$t \in \left[-\frac{1}{3}; 1\right]$$

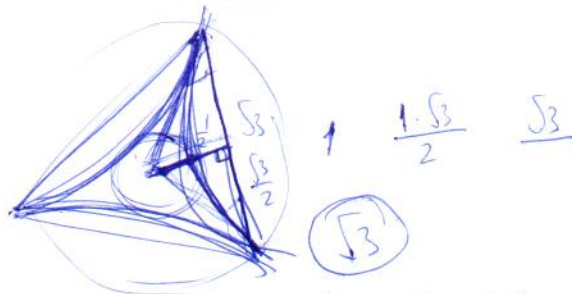
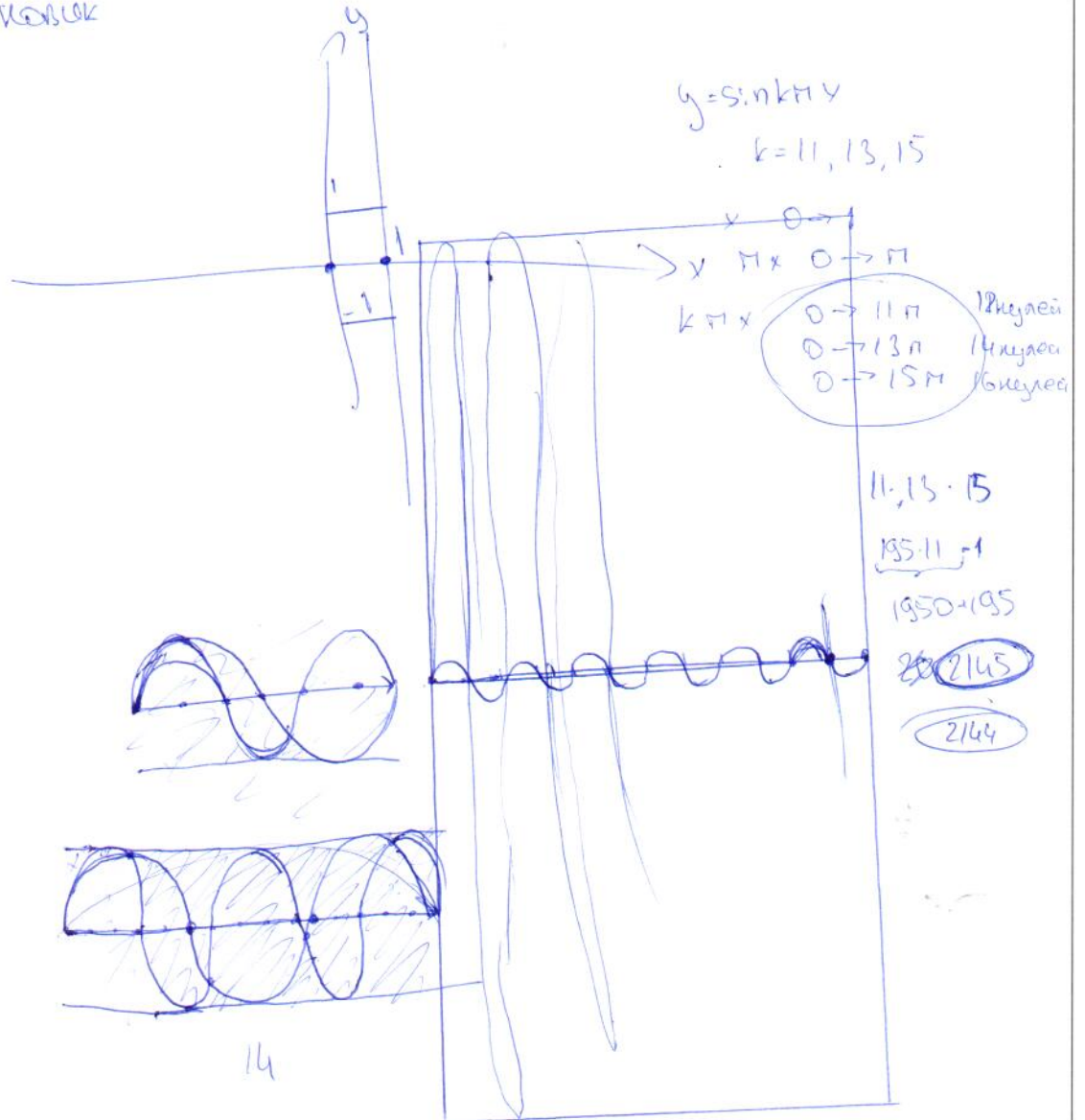
$$\frac{(3x \log_a x + 1) / (x \log_a x) - 1}{\log_a x} < 0 \quad x \cdot \log_a x \in \left[-\frac{1}{3}; 1\right]$$

$$(a^{\log_a x})^x \in [a^{-\frac{1}{3}}; a]$$

Числ.  $\leq 0$  при  $x \in [a^{-\frac{1}{3}}; a]$   
 $\log_a x \geq 0$  при

$$x \in [a^{-\frac{1}{3}}; a] \quad a > 1$$

Черновик



$r = \frac{1}{2} - c \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4} (2 - 3c)$



$2c \cdot \sqrt{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$   
 $c = \frac{1}{6}$

$r = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

Черновик

$$\sqrt{3(1-\operatorname{tg}^2 x)} = 2\sqrt{2} \sin x$$

$$\sin x \geq 0 \quad \cos x \neq 0$$

$$8 \sin^2 x = 3 - 3 \operatorname{tg}^2 x = 3 \left( \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x} \right)$$

$$8 \sin^2 x \cdot \cos^2 x = 3 \cos 2x$$

$$2 \sin^2 2x = 3 \cos 2x$$

$$2 - 2 \cos^2 2x = 3 \cos 2x$$

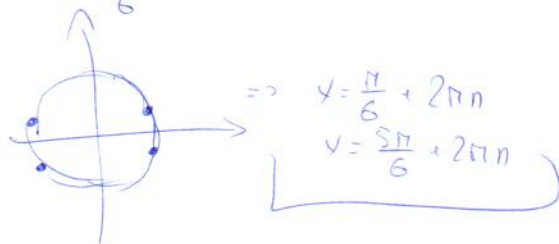
$$2 \cos^2 2x + 3 \cos 2x - 2 = 0$$

$$(2 \cos 2x - 1)(\cos 2x + 2) = 0$$

$$\cos 2x = \frac{1}{2}$$

$$2x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$$

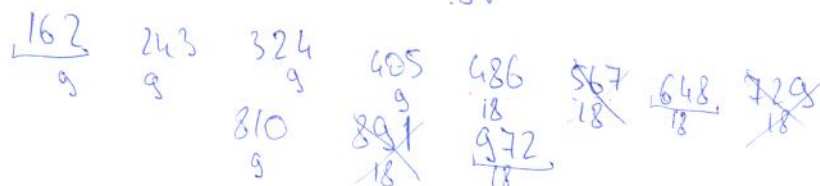
$$x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n$$



$$\overline{abc} \quad a+b+c$$

$$100a + 10b + c = 9k(a+b+c)$$

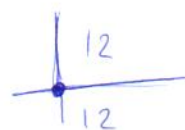
$$\div 9 \Rightarrow a+b+c \div 9 = ? \quad : 81$$



$$\forall 92 \in \mathbb{Z} \quad \forall 43 \in \mathbb{G}$$



$$13 \times 13$$



$$12 \cdot 12 = 3$$