0 282785 450006

28-27-05-46
(124.33)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11 класс, вар. 5

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Блинова Тимофея Сергеевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата «29» марта 2026 года

Подпись участника

85 (Восемьдесят пять)

28-27-05-46 (121.53)

Задача 1 | Чистовик

$$\sqrt{6(1-tg^2x)} = 4\sin x$$

$$\Updownarrow$$

$1 + tg^2x = \frac{1}{\cos^2 x}$

$tg^2x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$

$$\begin{cases} 6(1-tg^2x) = 16\sin^2 x \\ \sin x \geq 0 \end{cases}$$

ОДЗ: $\cos x \neq 0$

$$\begin{cases} 6\left(2 - \frac{1}{\cos^2 x}\right) = 16 - 16\cos^2 x \\ \sin x \geq 0 \end{cases}$$

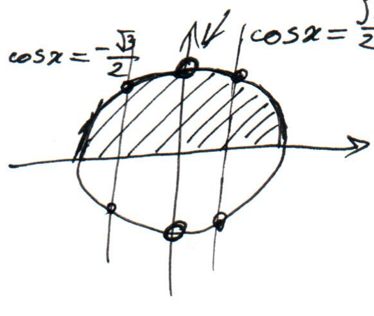
$$\begin{cases} 12 - \frac{6}{\cos^2 x} = 16 - 16\cos^2 x \\ \sin x \geq 0 \end{cases} \qquad t = \cos^2 x \geq 0$$

$$\begin{cases} 12 - \frac{6}{t} - 16 + 16t = 0 \\ \sin x \geq 0 \end{cases} \quad | \, t \neq 0 \qquad D = 100$$

$$\begin{cases} -6 - 4t + 16t^2 = 0 \\ \sin x \geq 0 \end{cases} \qquad \cancel{16t^2 - 4t} \qquad \begin{cases} 8t^2 - 2t - 3 = 0 \\ \sin x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t \in \left\{\frac{2 \pm 10}{16}\right\} \\ \sin x \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t = \frac{3}{4} \\ t = -\frac{1}{2} \text{ — невозможно, т.к. } t \geq 0 \end{array}\right. \\ \sin x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cancel{\cos x = 0} \end{array}\right. \\ \sin x \geq 0 \end{cases}$$



Ответ:

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \end{array}\right. \quad k \in \mathbb{Z}$$

Задача 2

Если $x \in A$, т.е. $\frac{x}{\text{сумма цифр } x} \vdots 9$, то $x \vdots 9$

~~Переберем трехзначные числа, кратные 9 и проверим для них:~~

$\cancel{\frac{108}{9}} =$ Первым трехзначным числом, кратным 9, будет 108.

Все последующие получаются прибавлением 9 к предыдущему.

~~Заметим, что прибавление 9 к числу изменяет его его~~

$\cancel{\frac{x}{9}}$

$\boxed{\text{Чистовик}}$

Переберем первые трехзначные числа, кратные 9:

$\frac{108}{9}=12$ $\quad$ $\frac{117}{9}=13$ $\quad$ $\frac{126}{9}=14$ $\quad$ $\frac{135}{9}=15$ $\quad$ $\frac{144}{9}=16$

$\frac{153}{9}=17$ $\quad$ $\frac{162}{9}=18$ ✓ $\quad$ $\frac{171}{9}=19$ $\quad$ $\frac{180}{9}=20$ $\quad$ $\frac{189}{18}\notin\mathbb{Z}$

первое подходящее

$\frac{198}{18}=11$ $\quad$ $\frac{207}{9}=23$ $\quad$ $\frac{216}{9}=24$ $\quad$ $\frac{225}{9}=25$ $\quad$ $\frac{234}{9}=26$

$\frac{243}{9}=27$ ✓ $\quad$ $\frac{252}{9}=28$ $\quad$ $\frac{261}{9}=29$ $\quad$ $\frac{270}{9}=30$ $\quad$ $\frac{279}{18}\notin\mathbb{Z}$

второе подходящее

$\frac{288}{18}=16$ $\quad$ $\frac{297}{18}\notin\mathbb{Z}$ $\quad$ $\frac{306}{9}=34$ $\quad$ $\frac{315}{9}=35$ $\quad$ $\frac{324}{9}=36$ ✓

третье подходящее

$\frac{333}{9}=37$ $\quad$ $\frac{342}{9}=38$ $\quad$ $\frac{351}{9}=39$ $\quad$ $\frac{360}{9}=40$ $\quad$ $\frac{369}{18}\notin\mathbb{Z}$

$\frac{378}{18}=21$ $\quad$ $\frac{387}{18}\notin\mathbb{Z}$ $\quad$ $\frac{396}{18}=22$ $\quad$ $\frac{405}{9}=\cancel{40}\;45$ ✓ $\quad$ $\frac{414}{9}=46$

четвертое

$\frac{423}{9}=47$ $\quad$ $\frac{432}{9}=48$ $\quad$ $\frac{441}{9}=49$ $\quad$ $\frac{450}{9}=50$ $\quad$ $\frac{459}{18}\notin\mathbb{Z}$

$\frac{468}{18}=26$ $\quad$ $\frac{477}{18}\in\mathbb{Z}$ $\quad$ $\frac{486}{18}=27$ ✓ $\quad$ $\frac{495}{18}\notin\mathbb{Z}$ $\quad$ $\frac{504}{9}=56$

пятое

$\frac{513}{9}=57$ $\quad$ $\frac{522}{9}=58$ $\quad$ $\frac{531}{9}=59$ $\quad$ $\frac{540}{9}=60$ $\quad$ $\frac{549}{18}\notin\mathbb{Z}$ $\quad$ $\frac{558}{18}=31$

$\frac{567}{18}\notin\mathbb{Z}$ $\quad$ $\frac{576}{18}=32$ $\quad$ $\frac{585}{18}\notin\mathbb{Z}$ $\quad$ $\frac{594}{18}=33$ $\quad$ $\frac{603}{9}=67$

$\frac{612}{9}=68$ $\quad$ $\frac{621}{9}=69$ $\quad$ $\frac{630}{9}=70$ $\quad$ $\frac{639}{18}\notin\mathbb{Z}$ $\quad$ $\frac{648}{18}=36$ ✓ $\quad$ $\frac{657}{18}\notin\mathbb{Z}$

шестое

$\frac{666}{18}=37$ $\quad$ $\frac{675}{18}\notin\mathbb{Z}$ $\quad$ $\frac{684}{18}=38$ $\quad$ $\frac{693}{18}\notin\mathbb{Z}$ $\quad$ $\frac{702}{9}=78$ $\quad$ $\frac{711}{9}=79$

$\frac{720}{9}=80$ $\quad$ $\frac{729}{18}\notin\mathbb{Z}$ $\quad$ $\frac{738}{18}=41$ $\quad$ $\frac{747}{18}\notin\mathbb{Z}$ $\quad$ $\frac{756}{18}=42$ $\quad$ $\frac{765}{18}\notin\mathbb{Z}$

$\frac{774}{18}=43$ $\quad$ $\frac{783}{18}\notin\mathbb{Z}$ $\quad$ $\frac{792}{18}=44$ $\quad$ $\frac{801}{9}=69$ $\quad$ $\frac{810}{9}=90$ ✓

седьмое

$\frac{819}{18}\notin\mathbb{Z}$ $\quad$ $\frac{828}{18}=46$ $\quad$ $\frac{837}{18}\notin\mathbb{Z}$ $\quad$ $\frac{846}{18}=47$ $\quad$ $\frac{855}{18}\notin\mathbb{Z}$ $\quad$ $\frac{864}{18}=48$ $\quad$ $\frac{873}{18}\notin\mathbb{Z}$

$\frac{882}{18}=49$ $\quad$ $\frac{891}{18}\notin\mathbb{Z}$ $\quad$ $\frac{900}{9}=100$ $\quad$ $\frac{909}{18}\notin\mathbb{Z}$ $\quad$ $\frac{918}{18}=51$ $\quad$ $\frac{927}{18}\notin\mathbb{Z}$ $\quad$ $\frac{936}{18}=52$

$\frac{945}{18}\notin\mathbb{Z}$ $\quad$ $\frac{954}{18}=53$ $\quad$ $\frac{963}{18}\notin\mathbb{Z}$ $\quad$ $\frac{972}{18}=54$ ✓ $\quad$ $\frac{981}{18}\notin\mathbb{Z}$ $\quad$ $\frac{990}{18}=55$ $\quad$ $\frac{999}{27}=37$

(Чистовик)

Таким образом, все подходящие трехзначные числа:

162 243 324 405 486 648 810 972

Сумма ~~на~~ второго, шестого и последнего: $243+648+972=$

$$= \begin{array}{r} 243 \\ + \; 648 \\ 972 \\ \hline 1863 \end{array}$$

Ответ: 1863

Задача 3

Каждая координата может принимать 9 значений

Всего точек ~~бы~~ 9^3

Тогда общее количество треугольников:

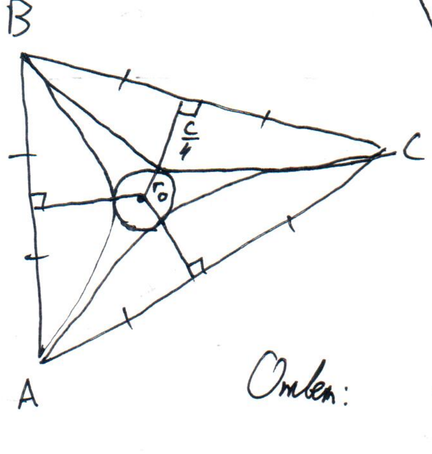
$$A = \underbrace{9^3}_{\text{кол-во способов выбрать прямой угол}} \cdot \underbrace{3}_{\text{кол-во способов выбрать две различных оси для катетов}} \cdot \underbrace{8}_{\text{количество способов выбрать катет на одной оси}} \cdot \underbrace{8}_{\text{на другой}} =$$

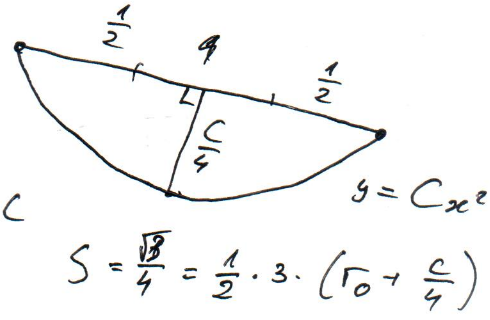
$= \cancel{...} \; 729 \cdot 192 =$

$= 139968$

$$\begin{array}{r} \times \; 729 \\ 192 \\ \hline 1458 \\ + \; 6561 \\ 729 \\ \hline 139968 \end{array}$$

Задача 5





$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \left(r_0 + \frac{c}{4}\right)$$

$$r_0 + \frac{c}{4} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

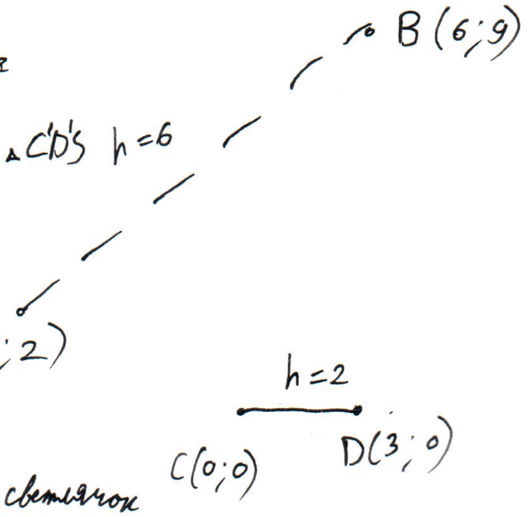
Ответ: $r_0 = \frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{c}{4}$

Чистовик

Задача 6

~~$CD \parallel C'D'$ по обобщ. теореме Фалеса~~

$\frac{CD}{C'D'} = \frac{2}{3}$ из подобия $\triangle CDS$ и $\triangle C'D'S$ $h=6$



Тогда при движении S движутся C' и D', образуя трапецию CDD'C'

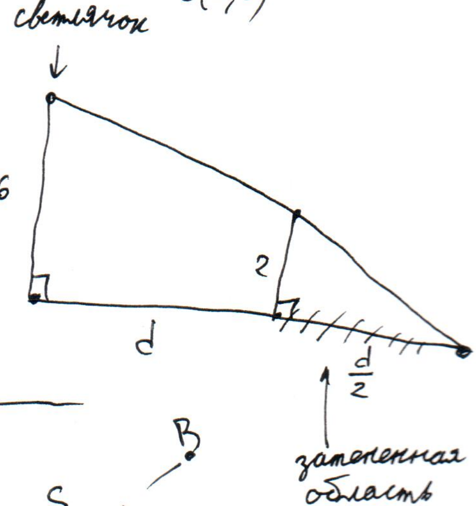
$A = (-5; 2)$

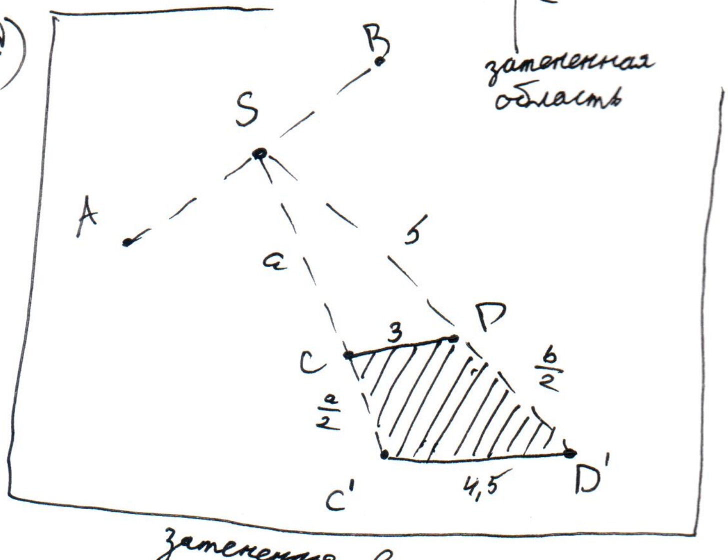
$B = (6; 9)$

$S = \left(-5+11\lambda;\ 2+7\lambda\right)$ при $\lambda \in [0;1]_6$

$C' = \left(\frac{5-11\lambda}{2};\ \frac{-2-7\lambda}{2}\right)$ из центральной симметрии отн. C

$D' = \left(\frac{14-11\lambda}{2};\ \frac{-2-7\lambda}{2}\right)$ отн. D





Затененная в какой-то момент область

Найдем траекторию т. C':

$$\begin{cases} x = \frac{5-11\lambda}{2} & |2 \\ y = \frac{-2-7\lambda}{2} & |2 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = 5-11\lambda & |7 \\ 2y = -2-7\lambda & |11 \end{cases} \quad \begin{cases} 14x = 35-77\lambda \\ 22y = -22-77\lambda \end{cases}$$

$14x - 22y = 57$

$y = \frac{7x}{11} - \frac{57}{22}$

При $\lambda \in [0;1]$ ~~хот~~ $x \in \left[-3; \frac{5}{2}\right]$

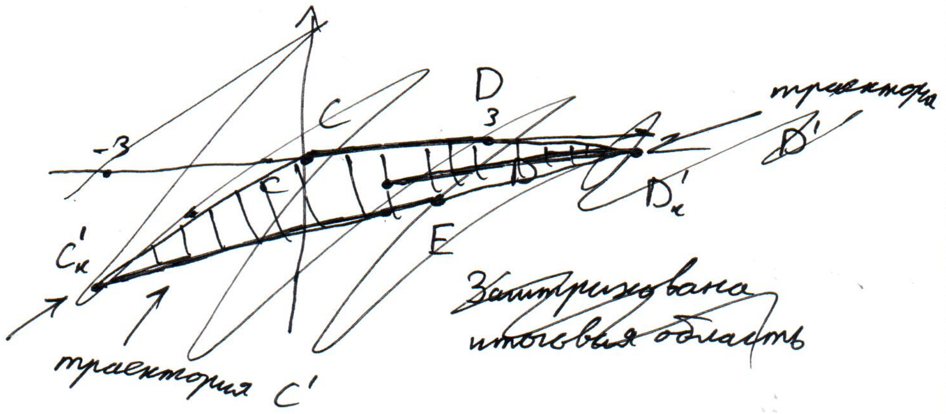
Найдем траекторию т. D': $\boxed{\text{Чистовик}}$

$$\begin{cases} x = \dfrac{14-11\lambda}{2} & \big| 2 \\ y = \dfrac{-2-7\lambda}{2} & \big| 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = 14 - 11\lambda & \big| 7 \\ 2y = -2 - 7\lambda & \big| 11 \end{cases} \quad \begin{cases} 14x = 98 - 77\lambda \\ 22y = -22 - 77\lambda \end{cases}$$

$$14x - 22y = 120$$

При $\lambda \in [0; 1]$ $x \in \left[\frac{3}{2}; 7\right]$

$$y = \frac{7x}{11} - \frac{60}{11}$$



$C = (0; 0)$ $\quad$ $D = (3; 0)$ $\quad$ $C'_к = (\cancel{\ } -3; -\frac{9}{2})$ – подставили $x = -3$ в траекторию C'

$D'_к = (7; -1)$ – подставили $x = 7$ в траекторию D'

$$S_{CDFC'_к} = \frac{3 + \frac{9}{2}}{2} \cdot \frac{9}{2} = \frac{135}{8}$$

$E = \left(\frac{5}{2}; -1\right)$ – подставили $x = \frac{5}{2}$ в траекторию C'

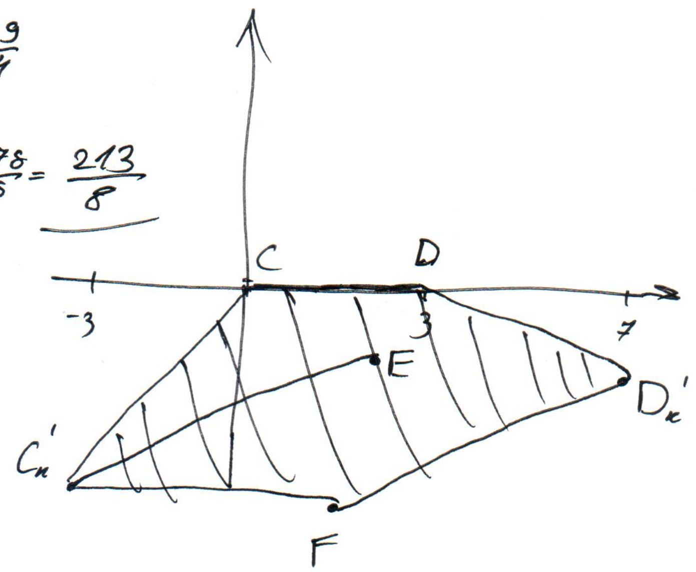
$F = \left(\frac{3}{2}; -\frac{9}{2}\right)$ – подставили $x = \frac{3}{2}$ в траекторию D'

$$S_{FDD'_к} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{DD'_к} \times \overrightarrow{DF}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|4 \cdot \left(-\frac{9}{2}\right) - (-1)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|-18 - \frac{3}{2}\right| = \frac{39}{4}$$

$$S = \frac{135}{8} + \frac{39}{4} = \frac{135}{8} + \frac{78}{8} = \underline{\frac{213}{8}}$$



Ответ: $\frac{213}{8}$

$\boxed{\text{Чистовик}}$

Задача 8

~~$2x(4x\log_a x - \frac{1}{\log_a x}) \geq 0$~~

$$8x^2 \cdot \log_a x - \frac{1}{\log_a x} - 2x \geq 0$$

ОДЗ:
$$\begin{cases} a > 0 \\ x > 0 \\ a \neq 1 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$$t = \log_a x \qquad x = a^t$$

$$8a^{2t} \cdot t - \frac{1}{t} - 2a^t \geq 0$$

~~$8a^{2t}$~~

$$\frac{8 \cdot (a^t \cdot t)^2 - 2 \cdot (a^t \cdot t) - 1}{t} \geq 0$$

Найдем корни
$$8 \cdot (a^t \cdot t)^2 - 2 \cdot (a^t \cdot t) - 1 = 0$$

$$\frac{\left(a^t \cdot t - \frac{1}{2}\right)\left(a^t \cdot t + \frac{1}{4}\right)}{t} \geq 0 \qquad \Big| : a^t > 0$$

отн. $y = a^t \cdot t$

$8y^2 - 2y - 1 = 0$

$D = 36$

$y_{1,2} = \frac{2 \pm 6}{16}$

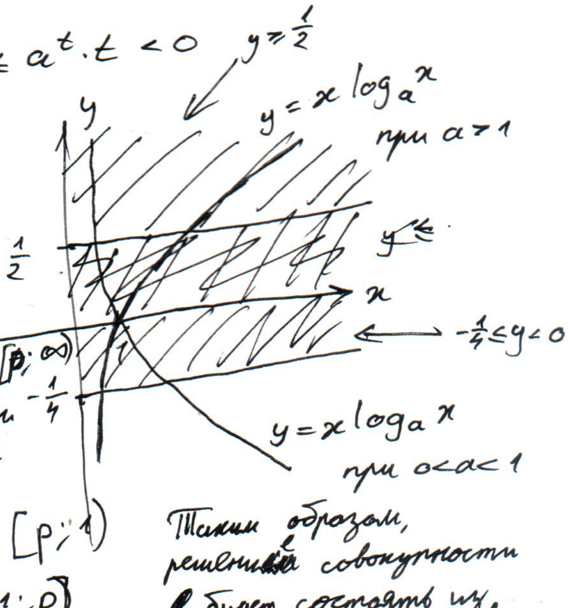
корни: $\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{4}$

$$\frac{\left(y - \frac{1}{2}\right)\left(y + \frac{1}{4}\right)}{y} \geq 0$$

$-$ $+$ $-$ $+$; $-\frac{1}{4}$, 0, $\frac{1}{2}$

$$\left[\begin{array}{l} y \geq \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} \leq y < 0 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} a^t \cdot t \geq \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} \leq a^t \cdot t < 0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{ll} x \log_a x \geq \frac{1}{2} & (1) \\ -\frac{1}{4} \leq x \log_a x < 0 & (2) \end{array}\right.$$



При $a > 1$ решение (1) – полуинтервал $[p; \infty)$ с правой границей на бесконечности

При $0 < a < 1$ решение (1) – полуинтервал $(0; p]$

При $a > 1$ решение (2) – полуинтервал $[p; 1)$

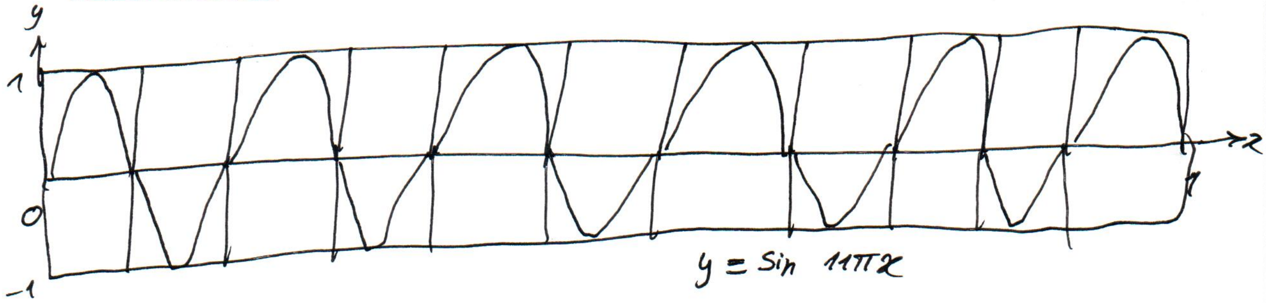
При $0 < a < 1$ решение (2) – полуинтервал $(1; p]$

Таким образом, решение совокупности будет состоять из полуинтервалов всегда

Чистовик

Ответ: ни при каких

Задача 4



Найдем т. пересечения графиков:

1) $\sin 11\pi x = \sin 15\pi x$

$\sin 15\pi x - \sin 11\pi x = 0$

$2\sin 2\pi x \cos 13\pi x = 0$

2) $\sin 11\pi x = \sin 17\pi x$

$\sin 17\pi x - \sin 11\pi x = 0$

$2\sin 3\pi x \cos 19\pi x = 0$

3) $\sin 15\pi x = \sin 17\pi x$

$\sin 17\pi x - \sin 15\pi x = 0$

$2\sin \pi x \cos 16\pi x = 0$

~~Korna~~:

$\left[\begin{array}{l}\sin 2\pi x = 0\\ \cos 13\pi x = 0\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\sin 3\pi x = 0\\ \cos 19\pi x = 0\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\sin \pi x = 0\\ \cos 18\pi x = 0\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}2\pi x = \pi k\\ 13\pi x = \frac{\pi}{2} + \pi k\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}3\pi x = \pi k\\ 19\pi x = \frac{\pi}{2} + \pi k\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\pi x = \pi k\\ 18\pi x = \frac{\pi}{2} + \pi k\end{array}\right.$

$k \in \mathbb{Z}$

1 реш. на (0; 1)

$\left[\begin{array}{l}x = \frac{k}{2}\\ x = \frac{1}{26} + \frac{k}{13}\end{array}\right.$

12 реш. на (0; 1)

2 реш. на (0; 1)

$\left[\begin{array}{l}x = \frac{k}{3}\\ x = \frac{1}{38} + \frac{k}{19}\end{array}\right.$

18 реш. на (0; 1)

0 реш. на (0; 1)

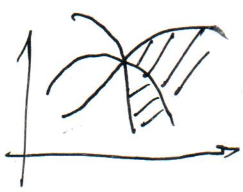
$\left[\begin{array}{l}x = k\\ x = \frac{1}{36} + \frac{k}{18}\end{array}\right.$

17 реш. на (0; 1)

$k \in \mathbb{Z}$

Если в одной точке не на краю пересекаются 2 графика, это добавляет 1 новую область

Если три графика, то две



Изначально областей 3:

Всего точек пересечения графиков $1+12+2+18+17=50$, тогда всего 53 области

Чистовик

Задача 7

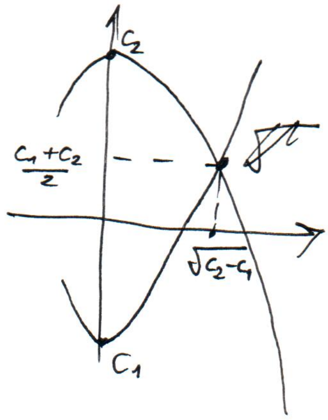
~~1)~~ Пересечься могут только параболы вида $y=\frac{x^2}{2}+c_1$ и $y=-\frac{x^2}{2}+c_2$

$$\frac{x^2}{2}+c_1=-\frac{x^2}{2}+c_2$$

$$x^2=c_2-c_1$$

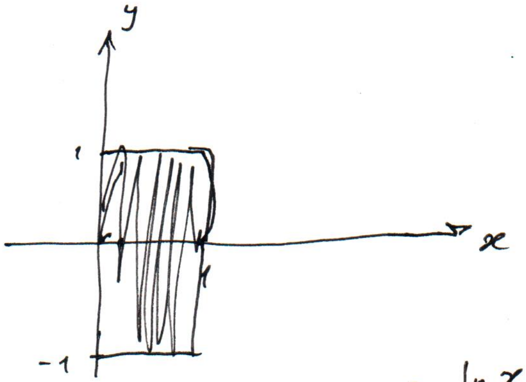
$$x\in\{\pm\sqrt{c_2-c_1}\}$$

$$y=\frac{c_1+c_2}{2}$$



Черновик

$1+tg^2x=\frac{1}{\cos^2x}$

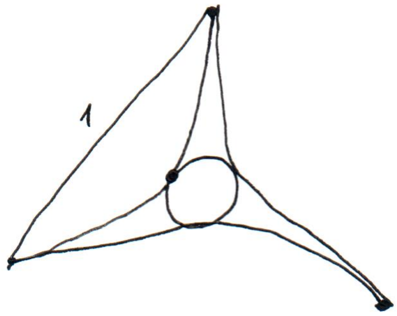


$8x^2\cdot\frac{\ln x}{\ln a}-\frac{\ln a}{\ln x}-2x\geq0$

$2x\left(4x\cdot\frac{\ln x}{\ln a}-\frac{\ln a}{\ln x}\right)\geq0$

$2x\left(4x\cdot\log_a x-\frac{1}{\log_a x}\right)\geq0$

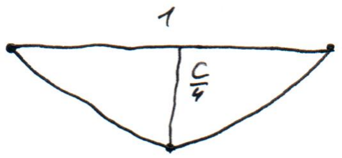
$2^4\cdot3^a$



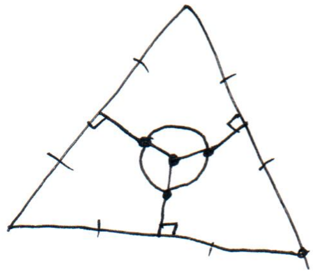
$\sin 11\pi x=\sin 15\pi x$

$\sin 11\pi x-\sin 15\pi x=0$

$2\sin(-2\pi x)\cos($



$y=Cx^2$



$S=\frac{\sqrt3}{4}=\frac{3}{2}\cdot r$

$r=\frac{1}{2\sqrt3}=r_0+\frac{c}{4}$

$263\cdot3=600+180+9$

$243\cdot3=600+120+9$