0 874553 060008

87-45-53-06
(129.1)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 4

Место проведения Усть - Лабинск
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Хониновой Александры Денисовны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

+1 место

Дата

«29» марта 2026 года

Подпись участника

70 (ошибочный) ~~...~~

87-45-53-06
(129.1)

Черновик 1

Задание 1

$$\sqrt{6(1-ctg^2x)}=4\cos x$$

~~$6(1-ctg^2x)=4\cos^2x$~~ , ОДЗ: $\cos x \geq 0$

~~$6\left(1-\frac{\cos^2x}{\sin^2x}\right)=4\cos^2x$~~

~~$6-\frac{6\cos^2x}{\sin^2x}=4\cos^2x$~~

~~$\frac{6\sin^2x-6\cos^2x-4\cos^2x\sin^2x}{\sin^2x}=0$~~

$\sin^2x\neq0$

$$\sqrt{6(1-ctg^2x)}=4\cos x$$

ОДЗ:
$\begin{cases}\cos x\geq0\\ \sin^2x\neq0\end{cases}$

$6(1-ctg^2x)=16\cos^2x$

$6-\frac{6\cos^2x}{\sin^2x}=16\cos^2x$

$$\frac{6\sin^2x-16\cos^2x\sin^2x-6\cos^2x}{\sin^2x}=0$$

$6\sin^2x-16\cos^2x\sin^2x-6\cos^2x=0 \mid :2$ $\sin^2x=a$, $\cos^2x=b$

~~$6a^2-16a^2b^2-6b^2=0$~~

~~$6a^2-6a^2b^2-10a^2b^2-6b^2=0$~~

~~$6a^2-18a^2b^2+2a^2b^2-6b^2=0$~~

~~$6a^2(1-3b^2)+2b^2(a^2-3)=0$~~

$3\sin^2x-8\cos^2x\sin^2x-3\cos^2x=0$

Черновик 2

$\sqrt{6(1-ctg^2 x)} = 4\cos x$

ОДЗ $\begin{cases} 6(1-ctg^2 x) \geq 0 \\ 4\cos x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |ctg x| \leq 1 \\ \cos x \geq 0 \end{cases}$

$6(1-ctg^2 x) = 16\cos^2 x$

$ctg^2 x = \frac{\cos^2 x}{1-\cos^2 x}$

$3\left(1 - \frac{\cos^2 x}{1-\cos^2 x}\right) = 8\cos^2 x$

$3\left(\frac{1-\cos^2 x - \cos^2 x}{1-\cos^2 x}\right) = 8\cos^2 x$

$3\left(\frac{1-2\cos^2 x}{1-\cos^2 x}\right) = 8\cos^2 x$ $\quad t = \cos^2 x$

$3\left(\frac{1-2t}{1-t}\right) = 8t$

$3(1-2t) = 8t(1-t)$

$3 - 6t = 8t - 8t^2$ $\quad D =$

$8t^2 - 14t + 3 = 0$

$14 \cdot 14 = 196$ $\quad 8 \cdot 4 = 32$, $32 \cdot 3 = 96$

$t_{1,2} = \frac{14 \pm \sqrt{196-96}}{16} = \frac{14 \pm 10}{16} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = \frac{24}{16} = \frac{3}{2} \text{ (не удовл.)} \\ t_2 = \frac{1}{4} \end{array} \right.$

$\Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos x = \pm\frac{1}{2}$

по ОДЗ: $\cos x \neq -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \sqrt{1-\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$ctg^2 x = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3} \Rightarrow$ подходит, $ctg^2 x < 1 \Rightarrow$ подходит

$\Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$

87-45-53-06 (129,1)

Чистовик 1

Задача 1

$\sqrt{6(1-ctg^2x)} = 4\cos x$

ОДЗ: $\begin{cases} 6(1-ctg^2x) \geq 0 \\ 4\cos x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1-ctg^2x \geq 0 \\ \cos x \geq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} ctg^2x \leq 1 \\ \cos x \geq 0 \end{cases}$

Возведём в квадрат

$6(1-ctg^2x) = 16\cos^2 x$

$ctg^2x = \frac{\cos^2x}{\sin^2x} = \frac{\cos^2x}{1-\cos^2x}$ (из основного тригонометрического тождества

$\cos^2x + \sin^2x = 1 \Rightarrow \sin^2x = 1-\cos^2x$

$\Rightarrow 6\left(1 - \frac{\cos^2x}{1-\cos^2x}\right) = 16\cos^2x$, $\cos^2x = t$

$6\left(1-\frac{t}{1-t}\right) = 16t \quad |:2$

$3\left(\frac{1-t-t}{1-t}\right) = \cancel{16t}\ 8t$

$3\left(\frac{1-2t}{1-t}\right) = 8t \quad |\cdot(1-t)$

$3(1-2t) = 8t(1-t)$

$3-6t = 8t-8t^2$

$8t^2-14t+3=0 \quad D = 14^2 - 4\cdot3\cdot8 = 196-96=100$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = \frac{14+10}{16} = \frac{24}{16} = \frac{3}{2}, \text{ не удов. усл. т.к. } \cos^2x \leq 1 \text{ (всегда)} \\ t_2 = \frac{14-10}{16} = \frac{1}{4} \end{array}\right.$

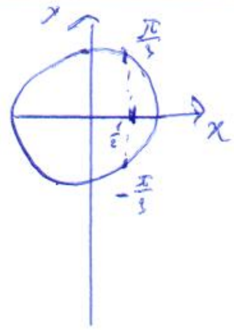
$\Rightarrow t = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos^2x = \frac{1}{4} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = \frac{1}{2} \\ \cos x = -\frac{1}{2}, \text{ не удов ОДЗ } (\cos x \geq 0) \end{array}\right.$

$\Rightarrow \cos x = \frac{1}{2}$ (Подставим в ОДЗ) ~~найдём~~

$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ($\sin x = \sqrt{1-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ – из основного тригонометрич. тождества)

$\Rightarrow ctg^2x = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$, а $\frac{1}{3} < 1 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2}$ удов. ОДЗ

Чистовик 2 Задание 1 (продолжение)



$$\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z \end{array}\right.$$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z \end{array}\right.$

Задание 2

Пусть: **B** – некоторое число входящее в множество A, тогда т.к. нужны все трёхзначные числа, то B – трёхзначное $\Rightarrow B = 100a + 10b + c$, где a, b, c – цифры

$\Rightarrow \frac{100a + 10b + c}{(a+b+c)} = 9k$, где k – некоторое число

$\Rightarrow 100a + 10b + c = 9k(a+b+c)$

$\Rightarrow 100a + 10b + c \,\vdots\, 9$, но тогда по признаку делимости на 9 $(a+b+c) \,\vdots\, 9$

$\Rightarrow a+b+c = 9n$, где n – некоторое натур число

$\Rightarrow 100a + 10b + c \,\vdots\, 81kn$ $\cancel{(9k \cdot 9n)}$ $(81kn = 9k \cdot 9n)$

$\Rightarrow$ нам нужны все трёхзначные B которые делятся на 81 нацело.

$\Rightarrow$ $81 \cdot 2 = 162$ $\quad 81 \cdot 3 = 243$ $\quad 81 \cdot 4 = 324$ $\quad 81 \cdot 5 = 405$ $\quad 81 \cdot 6 = 486$ $\quad 81 \cdot 7 = 567$ $\quad 81 \cdot 8 = 648$ $\quad 81 \cdot 9 = 729$

$81 \cdot 10 = 810$ $\quad 81 \cdot 11 = 891$ $\quad 81 \cdot 12 = 972$ $\quad 81 \cdot 13$ – уже не трёхзначное число $\Rightarrow$ оно не подходит

Чистовик 3
Задание 2
(продолжение)

Все искомые числа в порядке возрастания:

162; 243; 324; 405; 486; 567; 648; 729; 810; 891; 972.

Но, заметим, что числа должны нацело делиться на сумму своих цифр, но числа 567; 729; 891, не делятся нацело на сумму своих цифр => они не удовлетворяют условию (567 : 18 = 31, 9 (ост), аналогично с 729 и 891)

$$\begin{array}{r|l} 567 & 18 \\ -54 & 31 \\ 27 & \\ -18 & \\ 9 \text{ (ост)} & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 729 & 18 \\ -72 & 40 \\ 9 \text{ (ост)} & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 891 & 18 \\ -72 & 49 \\ 171 & \\ -162 & \\ 9 \text{ (ост)} & \end{array}$$

=> Наши числа удовлетворяющие всем условиям в порядке возрастания:

162; 243; 324; 405; 486; 648; 810; 972

Нам нужно 3 – 324
5 – 486
предпоследнее – 810

=> Сумма равна: 324 + 486 + 810 = 810 + 810 = 1620

Ответ: искомая сумма = 1620

Задание 3

Определим множество точек F состоящее из точек с координатами x, y и z, где x, y и z $\in \mathbb{Z}$
$|x, y \text{ и } z| \leq 3$

Тогда число возможных значений точек F для каждой оси будет 7 (-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3)

=> Всего точек будет 7^3 (т.к. всего 3 оси) = 343

Чистовик 4 Задание 3
(продолжение)

1) Пусть вершина в которой нам прямоугольный треугольник имеет угол в 90° имеет координаты $(x_0; y_0; z_0)$, тогда т.к. стороны параллельны осям остальные две вершины должны иметь координаты отличающиеся одним значением по x, по y или по z, тогда

Например у ~~одной~~ одной вершины A

$A(x_0; y_0; z_1)$

а у вершины B

$B(x_1; y_0; z_0)$, где $x_0 \neq x_1$
$z_1 \neq z_0$

2) Число вариантов выбрать вершину C ~~&~~ с углом 90° будет равно количеству точек принадлежащих F
$\Rightarrow$ всего 7^3 способов

3) Плоскость может быть сформирована двумя осями, а значит всего будет 3 варианта:
xy — вдоль осей x и y
yz — вдоль осей y и z
xz — вдоль осей x и z

При этом каждую вершину A и B можно выбрать на каждой оси 6 способами
(1 занят вершиной C)

$\Rightarrow$ всего 2 точки можно выбрать 36 способами

=> Всего будет 343 (7^3 - способов выбрать вершину С) · 3 (~~пло~~ варианта плоскостей в которых может лежать прямоугольный треугольник) · 36 (вариантов выбрать оставшиеся 2 вершины)

Чистовик 5
Задание 3
(продолжение)

=> всего будет $7^3 \cdot 3 \cdot 36$ способов

=> $343 \cdot 3 \cdot 36 = 1029 \cdot 36 = 37044$

$$\begin{array}{r} \times\,1029 \\ 36 \\ \hline 6174 \\ 3087 \\ \hline 37044 \end{array}$$

Ответ: всего 37044 способов.

~~Чистовик~~

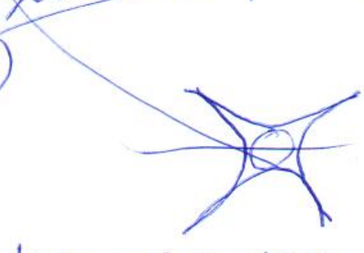
черновик 3
Полосна огр мн $x=0; y=1; y=-1; x=1$
и функц $f_1(x) = \sin 11\pi x$
$f_2(x) = \sin 15\pi x$
$f_3(x) = \sin 17\pi x$

Все графики проходят через точки $(0;0)$ и $(1;0)$ — наход на углах полоски
т.к $y \in [-1;1]$ все точки где $\sin \pi k x = \pm 1$ — точки касания графиков верхней или нижней ~~полоски~~ границы полоски
По формуле Эйлера числов. вариантов разбиения равно $e - V + 1$, где e — число рёбер, V — количество вершин

Считаем вершины
4 угла прямоугольника 2 точки $(0;0)$ и $(1;0)$ — для входа и выхода графиков.
Точки касания сверху $y=1$
$k=11$; $11x = \frac{1}{2}$; $\frac{5}{2}$ и т.д ⇒ всего 6 точек
$k=15$; $15x = \frac{1}{2}$; $\frac{5}{2}$ и т.д. ⇒ всего 8 точек
$k=17$; $17x = \frac{1}{2}$; $\frac{5}{2}$ и т.д ⇒ всего 9 точек
⇒ всего 23 точки
Снизу $y=-1$
$k=11$ — 5 точек
$k=15$ — 7 точек
$k=17$ — 8 точек — 1 точка ⇒ всего
⇒ всего 20 точек
$\sin k_1 x$ и $\sin k_2 x$ пересекаются при

Черновик 4

3)



$k_1 x = k_2 x + 2n$ или $k_1 x = 1 - k_2 x + 2n$

Тогда k_{11} и k_{15} – 12 точек перес

k_{11} и k_{17} – 16 точек перес

k_{15} и k_{17} – 16 точек перес

=) всего 12 + 16 + 16 = 44

=) всего вершин 4 + 2 + 23 + 19 + 44

=) всего 92

посчитаем рёбра 23 точки делят

сторону на 24 отрезка

19 снизу – на 20 отрезков

боковые стороны – еще 2 отрезка

всего 48 рёбер

Графики при k = 11 проходят через

2 + 6 + 5 + 12 + 16 = 41 точки =) 40 рёбер

при k = 15 проходит через

2 + 8 + 7 + 12 + 16 = 45 точек =) 44 ребра

при k = 17 проходит через

2 + 9 + 8 + 16 + 16 = 51 =) всего 50

Всего рёбер 48 + 40 + 44 + 50 = 182

Подставляем в формулу

182 – 92 + 1 = 91 (области)

3) Черновик 3

Определим множество точек F состоящее из точек коорд. x, y и z, x, y и $z \in \mathbb{Z}$

$|x, y$ и $z| \leq 3$, тогда число возможных значений будет по каждой оси -7 $(-3; 3)$

Всего таких точек будет $7^3 = 343$

Пусть вершина в которой как прям угол имеет координаты $(x_0; y_0; z_0)$, т.к. стороны || осям тогда остальные две вершины должны иметь координаты (отличаться 1 координатой)

1) $(x_1; y_0; z_0)$ $x_1 \neq x_0$ $y_2 \neq y_0$

2) $(x_0; y_2; z_0)$

Число вариантов выбрать вершину $= 7^3 = 343$

Выбрать вершину C, где угол равен $90°$ плоскость может быть сформирована

xz – в сторону x и z

yz – в сторону вдоль y и z

xy – в сторону вдоль x и y можно выбрать x и y – 6 способами

При возможных вариантов

Остальные три вершины $\Rightarrow$ всего 36

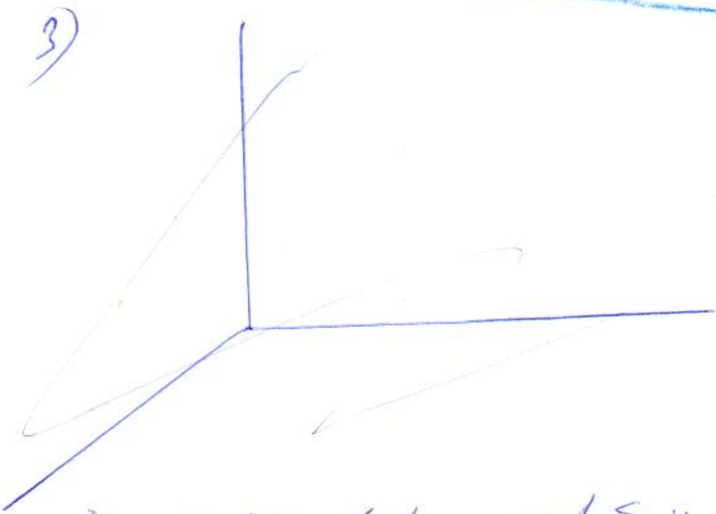
Всего $6 \cdot 6$ вариантов

$\Rightarrow$ всего $7^3 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 6 = 343 \cdot 3 \cdot 36 = 37044$

$$\begin{array}{r} 343 \\ \times \quad 3 \\ \hline 1029 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1029 \\ \times \quad 36 \\ \hline 6174 \\ 3087 \\ \hline \boxed{37044} \end{array}$$

Черновик 6

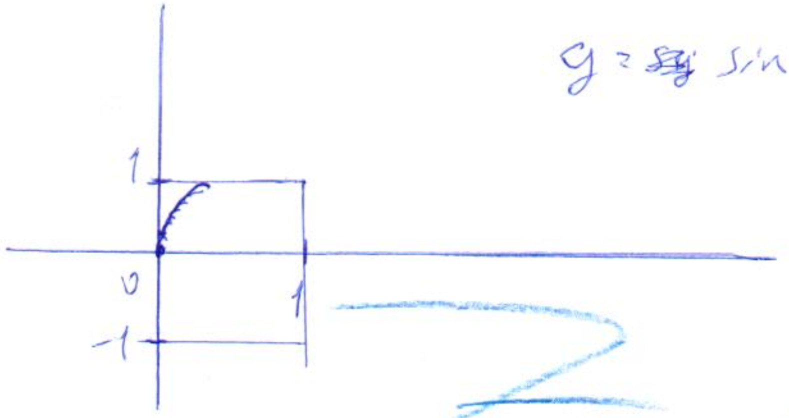
3)

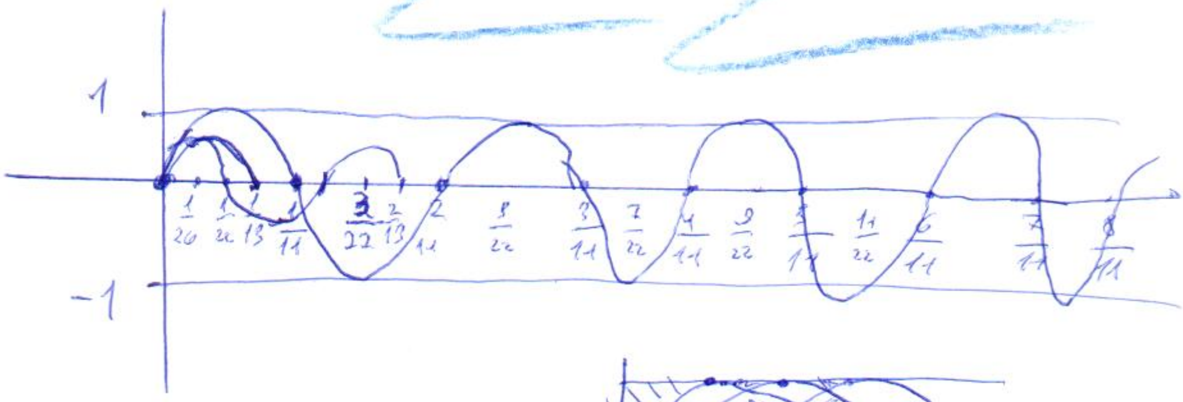


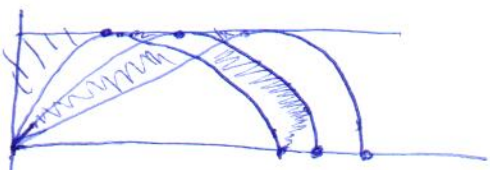
4) $0 \le x \le 1 \qquad -1 \le y \le 1$

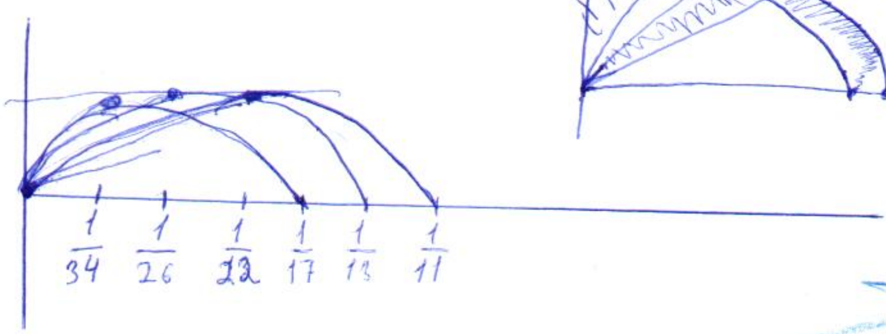
$y = \sin k\pi x$

$y = \sin 11\pi x$









Черновик 7

$\vdots 9$

$A = a\cdot 1000 + b\cdot 10 + c$

$$\frac{a\cdot 1000 + b\cdot 10 + c}{a+b+c} = 9k$$

$a\cdot 1000 + 10b + c = 9k\cdot(a+b+c)$

$\Rightarrow 1000a + 10b + c \vdots 9$

$\Rightarrow (a+b+c) \vdots 9$

$$\begin{array}{r} 11 \\ 324 \\ +486 \\ \hline 810 \\ +\cancel{891}\ 810 \\ \hline \cancel{1701} \\ 1620 \end{array}$$

$5+6+7$

$5+13=18$

~~117~~ 126 135 144 153 162 171

216 225 234 243 252 261

315 324 333 342 351

414 423 432 441

513 522 531

~~612~~ 621 711

$\frac{621}{9} = 69$

$$\begin{array}{r|l} -567 & 18 \\ 54 & 31 \\ -27 & \\ 18 & \\ 9 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} -621 & 9 \\ 54 & 69 \\ 81 & \end{array}$$

$S = 135 + 153 + 621 = \boxed{909}$

$$\begin{array}{r} 135 \\ +153 \\ \hline 288 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1 \\ +621 \\ 288 \\ \hline 909 \end{array}$$

729

$$\begin{array}{r} 6 \\ \times 18 \\ 8 \\ \hline 144 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7 \\ \times 18 \\ 9 \\ \hline 162 \end{array}$$

$a\cdot 1000 + 10b + c = 9k\cdot 9n$

$\Rightarrow 1000a + 10b + c \vdots 81$

$81\times 2 = 162$, $81\times 3 = 243$, $81\times 4 = 324$, $81\times 5 = 405$, $81\times 6 = 486$, $81\times 7 = 567$, $81\times 8 = 648$

$81\times 9 = 729$, $81\times 10 = 810$, $81\times 11 = 891$, $81\times 12 = 972$

1 162, 2 243, 3 324, 4 405, 5 486, 567, 6 648, 7 729, 8 810, 891, 972

87-45-53-06 (129.1)

Чистовик Б

Задание 4

Полоска ограничена прямыми $x=0; y=1; y=-1; x=1$

и функциями $f_1(x)=\sin 11\pi x$

$f_2(x)=\sin 15\pi x$

$f_3(x)=\sin 17\pi x$

Все графики проходят через точки $(0;0)$ и $(1;0)$ – на графике полоски, на границах отмечены точки т.к $y\in[-1;1]$, то $\sin\pi k x=\pm1$ – точки касания графиков верхней или нижней границы плоскости

По формуле Эйлера число вариантов разбиения полоски на части равно $e-v+1$, где e – число ребер, v – количество вершин

Считаем вершины

4 угла прямоуг. и 2 точки,

Точки касания сверху (прямой $y=1$)

$k=11$; $11x=\frac{1}{2};\frac{5}{2};\frac{3}{2}$; и т.д. ⇒ всего 6 точек

$k=15$; $15x=\frac{1}{2};\frac{3}{2};\frac{5}{2}$ и т.д. ⇒ всего 8 точек

$k=17$; $17x=\frac{1}{2};\frac{3}{2};\frac{5}{2}$ и т.д. ⇒ всего 9 точек ⇒ всего 23 точки

Аналогично снизу для прямой $y=-1$

$k=11$ – 5 точек

$k=15$ – 7 точек

$k=17$ – 8 точек, но у $k=11$ и $k=17$ 1 точка совпадает ⇒

Всего 19 точек.