



46-81-51-89
(123.18)



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант _____

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наименование олимпиады

по Математике
профиль олимпиады

Бороздиной Вероники Николаевны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

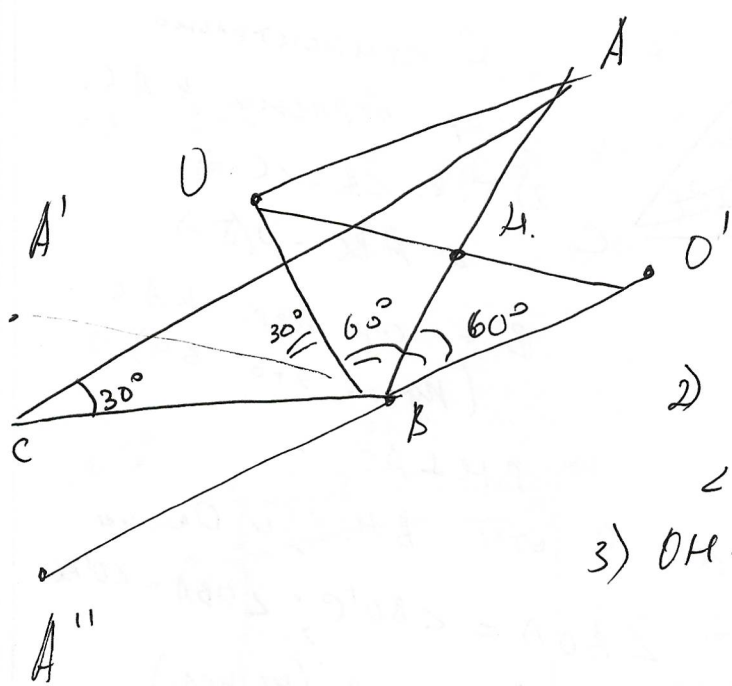
«29» марта 2026 года

Подпись участника

Чистовик

Страница 1 из 8

№ 3



1) т.к. т. O и O'
симметр. относительно
 $(AB) \Rightarrow \angle OBA =$
 $= \angle O'BA.$

2) $\angle AOB$ - центр. \Rightarrow
угол
 $\angle AOB = 2 \angle ACB = 60^\circ$

3) $OM \perp AB$; $O \in$ сер. перп.
к $AB \Rightarrow OM$ - сер. перп.
к $AB \Rightarrow$

$\angle AOM = \angle MOB$. (В $\triangle OAB$
сер. перп. - бис-сек.)
и $OA = OB$, как радиусы.

4) $\angle AOM = \angle MOB = 30^\circ \Rightarrow \angle OMB = 60^\circ$ ($\angle OMB = 90^\circ$)
 $= \angle MBO'$

5) AA' - диаметр $\Rightarrow \angle ABA' = 90^\circ$ (зам. св-во окр.)
 $\angle ABO = 60^\circ \Rightarrow \angle A'BO = 30^\circ$
 $\angle A''BA' = 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ (т.к. $O'BA''$
на одн. прямой)

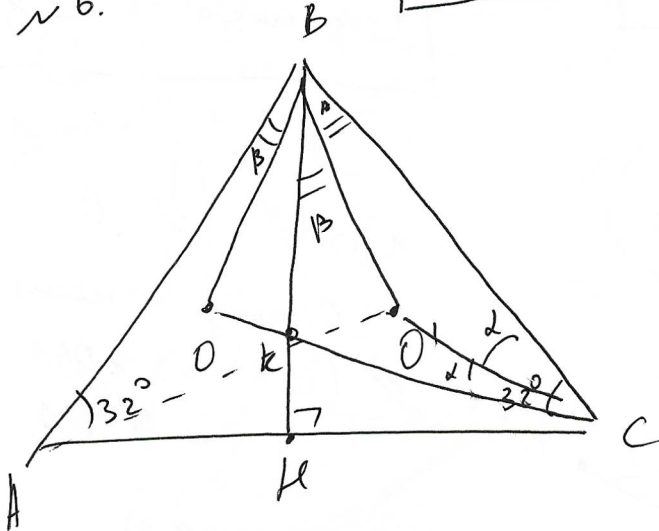
6) BC - сер. перпенд. к AA'' т.к. A'' симм. A'
отн. $BC \Rightarrow$

$$\angle A'BC = \angle CBA'' = 30^\circ / 2 = 15^\circ$$

$$7) \angle B = \angle ABA' + \angle A'BC = 90^\circ + 15^\circ = 105^\circ$$

Отв. 105°

№ 6.



1) Пусть O' симметр O относительно сер. перпен. к AC .

2) т.к. $\angle A = \angle C \Rightarrow \triangle ABC - \text{р/б} \Rightarrow$

$B \in$ сер. пер. к AC (пусть это BK) $\Rightarrow BK \perp AC$

3) т.к. A симм. с O тн. BK , и O симм O' отн. $BK \Rightarrow \angle BOA = \angle BO'C; \angle OBA = \angle O'BC$

Пусть $\angle ABO = \beta \Rightarrow \angle OBC = 3\beta$ (из усл.)
 $\angle OAB = \alpha \Rightarrow \angle BCO = 2\alpha$ (из усл.)

4) $\angle O'CO = \angle BCO - \angle BCO' = 2\alpha - \alpha = \alpha$
 $\angle B = 18^\circ - 64^\circ = 116^\circ \Rightarrow 4\beta = 116^\circ \Rightarrow \beta = 29^\circ = \angle OBA = \angle O'BC$

5) т.к. $\triangle ABC - \text{р/б}$, и $BK - \text{сер. пер} \Rightarrow \angle ABK = \angle KBC = 2\beta$
 $\Rightarrow \angle KBO' = 2\beta - \angle O'BC = \beta$

6) Пусть $K - \text{пересеч. } OC \text{ и } BK. \Rightarrow CO' - \text{диас-са}$
 $\angle KCB (\angle O'CO = 2\beta) = \angle KBO' = \beta$
 $BO' - \text{диас-са } \angle KBO' = \angle O'BC = \beta = \angle KCB$
 $\Rightarrow KO - \text{диас-са } \angle KOC$ ($O' - \text{центр } \triangle BKC$)

7) $\angle BKC = 90^\circ + 32^\circ - 2\alpha$ (внешн) $\Rightarrow \angle O'KC = 45^\circ + 16^\circ - \alpha$
 $\Rightarrow \angle KO'C = 180^\circ - (45^\circ + 16^\circ - \alpha + \alpha) = 119^\circ$

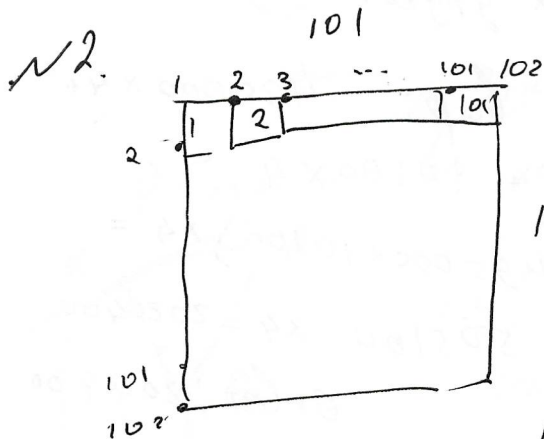
т.к. O', K, C лежат на одной прямой. $\angle KO'C = 119^\circ$
 т.к. O', K, A лежат на одной прямой. $\angle KO'A = 180^\circ - 119^\circ = 61^\circ$

Митович

Страница 3 из 8

Продолжение №6.

в) $\angle O'Ac = \angle BAc - \angle BAO' = 32^\circ - 2\alpha$
 ($\angle BAO' = \angle BAO$)
 из симметрии.
 $\Rightarrow 32^\circ - 2\alpha + 32^\circ - 2\alpha + 119^\circ = 180^\circ$ (\in угол в $\triangle AO'C$)
 $3^\circ = 3\alpha \Rightarrow \alpha = 1^\circ \Rightarrow \angle BOA = 150^\circ \Rightarrow$
 $\angle BOA$ больше $\angle BAO$ в 150 раз
 Ответ: 150



т.к. не должно быть
 дырки, то хотя бы одна
 сторона квадрата содержит
 сторону вырезанного
 прямоугольника.

т.к. клетки
 значение с какой стороны
 посчитаем для 1 стороны и умножим на
 4 (т.к. ост. стороны получаются поворотом
 отн. центра)

В отдельном посчитаем, если угловые клетки
 входят в вырезанный и не входят.
 Если не входят: Если начинаем со 2 клетки,
 то можем закончить на 100 или
 99 вар. (Если с 3 начнем, то
 98 вар и т.д.)

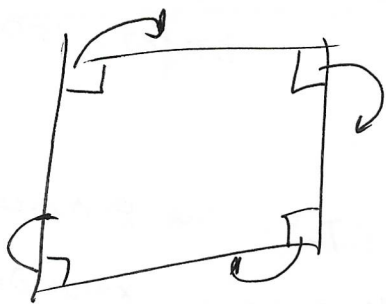
высота прямоуг. max 100, т.к. если она 101, то
 квадрат развалится \Rightarrow 99 вар. $100 \cdot (1+2+\dots+99) =$
 $= 100 \cdot \frac{99 \cdot 100}{2} = 495000$. (и таких 4 стороны
 Если входят, то для одной вершины. Если стороны
 max 101, а другая max 100 (иначе вырезанный совпадает
 с исходным) \Rightarrow вар $101 \times 100 = 10100$
 (угла 4)

Чистовик

Страница 4 из 8

Продолж. №.

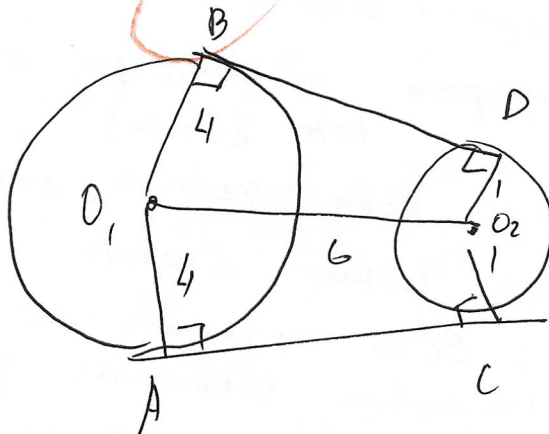
т.е. углы переходят друг в друга при повороте, что можно выбрать для каждой углы определенную сторону, где бы можно взять её всю. Не нужно считать



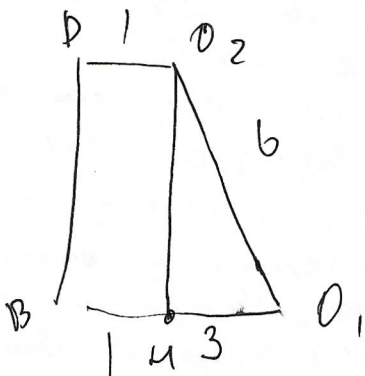
бар, где эти стороны другая, ведь он посчитан для другой: углов вершины

$$\begin{aligned} \text{Всего бар: } & 495000 \times 4 + \\ & + 10100 \times 4 = \\ & = (495000 + 10100) \times 4 = \\ & = 505100 \times 4 = 2020400 \\ & \text{ответ: } 2020400 \end{aligned}$$

№7:

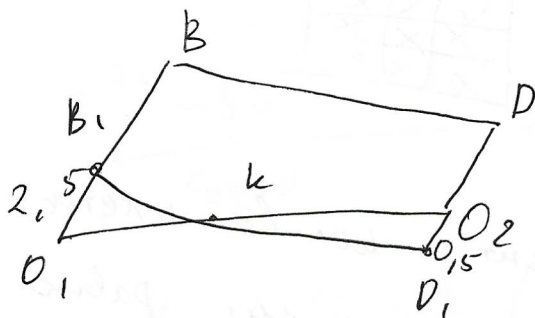


пусть; A; B; C; D - точки касания $\Rightarrow \angle B; A; D; C = 90^\circ$
картинки симметр. относ. линии центров



BDO_2O_1 - трапеция, BD - высота.
 O_2M - высота $\Rightarrow BDO_2M$ - $\text{p/y} \Rightarrow MO_1 = 4 - 1 = 3$
 $\triangle O_2O_1M$ - $\text{p/y} \Rightarrow \cos \angle O_2O_1M = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle O_2O_1M = 60^\circ$

Продолж №7. чистовик | Страница 5 из 8
 $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{AH}{2} = BD = 3\sqrt{3}$

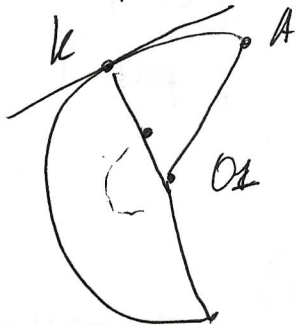


т.к. косилка выдвигается на 1,5 трабу, то граница трабы - это линия параллельная BD (паралл. перенос на 1,5) \Rightarrow

$BB_1 = DD_1 = 1,5 \Rightarrow O_1B_1 = 2,5$

$\Delta B_1kO_1 \sim \Delta D_1O_2k$ \Rightarrow $B_1k = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ (паралл. перенос на 1,5) \Rightarrow $BD = 3\sqrt{3}$, т.к. косилка на паралл. переносе

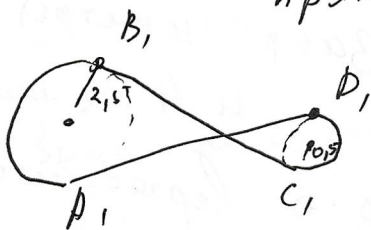
Расси трабу, когда косилка на окружн.



т.к. косилка выдвигается на 1,5 но право перпендик. движен, то движение направлено по касательной к окружн. в точке косилки

\Rightarrow полетит вдоль радиуса на 1,5.

\Rightarrow внутри контур - это 2 окр. и 2 пряме. (центры окр - $O_1; O_2$)



$\angle BO_1O_2 = 60^\circ = \angle O_2O_1A$ (из сим.

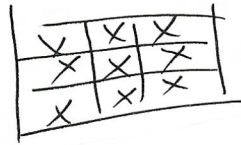
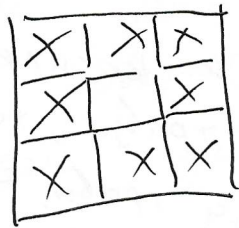
$\Rightarrow \cup AB = \frac{2}{3}$ длины окр с центром в O_1, A начал.

$\cup A_1B_1 = \frac{2}{3}$ длины окр.

Если считать, что траба с центром в O_1 ($R=2,5$) прямо пролетает 1,5, то
 Длина трабы = $\frac{2}{3} \cdot 2,5 \cdot 2 \cdot \pi + \frac{2}{3} \cdot 0,5 \cdot 2 \cdot \pi +$

$+ 2 \cdot 3\sqrt{3} = (\cup B_1D_1 = BD, \text{ т.к. } B_1D_1 - \text{ паралл. перенос } BD, \text{ а } R=4-1,5=2,5 \text{ (} -1,5 = -0,5, \text{ но надо взять по модулю.)})$
 Ответ: $4\pi + 6\sqrt{3}$

Продолж лз. Чистовик
 Если же траба покр. площадь на, Страница 6 из 8
 Длина трабы = $2,5 \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{5\sqrt{3}}{2} = \frac{10}{3}\pi + \frac{10\sqrt{3}}{2}$ ответ: $\frac{10}{3}\pi + \frac{10\sqrt{3}}{2}$



На данный момент кол-во клеток
 граничных с закрашенными равно

13.

I случай условия. (Если вероятность
 рассчитывается по кол-ву
 гранич. то есть центральная
 клетка учитывается 1 раз.)

⇒ Вероятность $\frac{1}{13}$.

II случай условия. (Если центральная
 клетка учитывается
 4 раза, по количеству
 соседней закр. клеток)

Тогда всего вар. 16. и 4 из них
 приведут в центр. ⇒ вероятность $\frac{4}{16}$ или
 $\frac{1}{4}$.

Вероятность либо $\frac{1}{13}$; либо $\frac{1}{4}$ в зависимости
 от условия.

Чистовик

Страница 17 из 8

~ 41

$$A = \frac{a^{2x} - 3a^{x+1} + 2a^2}{\log_2 a} \geq 0$$

$$A = \frac{a^2 \cdot (a^{x-1} - 1) (a^{x-1} - 2)}{\log_2 a} \geq 0.$$

Если $\log_2 a > 0 \Rightarrow$ при $a^{x-1} \geq 2$ - решение \Rightarrow

если $a^k = 2 \Rightarrow (a^k)^n > 2$
 беск. реш или нет реш. \Rightarrow

$\log_2 a < 0 \Rightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Rightarrow a \neq 1 \end{cases}$ (не равен 0)

$\neq 0$ иначе (ОДЗ), но если $a=0$, то
 реш беск. много.



Знак меняется, когда $a^{x-1} = 1$ и $a^{x-1} = 2$.

$a^{x-1} = 1, a \neq 1 \Rightarrow x = 1$. (Граница отр.)

$a^{x-1} = 2$. либо если $x < 0$
 т.ч. $a < 1$ + 0 возводя в
 степень $a^{p'} < 1 \Rightarrow \neq 2$

$p < 0 \Rightarrow x-1 < 0$ т.ч. решен - отрезок

границы 2026 $\Rightarrow x \in (-2025; -2026)$ $x = -1 = -2026$
 иначе граница ОДЗ не 2026

Продолжи

Чистовик

Страница 18 из 8

$$a^{-2026} = 2 \Rightarrow \frac{1}{a^{2026}} = 2 \Rightarrow$$

$$a = \sqrt[+2026]{\frac{1}{2}}$$

ответ:

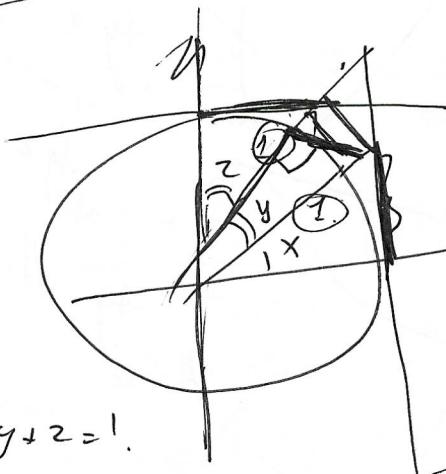
Черновик

$$x+y+z = \frac{\pi}{2}$$

$\lg x + \lg y + \lg z = ?$ (кажд)

~~$\lg x + \lg y + \lg z = \lg xyz$ - как?~~

$x+y+z = A$



~~$xyz = \text{как?}$~~
 $x+y+z \geq 3\sqrt[3]{xyz}$

$(x+y) + z$

$$x+y+z=1$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \quad \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

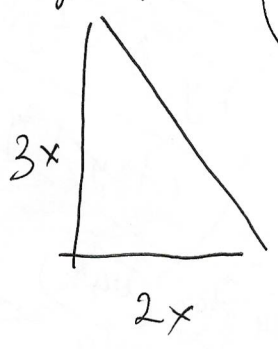


$$\frac{1}{32} < \frac{1}{27}$$

$\log_2 a$
 $a^x \cdot (a^{x-1} - 2) (a^{x-1} - 1) \geq 0$
 $\log_2 a$ со. при $\log_2 a > 0 \Rightarrow a < 1$

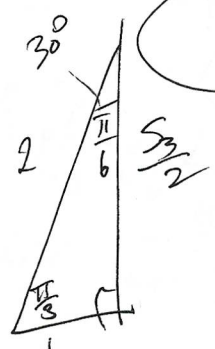
$$30^\circ - \frac{y}{2}$$

$$\frac{\pi}{6}$$



$$\leq 2$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}$$



$$\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{8}{3\sqrt{3}}$$

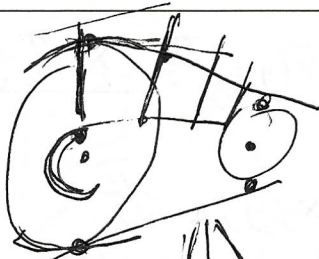
$$0 < a < 1$$

$\log a$
 $a^{2026} = 2$
 $\frac{1}{a^{2026}} = 2$

$$a^{x-1} = 1$$

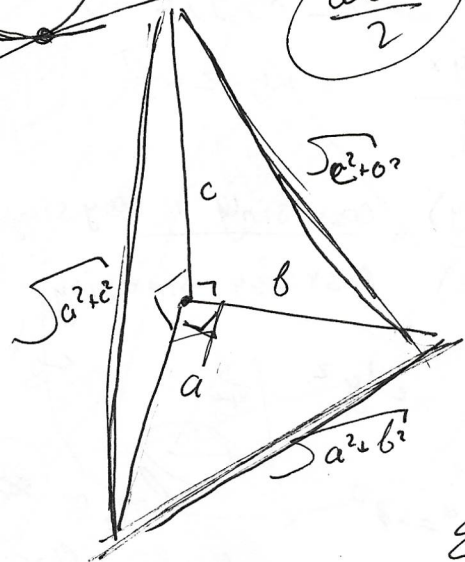
$x=1$
 $x=2027$
 $x=-2026$

Черновик



$\frac{abc}{2}$

$a, b, c \in \mathbb{N}$ $abc - \min?$

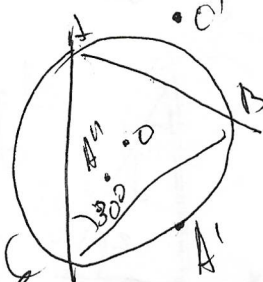


$a \neq b \neq c$
 $a+b+c + \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{a^2+c^2}$
 Эдмин пердер $+ \sum S_{no} b +$

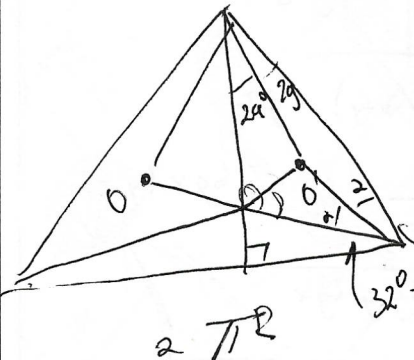
$V = 2026$

$V_{\min}?$

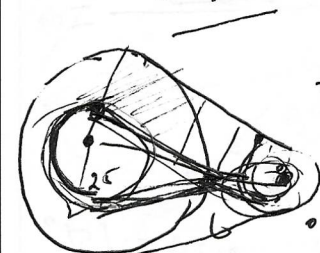
$\sum S_{no} b = \frac{cb}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{ac}{2} +$



$\angle B'?$

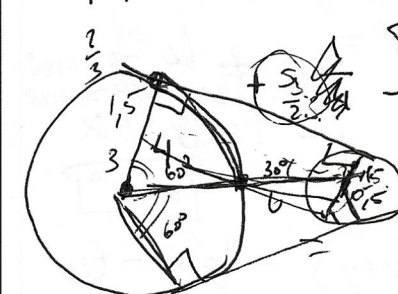


$p = (p - \sqrt{a^2+c^2})(p - \sqrt{b^2+c^2})(p - \sqrt{a^2+b^2})$
 $45^\circ + 16^\circ = 61^\circ$
 $180^\circ - 45^\circ - 16^\circ = 119^\circ$
 $64^\circ - 32^\circ = 32^\circ = 180^\circ - 45^\circ - 16^\circ$
 $14^\circ + 2^\circ = 16^\circ$

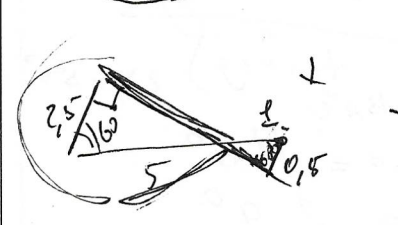


$\frac{1}{16} (\sqrt{a^2+c^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{a^2+b^2}) \cdot$
 $(\sqrt{a^2+c^2} + \sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{b^2+c^2}) \dots$
 $50^\circ - 32^\circ = 18^\circ$
 22°

$4-15$ $2026 \leq 3(a+b+c) + \frac{ab+bc+ac}{2} + \beta$



$\frac{1}{16} \cdot 2(a+b+c) \cdot 2a \cdot 2b \cdot 2c + \frac{abc}{2} =$
 $3(a+b+c) + \frac{ab+bc+ac}{2} +$
 $4 abc + \frac{abc}{2}$



$\sqrt{abc(a+b+c)} + \frac{abc}{2} \leq$
 $123 = 6$
 $\frac{ab+bc+ac}{2} + \frac{abc}{2}$
 $\frac{abc}{2}$