0489158700008

48-91-58-70
(128.4)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 10

Место проведения г. Санкт-Петербург
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Быковского Романа Андреевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«29» марта 2026 года

Подпись участника

Чистовик

Задача 4

$$\frac{a^{2x}-3a^{x+1}+2a^2}{\log_2 a}\geq 0$$

ОДЗ: $\begin{cases} a>0 \\ a\neq 1 \end{cases}$ иначе деление на 0

Поделим на $a^2>0$:

$$\cancel{a^{2(x-1)}}\quad \frac{a^{2(x-1)}-3a^{x-1}+2}{\log_2 a}\geq 0$$

$a^{x-1}=t>0$

$$\frac{t^2-3t+2}{\log_2 a}\geq 0$$

$$\frac{(t-1)(t-2)}{\log_2 a}\geq 0$$

Случай 1: $a>1$

Тогда $\log_2 a>0$, исходное нер-во равносильно $\begin{cases}(t-1)(t-2)\geq 0 \\ t>0;\ a>1\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} t\in(0;1]\cup[2;+\infty) \\ a>1\end{cases}$

$a^{x-1}\in(0;1]\cup[2;+\infty)$

Здесь $a>1$ и a^{x-1} не огр. сверху, значит $x-1$ не огр. сверху
$\Rightarrow$ решением будет не отрезок, т.к. он ограничен.

Чистовик (продолжение задачи 4)

Случай 2: $0<a<1$

$\log_2 a < 0$

$\Rightarrow$ исходное нер-во равносильно

$$\begin{cases} (t-1)(t-2) \le 0 \\ t>0 \\ 0<a<1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \in [1;2] \\ 0<a<1 \end{cases}$$

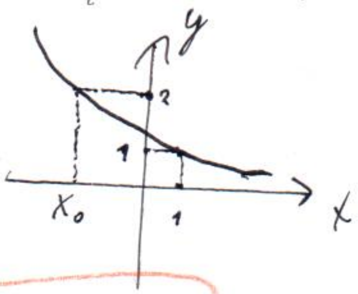
$a^{x-1} \in [1;2]$ при $a<1$

~~Если решение - отрезок длиной 2026~~

~~то $x-1$ тоже лежит только в отрезке~~

~~длиной 2026~~

Построим график $y = a^{x-1}$ при $0<a<1$



решение - отрезок длиной 2026 $\Rightarrow x_0 = -2025$

$$a^{-2025-1} = 2$$

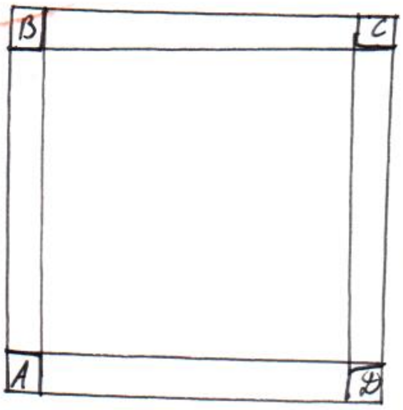
$$\left(\frac{1}{a}\right)^{2026} = 2$$

$$a = \left(\frac{1}{2}\right)^{2026}$$

Ответ: $\left(\frac{1}{2}\right)^{2026}$

Чистовик

Задача 2



Назовём угловые клетки A, B, C, D как на рисунке. Пусть клетки между A и B – „левая полоса“, между B и C – „верхняя полоса“, между C и D – „правая полоса“, между A и D – „нижняя полоса“.

∀ все доступные для вырезания прямоугольники, не содержащие угловые клетки. Тогда каждый такой прямоугольник содержит клетки какой-то „полосы“, причём ровно одной (в силу условия). Рассмотрим „верхнюю полосу“.

Прямоугольник однозначно задаётся двумя противоположными углами.

Один угол выберем на полосе ($101-2=99$ вариантов), а второй – в любой клетке кроме углов и остальных полос, находящейся ~~в~~ не левее и не выше первого угла. Для клетки, соседней с B, есть $99 \cdot 100$ вариантов второго угла, для следующей – $98 \cdot 100$, и так далее до соседней с C, у которой всего 100 вариантов.

Тогда всего $100(1+2+\ldots+99) = 100 \cdot \frac{100 \cdot 99}{2} =$

Чистовик (продолжение задачи 2)

$4\,950 \cdot 100 = 495\,000$ прямоугольников

для других полос аналогично, все пр-ки различны

Теперь ∀ прямоугольники, содержащие ровно 1 угловую клетку. Для клетки A есть $100 \cdot 100$ вар-тов выбрать второй угол, т.к. нельзя выбирать его в ~~полосах~~ ~~в~~ углах и полосах „верхней" и „правой". Для C, B и D аналогично.

∀ пр-ки, содержащие ровно 2 угловые клетки. Для пары AB есть 100 вар-тов выбрать параллельную вертикальную сторону (возможно, саму AB). Для пар BC; CD и AD аналогично. пары BD и AC брать нельзя по условию.

~~Во~~ Более ~~двух~~ двух угловых клеток прямоугольник тоже содержать не может, т.к. они меньше исходного квадрата. Всего

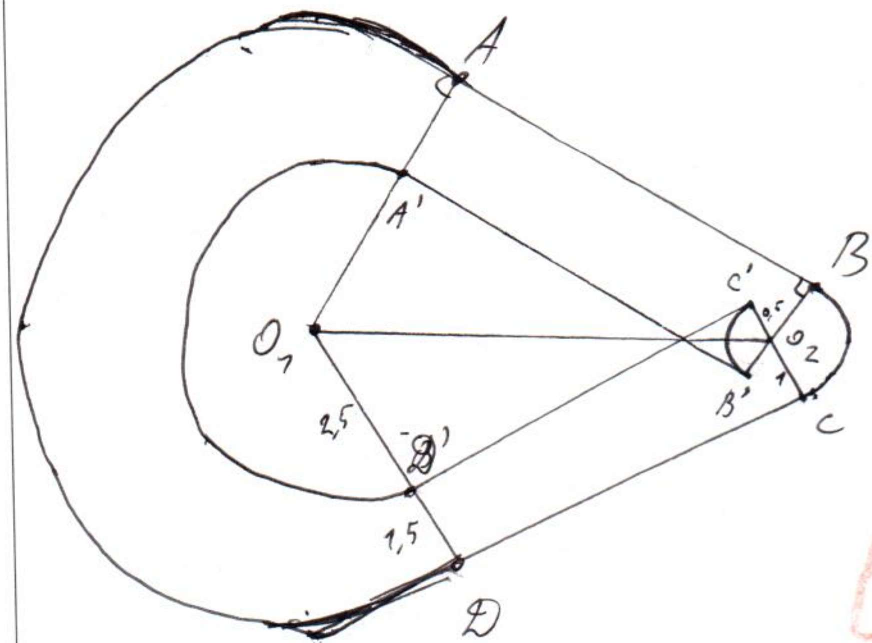
$495\,000 \cdot 4 + 100 \cdot 100 \cdot 4 + 100 \cdot 4 =$

$4 \cdot 496\,100 = 1\,984\,400$ вариантов (все различны)

Ответ: 1 984 400

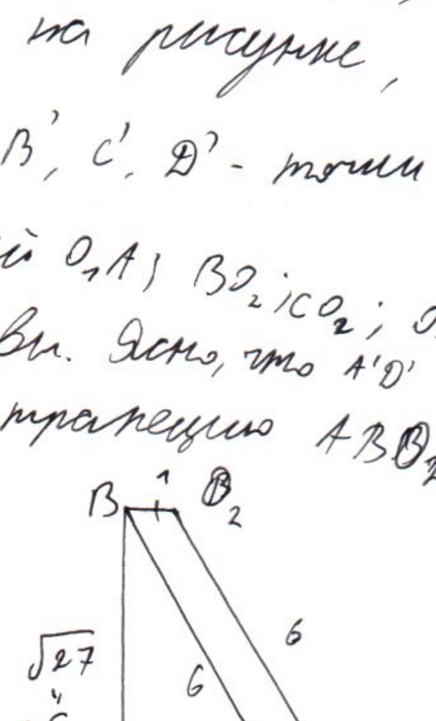
Чистовик

Задача 7



] ~~ABC~~ A, B, C, D - точки касания как на рисунке, O_1 и O_2 - центры, A', B', C', D' - точки пересечения лучей O_1A; BO_2; CO_2; O_1D с траекторией травы. Ясно, что A'D' и B'C' - дуги окружностей.

Х трапецию ABO_2O_1



] $O_1T = BO_2$ (отметим т. T)

$\Rightarrow BT \parallel O_2O_1$

$AT = 3$; $BT = 6$

$\Rightarrow AB = CD = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

(по т. Пифагора)

$\angle O_2O_1A = \arccos\frac{1}{2} = 60°$

Чистовик (продолжение задачи 7)

$\angle AO_1D = 120^\circ = \angle BO_2C = \angle C'O_2B'$

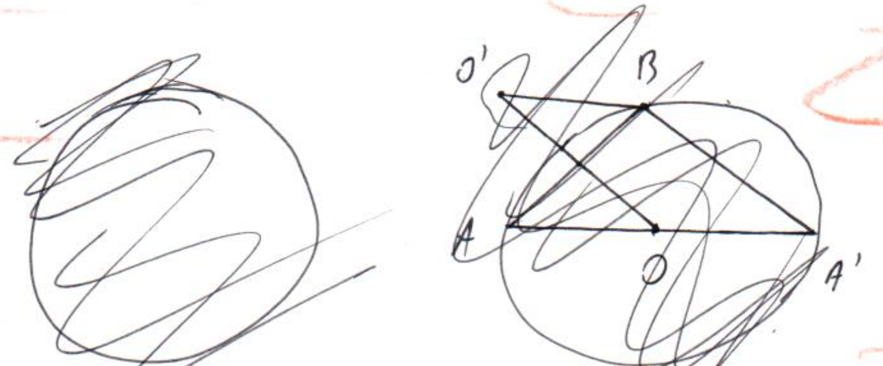
$\smile C'B'$ ← меньшая - дуга окр-ти радиуса 0,5 с градусной мерой 120°.

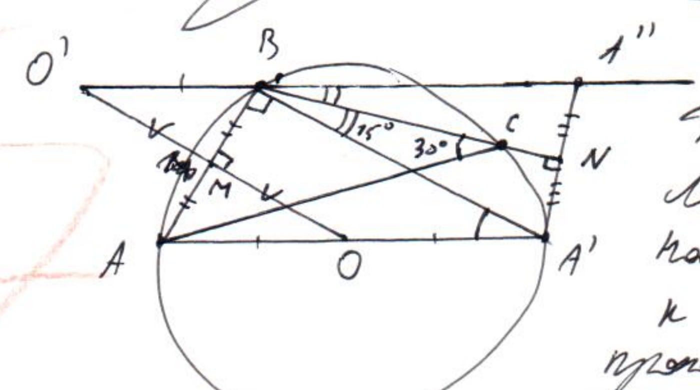
$\smile A'D'$ (большая) - дуга окр-ти радиуса $4 - 1{,}5 = 2{,}5$ с мерой 240°

длина траектории $L = \ell(\smile C'B') + \ell(\smile A'D') + A'B' + C'D' = \frac{2\pi \cdot 0{,}5}{3} + \frac{2 \cdot 2\pi \cdot 2{,}5}{3} + 2 \cdot 3\sqrt{3} = \frac{11\pi}{3} + 6\sqrt{3}$

Ответ: $\frac{11\pi}{3} + 6\sqrt{3}$

Задача 3





Поскольку O лежит на серединном перпендикуляре к AB, OO' проходит через середину AB (точку M)

Чистовик (продолжение задачи 3)

Диагонали четырёхугольника $O'BOA$ точкой пересечения делятся пополам $\Rightarrow$ $O'BOA$ - ~~пар~~ параллелограмм $\Rightarrow O'B \parallel AO$

$O'A'' \parallel AA'$, где ~~A~~A' диаметрально противоположна A.

$\angle C = \angle AA'B$ (как вписанные и опирающиеся на $\smile AB$).

$\angle AA'B = \angle A'BA''$ (~~как~~ накрест лежащие при $AA' \parallel BA''$)

$\angle A'BA'' = \angle C = 30°$

$\exists\ (BC) \cap A'A'' = N.$

В $\triangle A'BA''$ BN - высота и медиана $\Rightarrow BN$ ещё и биссектриса.

$\angle A'BN = \angle A'BC = \frac{30°}{2} = 15°$

$\angle ABA' = 90°$, т.к. AA' - диаметр

$\angle ABC = \angle ABA' + \angle A'BC = 90 + 15 = 105°$

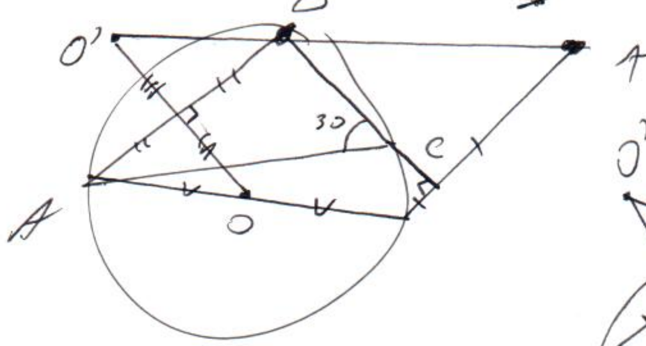
~~$\angle ABA' = 90°$, т.к. AA' - диаметр~~

Ответ: $105°$

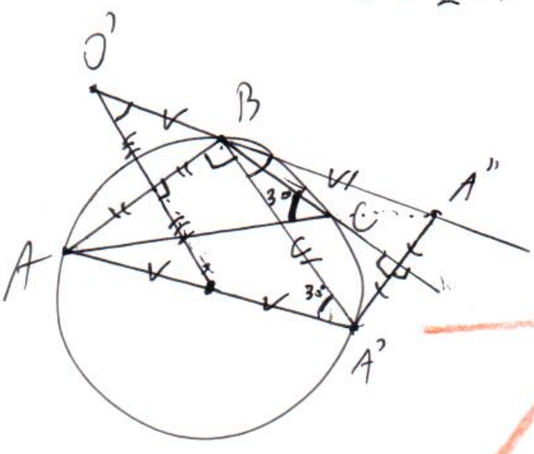
48-91-58-70
(128.4)

60 (шестьдесят)

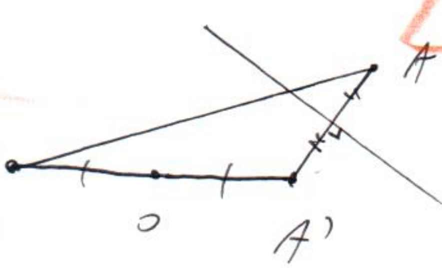
Черновик



$V \geq 2 \cdot 11$



$abc + 2(ab+bc+ac) + 4(a+b+c) = 2026$

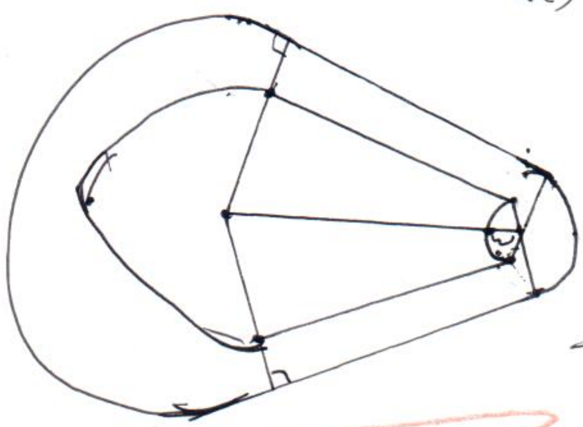


$f(x) = x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ac)x$

$-abc = 0$

$f(-2) = -2034$

$-8 - 4(a+b+c) - 2(ab+bc+ac) - abc = -2034$



Черновик

$a \neq 1$

$a > 0$

$$\frac{a^{2x} - 3a^{x+1} + 2a^2}{\log_2 a} \geq 0$$

$|: a^2$

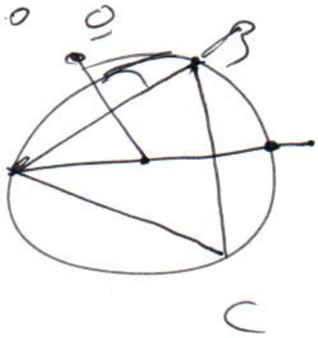
$$\frac{a^{2(x-1)} - 3a^{x-1} + 2}{\log_2 a} \geq 0$$

$$\begin{array}{r} \times\, 496\,100 \\ 4 \\ \hline 1\,984\,400 \end{array}$$

$a^{x-1} = t$

$$\begin{array}{r} \times\, 99 \\ 50 \\ \hline 4950 \end{array}$$

$t^2 - 3t + 2 = 0$



$$\frac{(t-1)(t-2)}{\log_2 a} \geq 0$$

1) $a > 1$

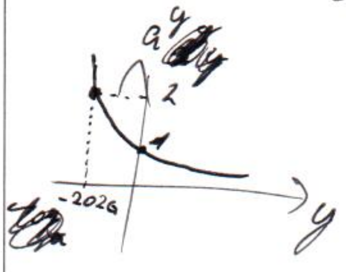
$(t-1)(t-2) \geq 0$ $\quad t > 0;\ t \neq 1$

$t \in \cancel{(-\infty; 1]} \cup [2; +\infty)$

$a^{x-1} \in [2; +\infty)$

2) $a < 1$ $\quad x = \log_a t$

$a^{x-1} \in [1; 2]$



$x-1 = y$

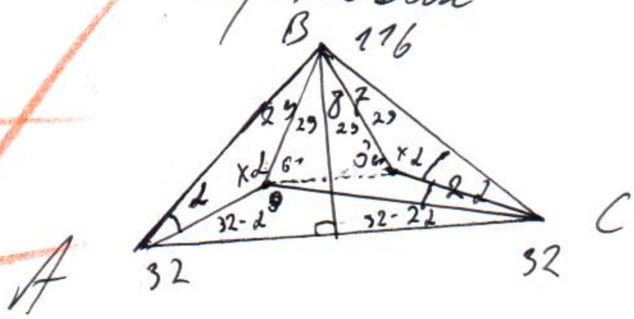
$a^{-2026} = 2$

$a =$

$\left(\frac{1}{a}\right)^{2026} = 2$

$a = \left(\frac{1}{2}\right)^{2026}$

Черновик



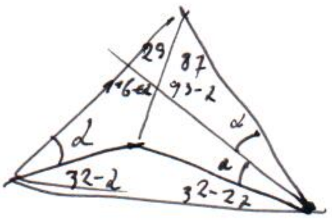
$\times\,29 \cdot 4 = 116$

87

$x - ?$

$+\,116 + 93 = 209$

$\cancel{x\alpha = 87 + 2\alpha}$



$180 - (64 - 3\alpha) =$

$\boxed{116 + 3\alpha}$

$-\,360 - 209 = 151$

$180 - (87 - 2\alpha) = 93 + 2\alpha$

$x\alpha = 360 - 116 - 93 - 5\alpha = 151 - 5\alpha$

$x\alpha = 151 - \cancel{5}\alpha$

$87 + 29 = 116$

$\alpha(x + \cancel{5}) = 151$

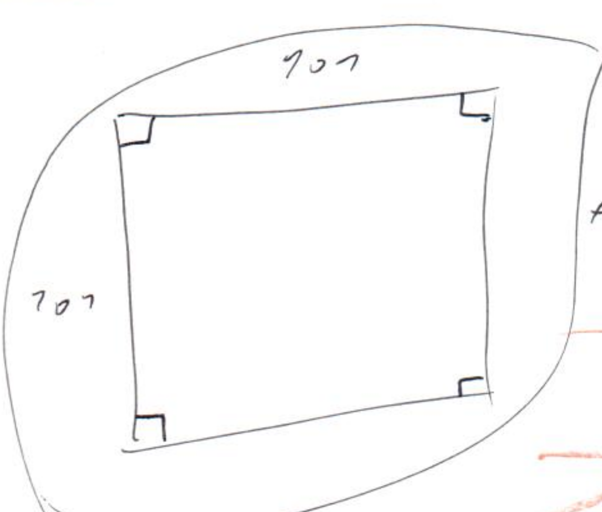
$116 + 93 = 209$

$96 + 32 - \alpha + 29 = x\alpha$

$\boxed{151 = (x+1)\alpha}$

$\frac{x}{\alpha} = \frac{151}{\alpha} - 1$

$+\,122 + 29 = 151$



$abc + 2ab + 2bc + 2ac + 4(a+b+c) = 2026$

Черновик

~~$f(x) = x^3 - (a+b+c)x^2$~~

$f(x) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ac)x - abc$

$f(-2) = -2034$

$f(0) = -abc$

$f(0) - f(-2) = 8 + 4(a+b+c) + 2(ab+bc+ac)$

$a^3 - a^3 - a^2b - a^2c + a^2b + a^2c + abc - abc = 0$

$\operatorname{tg}x \cdot \operatorname{tg}y \cdot \operatorname{tg}z \le \frac{(\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}y + \operatorname{tg}z)^3}{27}$

$\frac{1}{3\sqrt{3}}$?

Чистовик

Задача 1

По ~~т~~ теореме Виета, числа a, b, c (длина, ширина и высота призмы) являются корнями ~~куб~~ многочлена

$f(x) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ac)x - abc$

По условию, $2026 = \underset{\text{объём}}{abc} + \underset{S_{\text{общ.}}}{2(ab+bc+ac)} + \underset{\text{длины рёбер}}{4(a+b+c)}$

$f(-2) = -8 - 4(a+b+c) - 2(ab+bc+ac) - abc =$

$= -8 - 2026 = -2034$

$f(0) = -abc$