0 039356 110002

03-93-56-11
(124.3)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 1

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Валиуллина Талгата Маратовича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

+1

Дата

«23» марта 2026 года

Подпись участника

 75 (семьдесят пять)

03-93-56-11 (124.3)

Черновик

1. $\sqrt{6(1-tg^2x)} = 4\sin x$

$\sqrt{6\dfrac{\cos^2x-\sin^2x}{\cos^2x}} = 4\sin x$

$\dfrac{\sqrt{6\cos 2x} - 4\sin x\cos x}{\cos x} = 0$

$\sqrt{6\cos 2x} - 2\sin 2x = 0$

$\sqrt{6\cos 2x} = 2\sin 2x$

$6\cos 2x = 4\sin^2 2x$

$4\cos^2 2x + 6\cos 2x - 4 = 0$

$D_1 = 9 + 16 = 25$

$\cos 2x = \dfrac{-3+5}{4} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow 2x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k$

$\cos 2x = -2\ \varnothing \qquad 2x = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k$

$x = \dfrac{\pi}{6} + \pi k$

$x = -\dfrac{\pi}{6} + \pi k\ \varnothing$

2. * s(A) - сумма цифр

$\dfrac{A}{s(A)} \vdots 9 \;\; | \Rightarrow A \vdots 9 \cdot s(A)$ 243

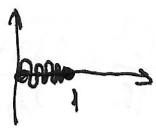
$A \vdots 81$ $\quad \dfrac{162}{9} = 18 \quad \dfrac{171}{9} = 19$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
162	243	324	405	486	567	648	729	810	891

$\dfrac{486}{18}$ ✓

$243 + 486 + 891 = 1620$

4. $\sin 15\pi x = \sin 15\pi x$

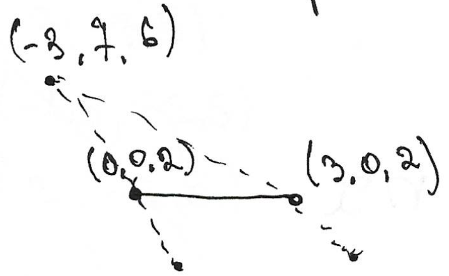


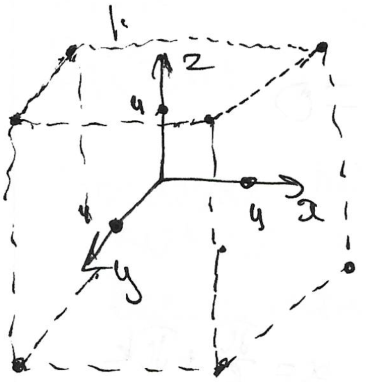
Черновик

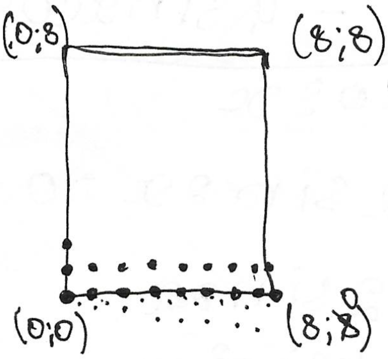
$$Cx^2 - C(x-1)^2 = \cancel{= 2C(x+C}$$

$$x^2 = \sqrt{\frac{y}{c}}$$

$$C(2x-1) = 0$$







81T.

$8\cdot 8$

$\cancel{8\cdot 7}$

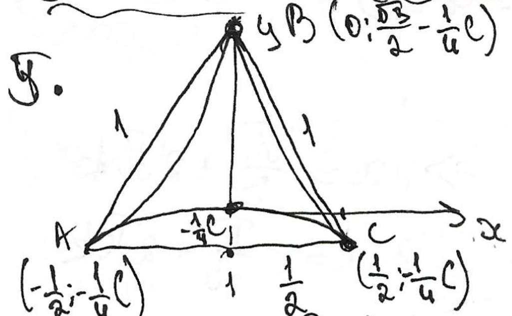
$$C_8^2 = \frac{8\cdot 8}{2} = 36$$

$$36\cdot 3\cdot 2\cdot 3 =$$

$$\cancel{162} \quad 6^2\cdot 8^2\cdot 2 =$$

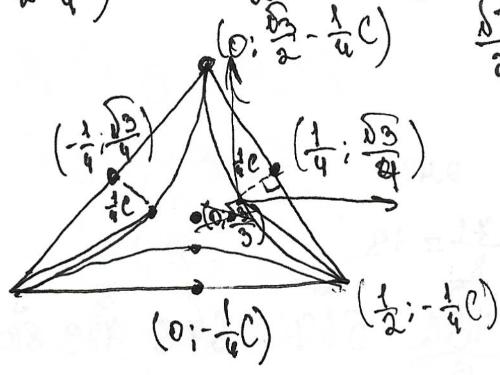
$$= 2\cdot 54^2$$

$$3\cdot 3\cdot 2\cdot 54^2 = 6\cdot 162^2$$

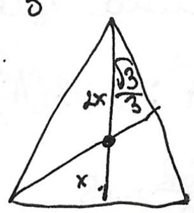


$A(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}C)$

$B(0; \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{4}C)$



$$\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{4}C + \frac{1}{4}C = \sqrt{3}\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{6}$$



$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2}{3}$$

$y = Cx^2$

$\frac{C}{4}$

$\frac{C}{4}$

$$8x^2\log_a x - \log_x a - 2x \le 0$$

$$D = 1 + 8 = 9$$

$$x_1 = \frac{1+3}{8\log_a x} = \frac{1}{2\log_a x} = \frac{\log_x a}{2}$$

$$x_2 = \frac{1-3}{8\log_a x} = -\frac{\log_x a}{4}$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{C}{4}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

$$\cancel{\frac{1}{16} + \frac{3}{16}} + \frac{C^2}{16} + \frac{2\sqrt{3}C}{16} = \frac{1}{4}\Big| 16$$

$$C^2 + 2\sqrt{3}C - 4 = 0 \qquad C_1 = \cancel{-2\sqrt{3}+\sqrt{7}}$$

$$D_1 = 3 + 4 = 7$$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

03-93-56-11 (124.3)

Черновик

$x > 1$

$$8\log_a x\left(x^2 - \frac{x}{4\log_a x} - \frac{\log_x a}{8\log_a x}\right) =$$

$$= 8\log_a x\left(x - \frac{\log_x a}{2}\right)\left(x + \frac{\log_x a}{4}\right) \le 0$$

$\log_a x \geq 0$

$x \geq 1$

$x \geq \frac{\log_x a}{2}$

$2x \geq \log_x a$

$x^{2x} \geq a$

$x \geq -\frac{\log_x a}{4}$

$-4x \leq \log_x a$

$a \geq \frac{1}{4x^x}$

$-$

$\cancel{+}$ $+$ $+$ $-$

$-\frac{\log_x a}{4}$ $\quad 1 \quad$ $\frac{\log_x a}{2}$ $\quad x$

$\frac{\log_x a}{2} > -\frac{\log_x a}{4} \Big| \cdot 4$

$2\log_x a > -\log_x a$

$3\log_x a > 1$

$a > x^{\frac{1}{3}}$

$\frac{\log_x a}{2} = 1$

$\log$

$8x^2\log_a x - 2x - \log_x a \leq 0$

$a > 1$

$x > 1$

$D_1 = 1 + 8 = 9$

$x_1 = \frac{4}{8\log_a x} = \frac{1}{2\log_a x}$

$x_2 = \frac{-2}{8\log_a x} = -\frac{1}{4\log_a x}$

$\log_a x \geq 0$

$x\log_a x = y$

$y > 1$

$8x^2\log_a x - 2x - \log_x a \;\Big|\; x - \frac{1}{2\log_a x}$

$-8x^2\log_a x - 4x \qquad\qquad 8x\log_a x + 2$

$-2x - \log_x a$

$-2x - \frac{1}{\log_a x}$

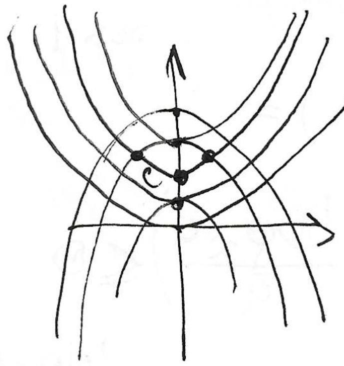
0

$(8x\log_a x + 2)\left(x - \frac{1}{2\log_a x}\right) \leq 0$

$-\frac{1}{4} \qquad \frac{1}{2} \qquad y$

черновик

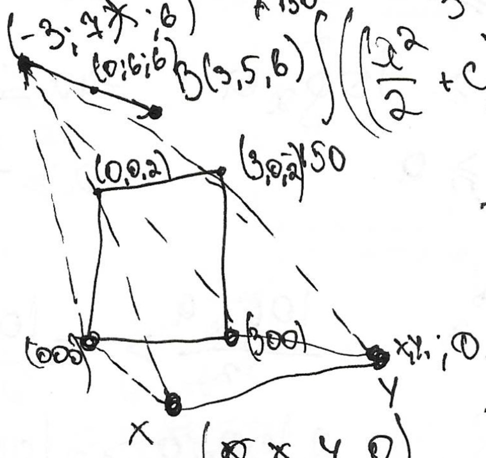
$\frac{x^2}{2}+c$



$\frac{x^2}{2}+\cancel{c}=-\frac{x^2}{2}+\cancel{c}+1$

$2\int_{-1}^{1}\left(\frac{x^2}{2}+c\right)dx=\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1}+\cancel{cx}\Big|_{-1}^{1}=\frac{2}{3}$

$\int_{-150}^{150}\left(\left(\frac{x^2}{2}+c\right)-\left(\frac{x^2}{2}+c-1\right)\right)dx=300$ мм^2



$-3x+7y+84z$

$-4z$	$+3x$	$-7y$
$-2z$	$1{,}5x$	$-3{,}5y$
$-4z$	$-7y$	$+6x$
$-2z$	$-3{,}5y$	$+3x$
$-4z$	$-3x$	$-5y$
$-2z$	$-1{,}5x$	$-2{,}5y$
$-4z$	$0x$	$-5y$
$-2z$	$0x$	$-2{,}5y$
$-4z$	$-6y$	
$-2z$	$-3y$	

$(\cancel{0},x,4,0)$

$X(1{,}5;-3{,}5;0)$

$Y(6;-3{,}5\cancel{x};0)$

$Z(-1{,}5;-2{,}5;0)$

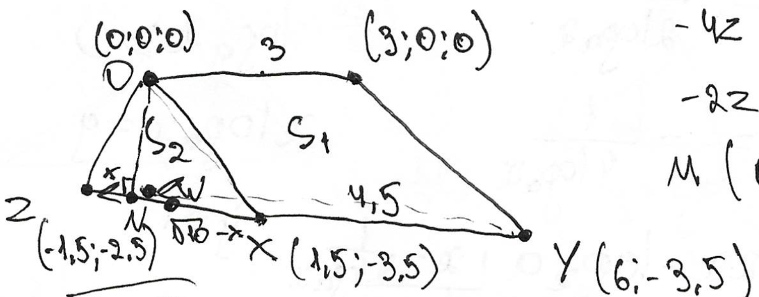
$W(0;-2{,}5;0)$

$M(0;-3;0)$

$216\cdot216$: 1296, 216, 432 → $46656\cdot3 = 139968$

$216\cdot3=648$; $648\cdot216$: 3888, 648, 1296 → 139968

$3{,}5\cdot3{,}5$: 175, 105 → $12{,}25$



$2{,}25+\sqrt{14{,}5}$

$S_1=3{,}5\cdot\frac{7{,}5}{2}=\frac{\cancel{75}^{25}\cdot\cancel{35}^{7}}{\cancel{200}_{\cancel{40}\,8}}=\frac{175}{8}=21+\frac{7}{8}=21{,}875$

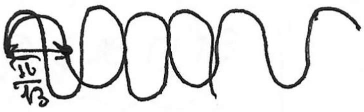
$XZ=\sqrt{10}$

$XO=\sqrt{14{,}5}=\sqrt{\frac{29}{2}}$ $\quad S_2$ $\quad \frac{17}{2}-\cancel{x^2}=\frac{29}{2}-10+2\sqrt{10}x-\cancel{x^2}$

$OZ=\sqrt{8{,}5}=\sqrt{\frac{17}{2}}$ $\quad 2\sqrt{10}x=4$ $\quad h=\sqrt{OZ^2-x^2}=$

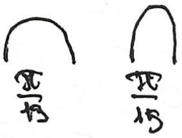
$S_2=\frac{h\cdot xz}{2}=\frac{3\cdot\sqrt{10}}{2\sqrt{20}}=\frac{3}{2\sqrt{2}}$ $\quad x=\frac{2}{\sqrt{10}}$ $\quad =\frac{17}{2}-\frac{4}{10}=\frac{3}{\sqrt{20}}$

4. Черновик



$\sin 13\pi x = \sin 15\pi x$

НОК



$(2k+1)\pi - 13\pi x = 15\pi x$

$\cancel{k}\pi - 13\pi x = 15\pi x$

$k\pi = 28\pi x$

$x = \frac{2k+1}{28}$

$\sin(2\pi - \alpha) = \sin 2\pi \cos\alpha - \cos 2\pi \sin\alpha = -\sin\alpha$

16 реш. 15 реш.

$\frac{2k_1+1}{32} = \frac{2k_2+1}{30}$

$60k_1 + 30 = 64k_2 + 32$

$64k_2 - 60k_1 = -2$

$0 < \frac{2k+1}{28} < 1$

$0 < 2k+1 < 28$

$k \in [0;13]$

45 реш.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ...... 45 45 46

46

Чистовик №1

1) $\sqrt{6(1-tg^2x)}=4\sin x$

$6(1-tg^2x)=16\sin^2x$

$\frac{6\cos 2x}{\cos^2x}=16\sin^2x$

$6\cos 2x=4\sin^2 2x$

$4\cos^2 2x+6\cos 2x-4=0$

$D_1=9+16=25$

$\cos_1 2x=\frac{-3+5}{4}=\frac{1}{2}$

$\cos_2 2x=-2$ $\cancel{\varnothing}$, не бывает такого $\cos x\in[-1;1]$

$\sin x\geq 0$

$x\in[2\pi k;\pi+2\pi k]$

$k\in\mathbb{Z}$

$\cos x\neq 0$

$x\neq \cancel{2\pi}\ \frac{\pi}{2}+\pi k$

$k\in\mathbb{Z}$

2) $\cos 2x=\frac{1}{2}$

1. $2x=\frac{\pi}{3}+2\pi k$

$x=\frac{\pi}{6}+\pi k$

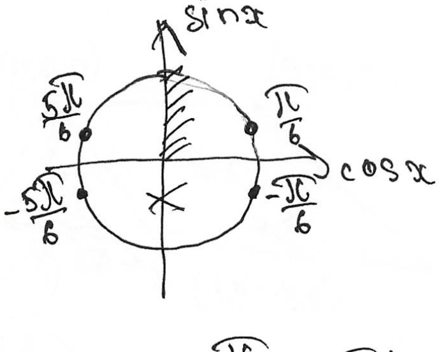
$k\in\mathbb{Z}$

2. $2x=-\frac{\pi}{3}+2\pi k$

$x=-\frac{\pi}{6}+\pi k$

$k\in\mathbb{Z}$

3)



$\sin x\geq 0$

нам подходит только

$x=\frac{\pi}{6}+2\pi k$ и $x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k$

$k\in\mathbb{Z}$

Ответ: $x=\frac{\pi}{6}+2\pi k$

$x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$

Чистовик №2

1) ~~A~~ = n - трёхзначное число, которое $n \in A$
Пусть $S(n)$ - сумма цифр числа n, тогда:

$\frac{n}{S(n)} \vdots 9 \Rightarrow n \vdots 9 \cdot S(n)$ $\left(\frac{n}{S(n)} \in \mathbb{Z}\right.$, по условию$\left.\right)$

$\Rightarrow n \vdots 9 \underset{\text{признак делимости на 9}}{\Rightarrow} S(n) \vdots 9 \Rightarrow n \vdots \underset{9 \cdot 9}{81} \Rightarrow$ подходят те n, которые делятся на 81

2) Проверим число $81 \cdot 2$:

$n = 81 \cdot 2 = 162$ | $\frac{n}{S(n)} = \frac{162}{9} = 2 \cdot 9 \vdots 9$ ✓

$S(162) = 9$

3) $81k > 100$ $\qquad$ $81k < 1000$

$k > \frac{100}{81} > 1$ $\qquad$ $k < \frac{1000}{81} < 13$

$k \in \mathbb{Z}$ $\qquad$ $k \in \mathbb{Z}$

Нам подходят числа:

A $\{81 \cdot 2; 81 \cdot 3; 81 \cdot 4; 81 \cdot 5; 81 \cdot 6; 81 \cdot 7; 81 \cdot 8; 81 \cdot 9; 81 \cdot 10; 81 \cdot 11; 81 \cdot 12\}$

4) $S = 81 \cdot 3 + 81 \cdot 6 + 81 \cdot 11 = 81 \cdot 20 = 1620$

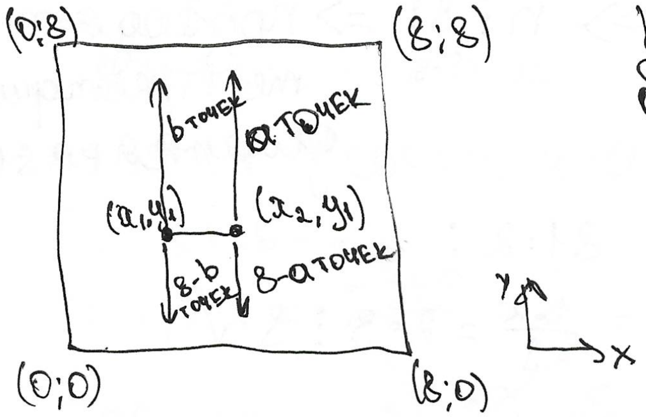
Ответ: 1620, A

№3

1) Множество точек F - это куб $9 \times 9 \times 9$ $(4+4+1)$.
Заметим, что если каждый катет параллелен какой-либо из осей, то треугольник лежит в плоскости параллельной OXY, OXZ, OYZ плоскостям. Так как любая такая плоскость, которая параллельна OXY, OXZ, OYZ ~~от~~ содержит

Чистовик

содержит одинаковое кол-во точек $(9 \cdot 9)$, мне нужно посчитать кол-во прямоугольных треугольников в одной из таких плоскостей:



Катеты должны быть параллельны OX или OY, заметим, что если мы выберем две точки, которые образуют отрезок, который параллелен OX или OY (допустим OX), то ~~а~~ они имеют вид $(x_1, 0)$ и $(x_2, 0)$ и мы можем выбрать третью точку $(x_1, \overset{0}{y_1})$ или (x_2, y_2) и она будет образовывать прямоуг. треугольник (пример на рисунке, ~~но~~ можно выбрать любую точку на стрелочках из точек). Посчитаем, сколько отрезков параллельных OX:

на $(0;0) - (8;0)$ - 9 точек $\Rightarrow C_9^2 = 36$ - кол-во отрезков параллельных OX

на всём квадрате $9 \cdot C_9^2 = \cancel{?}324$

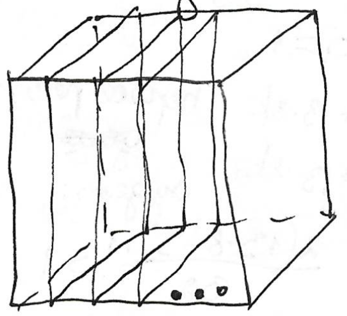
Посчитаем сколько прямоуг треугольников выходит:

$n_{тр} = 9 \cdot C_9^2 \cdot 16 = 72^2 = 324 \cdot 16$ прямоуг. $\triangle$ на одной плоскости

на 16, потому что $a + 8 - a + b + 8 - b = 16$. Каждый отрезок уникальный $\Rightarrow$ любая точка будет образовывать уникальный треугольник

Чист.

2) Заметим, что если умножить кол-во прямоуг. в одной плоскости на кол-во таких плоскостей, то получится ровно то, что нам нужно



n плоскостей $= 9 \cdot 3 = 27$

3 оси

$n_{всего} = n_{тр} \cdot n_{пл.} = 27 \cdot 72^2 = 3 \cdot 216^2 =$

$= 139968$ треугольников

Ответ: 139968 треугольников

№4

1) все три наши функции пересекаются в 2 точках вместе в $x=0$ и $x=1$, чтобы посчитать кол-во интервалов надо найти когда функции пересекаются хотя бы две, посчитать кол-во решений и добавить единицу (считаем интервалы а не точки)

2) $\sin 13\pi x = \sin 15\pi x$

$(2k+1)\pi - 13\pi x = 15\pi x$

$x = \frac{2k+1}{28}$

$0 \leq \frac{2k+1}{28} \leq 1$

$k \in [0; 13]$

14 реш.

3) $\sin 13\pi x = \sin 17\pi x$

$x = \frac{2k+1}{30}$

$k \in [0; 14]$

15 реш.

4) $\sin 15\pi x = \sin 17\pi x$

$x = \frac{2k+1}{32}$

$k \in [0; 15]$

16 реш.

5) $n_{реш.} = 45$ реш., осталось д-ть, что они не пересекаются втроём в какой-либо точке, кроме 0 и 1:

Чистовик

1. $\frac{2k_1+1}{28} = \frac{2k_2+1}{30}$

$60k_1+2=56k_2 \,|:2$

$30k_1-28k_2=-1$

$\varnothing$

чётное - чётное = чёт

2. $\frac{2k_1+1}{28} = \frac{2k_3+1}{32}$

$64k_1+4=56k_3 \,|:4$

$8k_1+1=13k_3$

$13k_3-8k_1=1$

$k_3=-3+13\cdot 8k$

$k_1=-5+13\cdot 8k$

первое реш. >0 ~~для~~ будет:

$\frac{2(13\cdot 8-3)+1}{32}>1$

не подх.

3. $\frac{2k_2+1}{30} = \frac{2k_3+1}{32}$

$64k_2+2=60k_3$

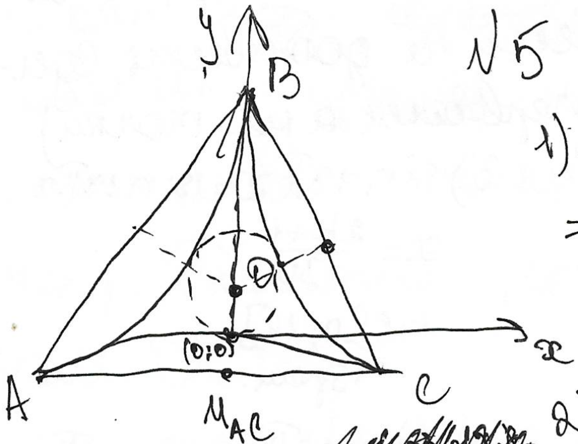
$32k_2-30k_3=-1$

$\varnothing$

б) $n_{\text{интервалов}} = n_{\text{реш.}}+1 = 46$ интервалов

Ответ: 46 интервалов

№5



1) $AC=1$, $M_{AC} \in$ ~~OX~~ ~~ось~~ ось Y $\Rightarrow$

$\Rightarrow C_x=\frac{1}{2}, A_x=-\frac{1}{2}$ $\Big| \Rightarrow$

$C_y=-\frac{c}{4}, A_y=-\frac{c}{4} \Rightarrow M_{AC}\left(0;-\frac{c}{4}\right)$

2) $BM_{AC}=\frac{\sqrt3}{2} \Rightarrow B\left(0;\frac{\sqrt3}{2}-\frac{c}{4}\right)$

3) $BO:OM_{AC}=2:1$ так как O - центр вписанной и описанной $\triangle ABC$

4) Почему это та самая точка:

O - равноудалена от вершин парабол, т.к. вписана в вершины; расстояния от вершина параболы до середины ~~сто~~ соответствующей стороны равностороннего $\triangle ABC$ тоже равны $\Rightarrow$

Чистовик

$\Rightarrow$ O - равноудалена от середин $\Rightarrow$ O - центр вписанной и описанной $\Rightarrow$ BM_{AC} - медиана, а O - т.п. медиан, тогда $BO:OM_{AC}=2:1$

$O(0; -\frac{1}{4}C+\frac{\sqrt{3}}{6}) \Rightarrow R_{впис} = -\frac{1}{4}C+\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{1}{4}C=\frac{\sqrt{3}}{6}$

$R_{внутр}=\frac{\sqrt{3}}{6}-\frac{1}{4}C$

б) $M_{BC}=\left(\frac{1}{4}; \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{4}C+\frac{1}{4}C}{2}\right)=\left(\frac{1}{4};\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, $M_{AC}(0;-\frac{1}{4}C)$

$M_{AC}M_{BC}=\frac{1}{2}=\frac{1}{4}^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{4}C\right)^2=\frac{1}{16}+\frac{3}{16}+\frac{\cancel{2}\sqrt{3}C}{8}+\frac{C^2}{16}$

$\frac{C^2}{16}+\frac{2\sqrt{3}C}{16}-\frac{\cancel{12}4}{16}=0$

$D_1=3+4=7$

$C_1=-\sqrt{3}+\sqrt{7}$

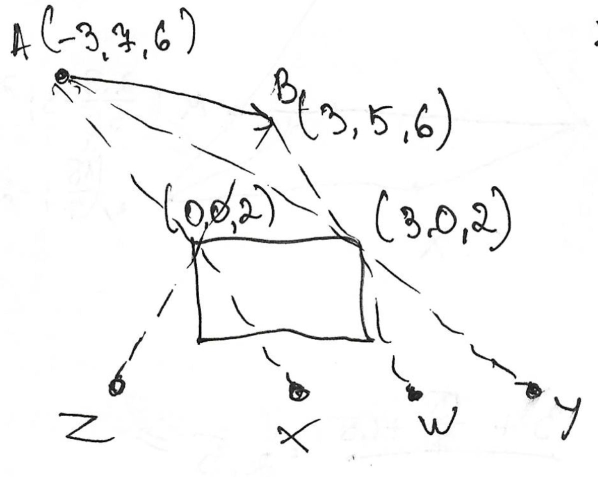
C_2 - не подх.

$\Rightarrow C=-\sqrt{3}+\sqrt{7}$

в.) $R=\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{7}}{4}=\frac{5\sqrt{3}}{12}-\frac{\sqrt{7}}{4}$

Ответ: $\frac{5\sqrt{3}-3\sqrt{7}}{12}$

№6



$\divideontimes$ $AX - 4z - 7y + 3x \Rightarrow$

$X(1,5; -3,5; 0)$

$AY - 4z - 4y + 6x \Rightarrow$

$Y(3; -3,5; 0)$

$BZ - 4z - 3x - 5y \Rightarrow$

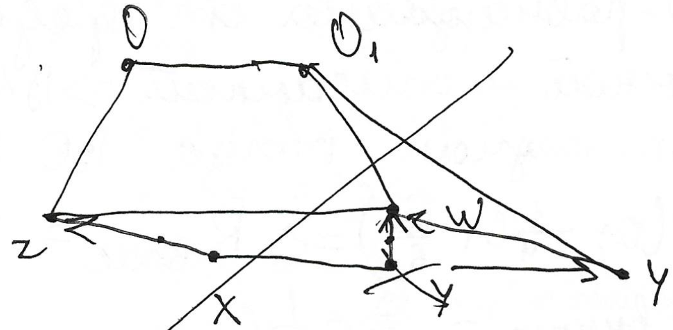
$Z(-1,5; -2,5; 0)$

$BW - 4z \ominus x - 5y \Rightarrow$

$W(3; -2,5; 0)$

Чистовик

X(1,5; -3,5)
Y(3; -3,5)
Z(-1,5; -2,5)
W(3; -2,5)
O(0;0)
O_1(3;0)



пока летел светлячок $X \to Z$, $Y \to W$ $\Rightarrow S_{\text{нужная}} = S_{OO_1WYXZ}$

S_{OO_1WYXZ} - покрывает все точки, которые были тёмными

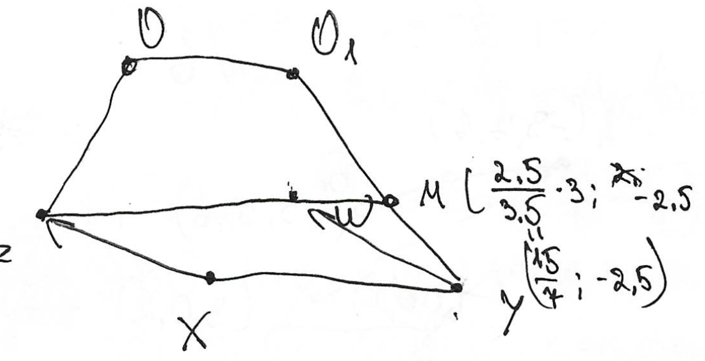
$$S_{OO_1WYXZ} = S_{ZOO_1W} + S_{YXZW}$$

$$S_{ZOO_1W} = \frac{3+4,5}{2} \cdot 2,5 = \frac{75 \cdot \cancel{25}}{\cancel{200}_8} = \frac{75}{8}$$

$$S_{YXZW} = \frac{1,5+4,5}{2} \cdot 1 = 3$$

$$S_{OO_1WYXZ} = 3 + \frac{75}{8} =$$

X(1,5; -3,5)
Y(6; -3,5)
Z(-1,5; -2,5)
W(3; -2,5)
O(0;0)
O_1(3;0)



$$S = \frac{4,5 + \frac{15}{7} + 1,5}{2} + \frac{3 + \frac{15}{7} + 1,5}{2} \cdot 2,5 =$$

$$= 3 + \frac{15}{14} + \frac{4,5 \cdot 2,5}{2} + \frac{15 \cdot 2,5}{14} = \frac{24 + 45}{8} + \frac{15 \cdot \cancel{3,5}}{\cancel{3,5} \cdot 4} = \frac{89}{8}$$

Ответ: $\frac{89}{8}$

Черновик №8

$8x^2\log_a x - \log_x a - 2x \le 0$

ОДЗ:
$x>1$
$a>1$

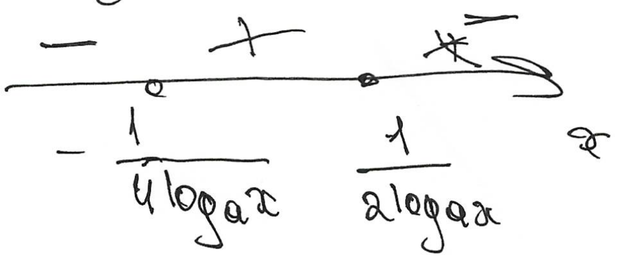
$8x^2\log_a x - 2x - \log_x a \le 0$

$D_1 = 1 + 8\log_a x \cdot \log_x a = 9$

$x_1 = \frac{4}{8\log_a x} = \frac{1}{2\log_a x}$

$x_2 = -\frac{2}{8\log_a x} = -\frac{1}{4\log_a x}$

$\log_a x > 1$

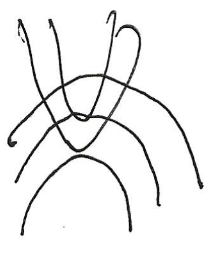


нам всегда подходит интервал от $-\frac{1}{4\log_a x}$ до $\frac{1}{2\log_a x}$, а условием $x>1$ не получить точку $\Rightarrow a\ \varnothing$

Ответ: ни при каких

№7

$\pm\frac{x^2}{2}+c \Rightarrow$



макс площадь будет в ~~центре~~ клетке двух парабол т.к

$\frac{x^2}{2}+c = -\frac{x^2}{2}+c+1$

$\int_{-1}^{1}\left(\left(\frac{x^2}{2}+c\right)-\left(-\frac{x^2}{2}+c+1\right)\right)dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} - 1 = \frac{2}{3}$