0 567628 620008

56-76-28-62
(122.11)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 9 класс

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Владимирова Алексея Алексеевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

работа сдана досрочно в 13.04

Дата

«29» марта 2026 года

Подпись участника

56-76-28-62 (22.11)

№1 Лист 1

Заметим, что центр окружности лежит на серединном перпендикуляре любой её хорды!

Если 2 хорды пересекаются в точке, делящей их пополам, то эта точка является единственным пересечением их серединных перпендикуляров, т.к. хорды разные и у 2 прямых не более 1 точки пересечения =>

=> эта точка является центром описанной окружности => длина любой хорды, проходящей через эту точку равна длине диаметра окружности (т.к. она является диаметром) => длина 3-й хорды равна 10. Отв: 10.

№2

Заметим, что наименьшее четырехзначное число - 1000.

$1000^2 = 1.000.000.$

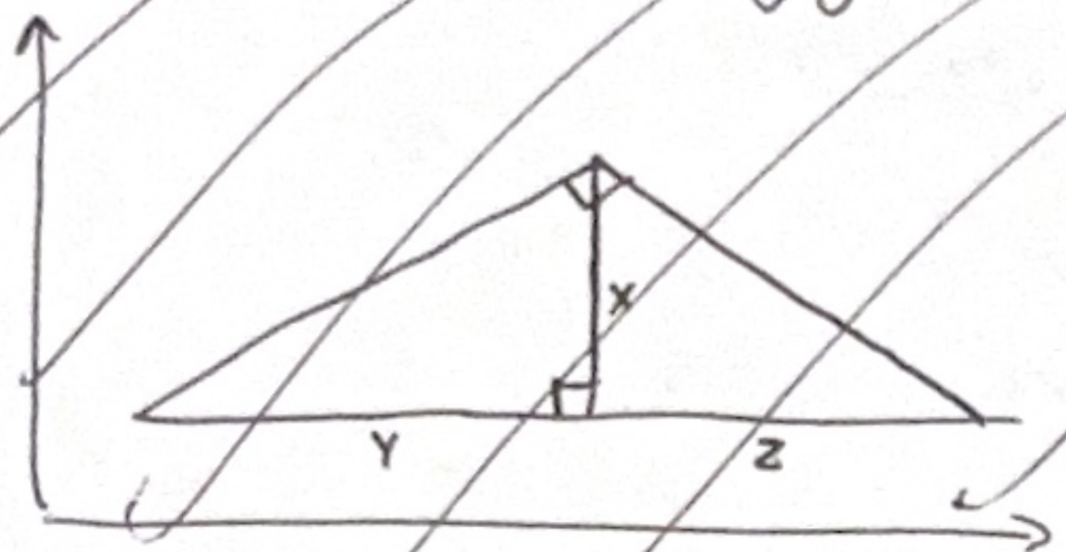
Первые 4 цифры числа 1000.000 образуют 1.000 => 1000 подходит, т.е. 1000 - - наименьшее четырехзначное число такое, что первые несколько цифр числа n^2 образуют n.

Отв: 1000

№3 Лист 2

~~Заметим, что или оба катета параллельны осям, или гипотенуза параллельна одной из осей.~~

~~Если гипотенуза параллельна 1 из осей, то:~~



~~$X, Y, Z \in N$~~

~~$(x^2+y^2)+(x^2+z^2)=(y+z)^2=y^2+2yz+z^2$~~

~~$x^2=yz$~~

Рассмотрим треугольники такого вида: .

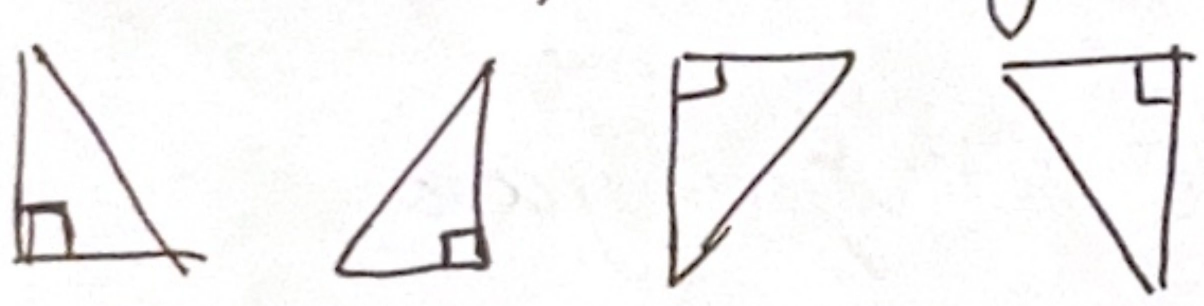
Если длины ~~сторон~~ катетов x и y, то существует $(10-x)(10-y)$ вариантов его расположения $(x, y \le 9)$

Количество таких Δ:

$$\underbrace{9}_{x=1}\cdot(\underbrace{9}_{y=1}+\underbrace{8}_{y=2}+\underbrace{7}_{y=3}+\ldots+\underbrace{1}_{y=9})+\underbrace{8}_{x=2}(9+8+\ldots+1)+\underbrace{1}_{x=9}(9+8+\ldots+1)=$$

$$=(9+8+\ldots+1)(9+8+\ldots+1)=\frac{9\cdot10}{2}\cdot\frac{9\cdot10}{2}=45^2=2025.$$

Заметим, что существует 4 видов Δ:



и для каждого из них кол-во вариантов считается по той же формуле.

Тогда общее число возможных Δ =

$= 2025\cdot4 = 8100$

Отв: 8100

56-76-28-62 (122.11)

Лист 3

№6

$\frac{1}{a} + \frac{2x}{a^2} - \frac{3x^2}{a^3} \le 0$

$\frac{a^2 + 2ax - 3x^2}{a^3} \le 0$

$\frac{3x^2 - 2ax - a^2}{a^3} \ge 0$, $a \ne 0$

1) $a > 0$:

$3x^2 - 2ax - a^2 \ge 0$

$(x-a)(3x+a) \ge 0$

$\left[\begin{array}{l} x \ge a \\ x \le -\frac{1}{3}a \end{array}\right.$

Множество решений не является отрезком

2) $a < 0$:

$3x^2 - 2ax - a^2 \le 0$

$(3x+a)(x-a) \le 0$

$(3x-|a|)(x+|a|) \le 0$

$-|a| \le x \le \frac{|a|}{3}$

[redacted]

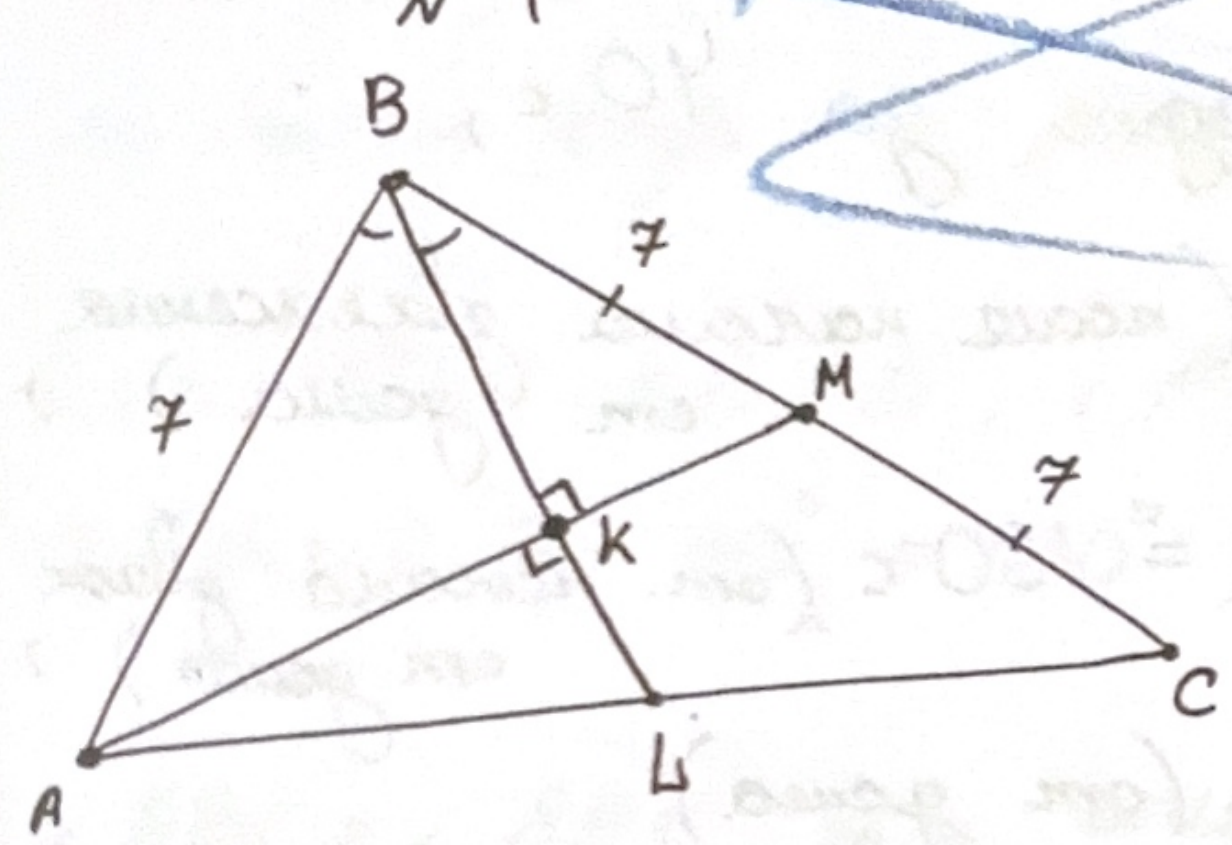
$\begin{cases} x \le a < 0 \\ x \ge -\frac{1}{3}a > 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < x < 0 \Rightarrow \varnothing$

Не имеет решений

Таких a, что множеством решений неравенства является отрезок длины 2026 не существует

Отв: $\varnothing$

№4



Пусть K – пересечение AM и BL

$\angle AKB = \angle BKM \Rightarrow BK$ – высота $\triangle ABM$

$\angle ABK = \angle KBM \Rightarrow BK$ – бисс. $\triangle ABM$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle ABM$ – р/б по признаку $\Rightarrow BM = 7$; $BC = 14$

Если $AC \le 7$, то $AB + AC \le BC \Rightarrow$

$\Rightarrow$ по неравенству $\triangle$ такого $\triangle$ не существует

Если $AC \ge 21$, то $BA + BC \ge AC \Rightarrow$

$\Rightarrow$ по неравенству $\triangle$ такого $\triangle$ не существует $\Rightarrow$

$\Rightarrow AC \in (7; 21)$, $AC \in \mathbb{N}$. Если $AC = 14$, то $AC = BC \Rightarrow \triangle ABC$ – р/б. Противоречие

$P = 21 + AC$ Отв: {[redacted] 29; 30; 31; 32; 33; 34; 36; 37; 38; 39; 40; 41}

№5

Пусть v м/с - скорость Агриппины на самокате.

Если $v > \frac{50}{30} = \frac{5}{3}$ м/с, то она въехает на 1 переход на красный сигнал.

При $v = 5/3$ она доедет до 2 перехода за $\frac{50+30+120}{5/3} = \frac{200}{5/3} = 120$с. За ~~это~~ время загорится красный (за 10с), зеленый (через 50с), красный (через 50с) => в момент её приезда будет гореть красный. =>

$\Rightarrow v \leq \frac{200\text{м}}{10с+50с+50с+50с} = \frac{200}{160} = \frac{20}{16} = \frac{5}{4}$ м/с,

иначе при въезде на 2 переход будет гореть красный.

При $v = \frac{5}{4}$ м/с:

К первому переходу она подъедет за 40 с, съедет с него через $\frac{80}{5/4} = 64$с (после начала движения от дома), ко второму подъедет через $\frac{200}{5/4} = 160$с (от начала движе от дома), съедет с него через $\frac{210}{5/4} = 168$с (от дома)

На 1 переходе зеленый горит с 30 по 80; 110 по 160 и тд.

$40 > 30$ и $64 < 80$ => она не нарушит правил дорожного движения

На 2 переходе зел. горит с 0 по 10, с 60 по 110, со 160 по 210 и тд.

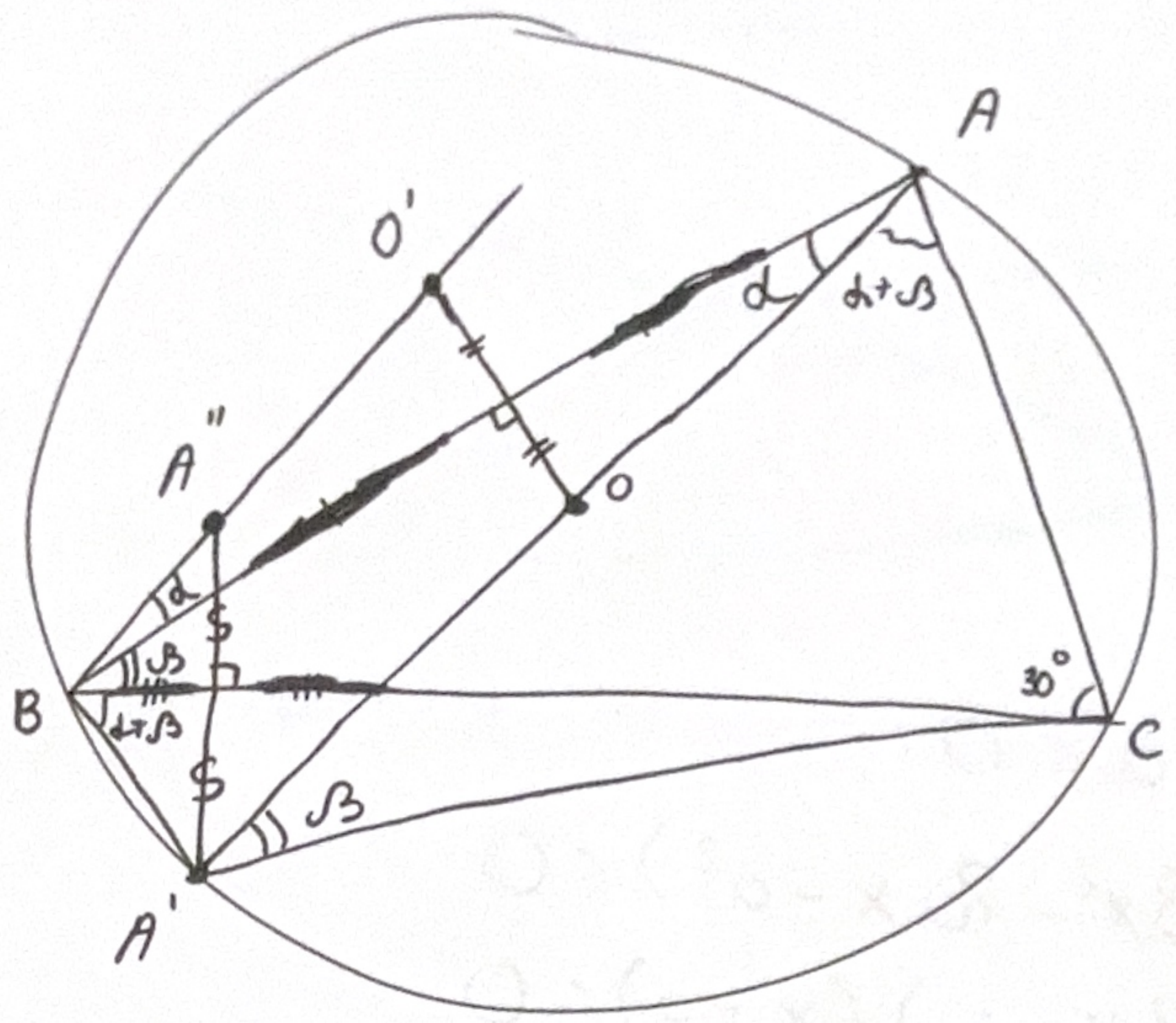
$160 \geq 160$ и $168 < 210$ => она не нарушает ~~ПДД~~ =>

=> наибольшая скорость $= 5/4$ м/с

Отв: $\frac{5}{4}$ м/с

Лист 5 №7

A' - точка, диаметрально противоположная A



Пусть $\angle O'BA = \alpha$;
$\angle ABC = \beta$.

$\triangle A'BA''$ - р/б, т.к. высота и медиана, проведенные из B совпадают $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle A'BC = \angle CBA'' = \alpha + \beta$

$\angle A'BC = \angle A'AC$, т.к. опираются на 1 дугу $\Rightarrow$
$\Rightarrow \angle A'AC = \alpha + \beta$.

$\triangle OBO'$ - р/б, т.к. высота и медиана из B совпадают $\Rightarrow \angle O'BA = \angle ABO = \alpha$.

$\triangle OAB$ - р/б, т.к. O- центр окр, A и B лежат на этой окр $\Rightarrow \angle BAO = \angle ABO = \alpha$.

В $\triangle ABC$ $\angle B = \beta$; $\angle A = 2\alpha + \beta$; $\angle C = 30°$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow 2\alpha + 2\beta + 30° = 180°$; $\alpha + \beta = 75°$

$\angle ABC = \angle AA'C$, т.к опираются на 1 дугу $\Rightarrow$
$\Rightarrow \angle AA'C = \beta$.

AA' - диаметр $\Rightarrow \angle ACA' = 90° \Rightarrow \alpha + 2\beta + 90° = 90°$ $\Rightarrow$
(из $\triangle AA'C$)

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta = 90° \\ \alpha + \beta = 75° \end{cases} \Rightarrow \angle \beta = 15°$

$\angle B = \angle ABC = \angle \beta = 15°$.   Отв: $15°$

Лист 6

№6

$$\frac{1}{a}+\frac{2x}{a^2}-\frac{3x^2}{a^3}\le 0$$

$$\frac{a^2+2ax-3x^2}{a^3}\le 0$$

$$\frac{3x^2-2ax-a^2}{a^3}\ge 0\ ;\ a\ne 0$$

1) $a>0$:

$3x^2-2ax-a^2\ge 0$

$(3x+a)(x-a)\ge 0$

$\left[\begin{array}{l} x\ge a \\ x\le -\frac{1}{3}a \end{array}\right.$

Множество решений не является отрезком

2) $a<0$:

$(3x^2-2ax-a^2)\le 0$

$(3x+a)(x-a)\le 0$

$(3x-|a|)(x+|a|)\le 0$

$\begin{cases} x\le \frac{1}{3}|a| \\ x\ge -|a| \end{cases}$

Множество решений - отрезок длиной $\frac{4}{3}|a|$

$\frac{4}{3}|a|=2026$

$|a|=\frac{2026\cdot 3}{4}=\frac{1013\cdot 3}{2}=\frac{3039}{2}$

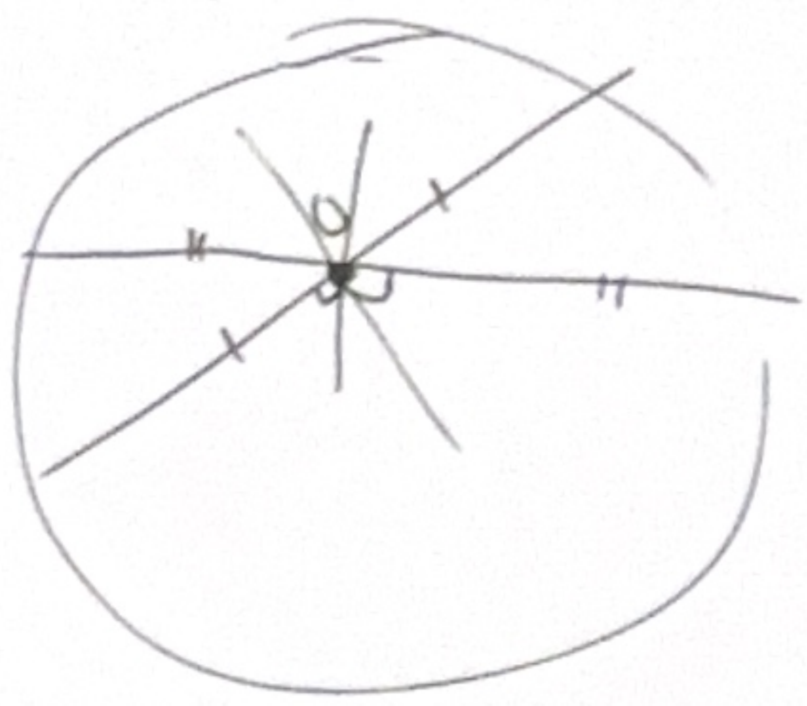
$a=-\frac{3039}{2}$, тк $a<0$

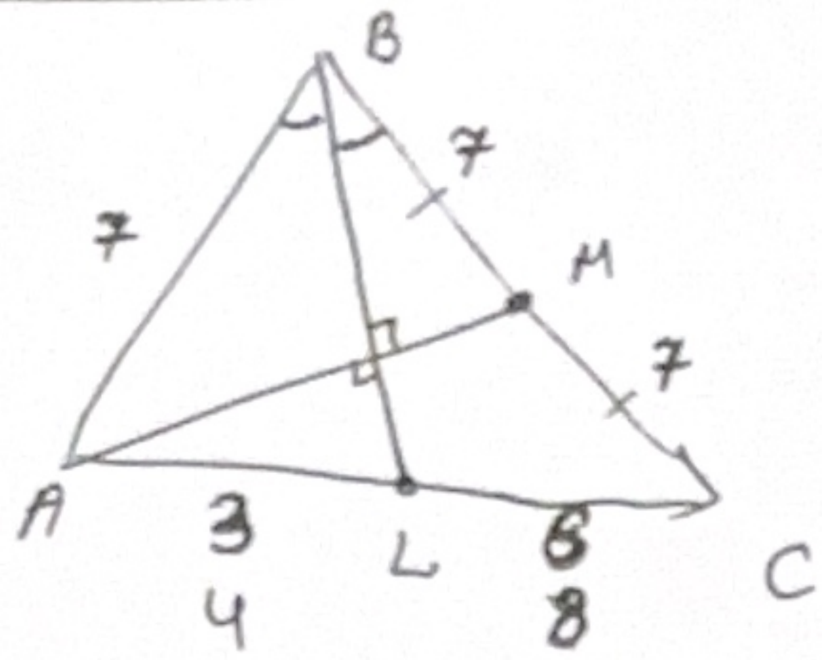
Отв: $\left\{-\frac{3039}{2}\right\}$

№8

$1/13$

Черновик





3	6
4	8
5	10
6	12
~~7~~	~~14~~

$$\frac{1}{a}+\frac{2x}{a^2}-\frac{3x^2}{a^3}\leq 0$$

$$\frac{3x^2-2x\cdot a-a^2}{a^3}\geq 0$$

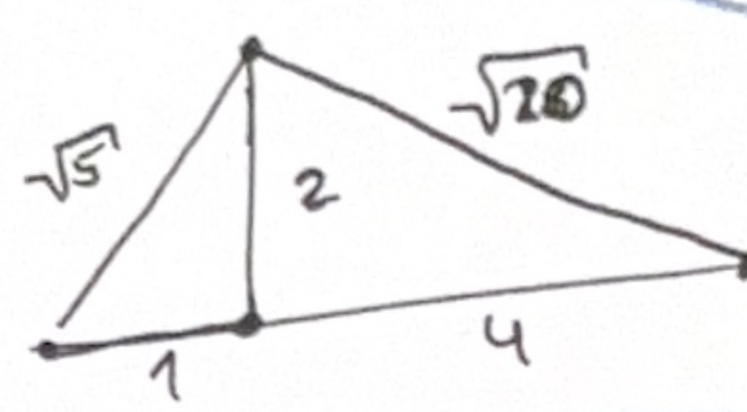
$$(x-a)(3x+a)=$$
$$=3x^2-3ax+ax-a^2=$$
$$=3x^2-2ax-a^2$$

$$\begin{array}{r}\times\ 81\\ 25\\ \hline 405\\ 162\\ \hline 2025\end{array}$$

$$D=4a^2+4\cdot 3a^2=16a^2=(4a)^2$$

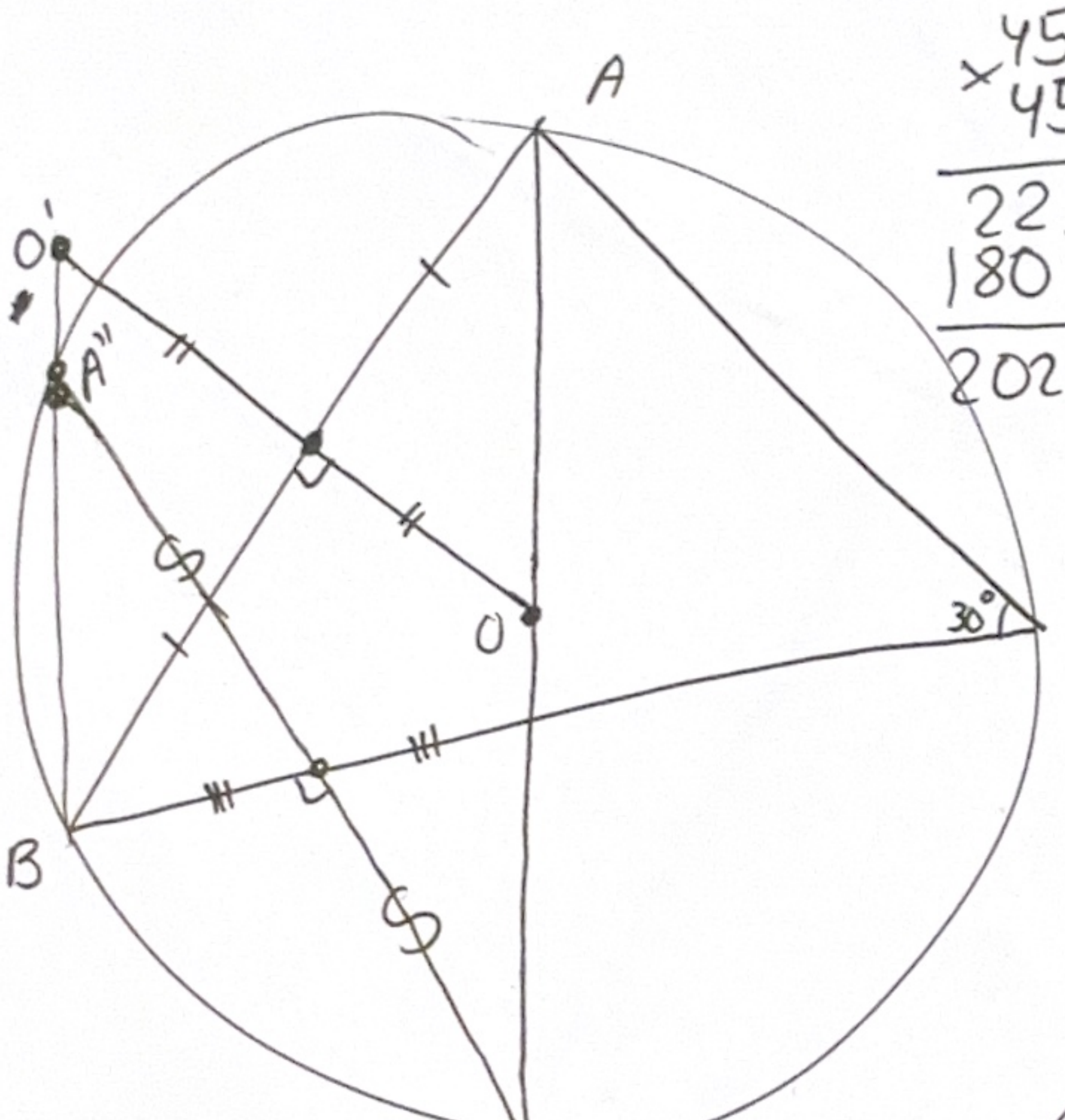
$$x=\frac{2a\pm 4a}{6}$$

$$\left[\begin{array}{l}x=a\\ x=-\frac{1}{3}a\end{array}\right.$$



$5+20=25$

$$\begin{array}{r}\times\ 45\\ 45\\ \hline 225\\ 180\\ \hline 2025\end{array}$$



$2\alpha+2\beta+30^\circ=180^\circ$

$\alpha+\beta=\frac{150^\circ}{2}=75^\circ$

$\alpha+2\beta=90^\circ$

$\beta=15^\circ$