0967407 360000

0674-07-36
(29.12)

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**
**имени М.В.ЛОМОНОСОВА**

Вариант 11 класс, вариант 8

GMT: +4
Выход: 14:34–14:40 Завьс

Место проведения г. Ульяновск
город

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Волкова Вадима Михайловича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«29» марта 2026 года

Подпись участника

ВВо

85 (Восемьдесят пять фитов)



06-74-07-36 (22,12)

Задача 1 Чистовик

$\sqrt{3(1-tg^2x)} = 2\sqrt{2}\sin x$

$\begin{cases} 3(1-tg^2x) = 8\sin^2 x \\ \sin x \geq 0, \ \cos^2 x \neq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 3(\cos^2 x - \sin^2 x) = 8\sin^2 x \cdot \cos^2 x \\ \sin x \geq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 3\cos 2x = 2 \cdot \sin^2 2x \\ \sin x \geq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 3\cos 2x = 2(1-\cos^2 2x) \\ \sin x \geq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 3\cos 2x = 2 - 2\cos^2 2x \\ \sin x \geq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 2\cos^2 2x + 3\cos 2x - 2 = 0 \\ \sin x \geq 0 \end{cases}$

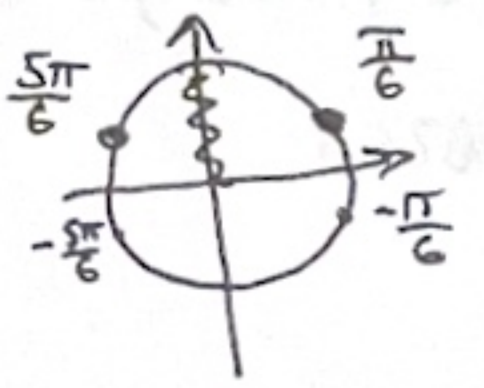
$\begin{cases} 2(\cos 2x + 2)(\cos 2x - \frac{1}{2}) = 0 \\ \sin x \geq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} \left[ \begin{array}{l} \cos 2x = -2 \ \varnothing \\ \cos 2x = \frac{1}{2} \end{array} \right. \\ \sin x \geq 0 \end{cases}$

$\Updownarrow$

$\begin{cases} \cos 2x = \frac{1}{2} \\ \sin x \geq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z \\ \sin x \geq 0 \end{cases}$




$\begin{cases} x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z \\ \sin x \geq 0 \end{cases}$

$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z; \ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$

Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$, $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$

Чистовик

Задача 2.

Пусть $S(n)$ − функция, считающая сумму цифр числа $n$.

Тогда $\frac{n}{S(n)} \vdots 9 \Rightarrow n \vdots (9\cdot S(n))$ ← только в этом случае.

$n \vdots (9\cdot S(n)) \Rightarrow n \vdots 9 \Rightarrow 9\cdot S(n) \vdots 81 \Rightarrow$

$n \vdots 9\cdot S(n) \Rightarrow n \vdots 81$.

Возможные $n$:

$81\cdot 2 = 162 \Rightarrow S(n) = 9 \Rightarrow \frac{n}{S(n)} = 18$ ш 162

$81\cdot 3 = 243 \Rightarrow S(n) = 9 \Rightarrow \frac{n}{S(n)} = 27$ ш 243

$81\cdot 4 = 324 \Rightarrow S(n) = 9 \Rightarrow \frac{n}{S(n)} = 36$ ш 324

$81\cdot 5 = 405 \Rightarrow S(n) = 9 \Rightarrow \frac{n}{S(n)} = 45$ ш 405

$81\cdot 6 = 486 \Rightarrow S(n) = 18 \Rightarrow \frac{n}{S(n)} = 27$ ш 486

$81\cdot 7 = 567 \Rightarrow S(n) = 18 \Rightarrow \frac{n}{S(n)} \notin \mathbb{Z}$, т.к $n \not\vdots 2$, а $S(n) \vdots 2$

$81\cdot 8 = 648 \Rightarrow S(n) = 18 \Rightarrow \frac{n}{S(n)} = 36$ ш 648

$81\cdot 9 = 729 \Rightarrow S(n) = 18 \Rightarrow \frac{n}{S(n)} \notin \mathbb{Z}$, т.к $n \not\vdots 2$, а $S(n) \vdots 2$

$81\cdot 10 = 810 \Rightarrow S(n) = 9 \Rightarrow \frac{n}{S(n)} = 90$ ш 810

$81\cdot 11 = 891 \Rightarrow S(n) = 18 \Rightarrow \frac{n}{S(n)} \notin \mathbb{Z}$, т.к $n \not\vdots 2$, а $S(n) \vdots 2$

$81\cdot 12 = 972 \Rightarrow S(n) = 18 \Rightarrow \frac{n}{S(n)} = 54$ ш 972

$81\cdot 13 > 1000$

Нужные числа в порядке возрастания:

162; 243; 324; 405; 486; 648; 810; 972.

$324 + 486 + 810 = 1620$

Ответ: 1620.

Задача 3

Если прямоуг △ имеет 2 катета ∥ осям координат, то плоскость, в которой он находится параллельна плоскости, образованной 2мя осями. посчитаем все, которые лежат в плоскости $z = c$ ($c \in \mathbb{Z}$, $|c| \le 6$), для остальных аналогично ⇒ нужную величину умножим на 3.

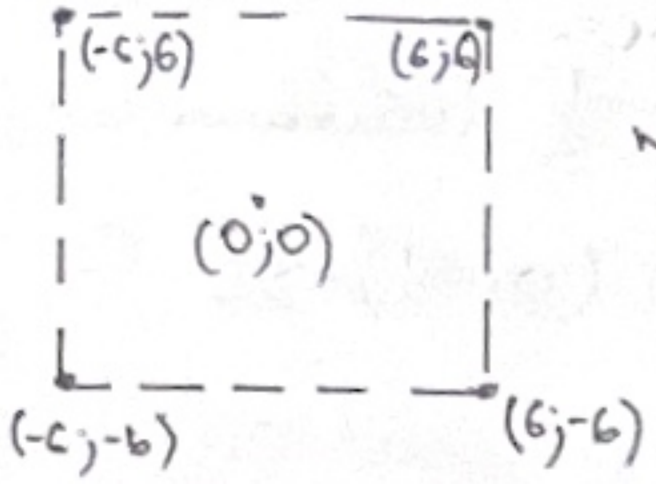
Для каждой плоскости $z = c$ посчитаем кол-во нужных треуг и потом умножим на 13.





(всего $|c| \le 6$, $c \in \mathbb{Z}$ − 13 шт.)

Чистовик




Для каждой целой точки такой плоскости (всего их $13\cdot 13 = 169$) существует 12 точек по горизонтали и 12 по вертикали (причем любой нужный треугольник порождается так ровно 1 раз). Значит всего нужных треуг:

$169\cdot 12\cdot 12\cdot 13\cdot 3 = 949104$

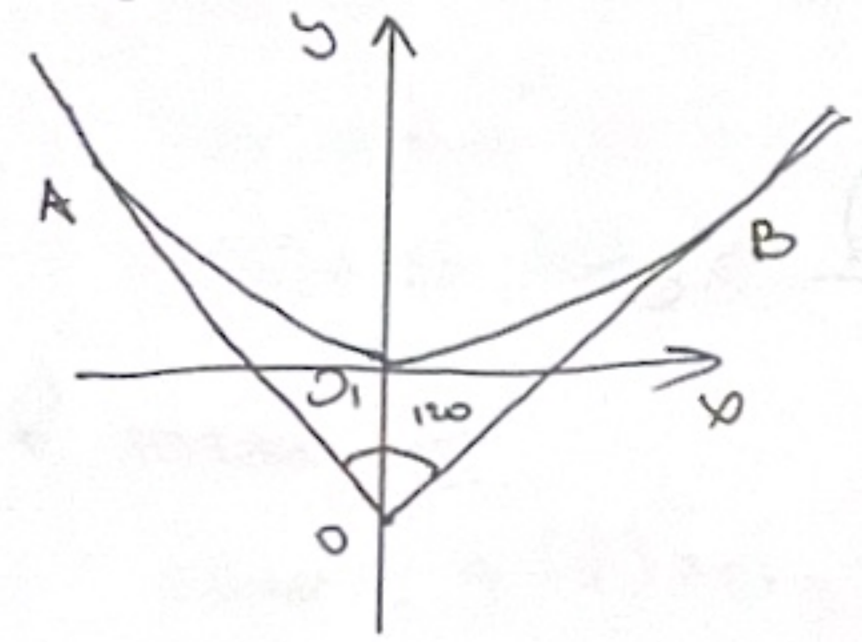
Ответ: 949104

Задача 5

Пусть у треугольника вершины ~~ABC~~ A; B; C, центр O, тогда $\angle AOB = 120°$, посмотрим параболу $y = Cx^2$ и найдем точку, из которой она видна под углом равным $120°$. Пусть $O_1$ − начало координат ⇒

$\Rightarrow \angle O_1OB = 60 \Rightarrow$ ур-ние прямой OB имеет вид:

$y = \operatorname{tg} 30°\cdot x + a$, где O имеет координаты $(0; a)$, т.к угол $\angle O_1OB = 60 \Rightarrow$ угол наклона $30° \Rightarrow$ коэф при $x$ — $\to \operatorname{tg} 30°$




$Cx^2 = x\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} + a$ имеет 1 решение, т.к касание

$Cx^2 - x\frac{1}{\sqrt{3}} - a = 0 \Rightarrow D = 0$, т.к 1 решение.

$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 4aC = 0 \Rightarrow 4aC = -\frac{1}{3} \Rightarrow a = -\frac{1}{12C}$.

точка B имеет $x$ координату $\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{2C} \Rightarrow$ т.к это единственное решение $Cx^2 - \frac{x}{\sqrt{3}} - a \Rightarrow B\left(\frac{1}{\sqrt{3}2C}; C\cdot\frac{1}{12C^2}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow B\left(\frac{1}{2\sqrt{3}\cdot c}; \frac{1}{12c}\right)$. $\Rightarrow 1 = OB^2 = \left(\frac{1}{2\sqrt{3}c} - 0\right)^2 + \left(\frac{1}{12c} - \left(-\frac{1}{12c}\right)\right)^2 =$

$= \frac{1}{12c^2} + \frac{1}{36c^2} \Rightarrow 1 = \frac{4}{36c^2} = \frac{1}{9c^2} \Rightarrow C = \frac{1}{3}$ (считаем $c > 0$, остальное ан-но) $\Rightarrow$ координаты $O\left(0; -\frac{1}{4}\right) \Rightarrow$

$OO_1 = \frac{1}{4} = 0{,}25$ – нужный нам радиус.


Чистовик

**Ответ: 0,25**

Задача 8.

$3x^2 \cdot \log_a x - \log_x a - 2x \geq 0$

Ограничения: $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, $x \neq 0$

$3x^2 \cdot \log_a x - \frac{1}{\log_a x} - 2x \geq 0$

$\frac{3x^2 \cdot \log_a^2 x - 2x \cdot \log_a x - 1}{\log_a x} \geq 0$

$\frac{(3x \cdot \log_a x + 1)(x \cdot \log_a x - 1)}{\log_a x} \geq 0$

$\Downarrow$

$\left[\begin{array}{l} x \cdot \log_a x - 1 \geq 0 \\ \cancel{0 < \log_a x \leq} \\ 0 > \log_a x \geq -\frac{1}{3x} \end{array}\right.$ (метод интервалов)

1. $a > 1$: тогда $x \cdot \log_a x - 1 \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = x \cdot \log_a x - 1 \Rightarrow f'(x) = \log_a x + x \cdot \frac{1}{x \cdot \ln(a)} =$

$= \frac{\ln(x) + 1}{\ln(a)} \Rightarrow$ minimum в точке $\frac{1}{e}$ {при $x > \frac{1}{e}$



ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

~~$\log_a(x)$~~ $> 0$, $\ln(x) + 1 > 0$, иначе ~~$x \Rightarrow 1$~~, т.к меньше 0, но $x > 1$, т.к $\log_a x > 1$, т.к $a > 1$ } $\Rightarrow f(x) \nearrow \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) \geq 0$ – задает полуинтервал $[t_1; \infty)$.

$\begin{cases} 0 > \log_a x \\ 3x \cdot \log_a x + 1 \geq 0 \end{cases}$ (только когда $x < 1$) должно задавать $\rightarrow$

Чистовик

$\rightarrow$ 1 точку.

$g(x) = 3x \cdot \log_a x + 1$. $g'(x) = 3 \cdot \log_a x + \frac{3x}{x \cdot \ln(a)} =$

$\frac{3(\ln x + 1)}{\ln(a)} \Rightarrow$ ~~$g(x) \geq 0$~~ $g(x) \geq 0$

Тоже задает полуинтервал $[t_2; \infty)$, но его пересечение с $x \leq 1$ не может быть одной точкой $\Rightarrow a > 1$ не подходит.

2. $a < 1 \Rightarrow 0 > \log_a x$, когда $x > 1$

$3x \cdot \log_a x + 1 \geq 0$

$g(x) = 3x \cdot \log_a x + 1 \Rightarrow g'(x) = \frac{3(\ln x + 1)}{\ln a}$ – максимум в точке $\frac{1}{e}$.

Если $g\left(\frac{1}{e}\right) > 0$, то задает отрезок, пересечение с $x > 1$ не даст 1 точку.

Значит единственная точка будет возможна в случае $g\left(\frac{1}{e}\right) = 0$:

$\frac{3}{e} \cdot \frac{\ln\left(\frac{1}{e}\right)}{\ln(a)} + 1 = 0 \Rightarrow 1 = \frac{3}{e} \cdot \frac{1}{\ln(a)} \Rightarrow \ln(a) = \frac{3}{e} \Rightarrow$

$\Rightarrow a = e^{\frac{3}{e}}$, в таком случае $x = \frac{1}{e} < 1$ – не имеет решений, значит отдельная точка.

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

она будет в случае, когда $x \cdot \log_a x + 1 \geq 0$

$f'(x) = \frac{\ln(x)+1}{\ln(a)} \Rightarrow x = \frac{1}{e}$ – max функции

если $f(\frac{1}{e}) < 0$ – нет решений $\Rightarrow f(\frac{1}{e}) > 0 \Rightarrow$

решение задачи отрезок с отдельной точкой не будет $\Rightarrow f(\frac{1}{e}) = 0 \Rightarrow 1 \cdot e \cdot \frac{\ln(\frac{1}{e})}{\ln(a)} = 0 \Rightarrow$

$\ln(a) = -\frac{1}{e} \Rightarrow a = e^{-\frac{1}{e}}$. такое $a$ подходит.

Во втором случае единственное реш $x = \frac{1}{e}$.

Впервом уравнении $3x \cdot \log_a x > 0 \Rightarrow$

$3x \cdot \frac{\ln(x)}{\ln(e^{-\frac{1}{e}})} + 1 \geq 0 \Rightarrow 3x \cdot (-e \cdot \log(x)) \geq 0$

$1 \geq 3e \cdot \ln x \Leftrightarrow$

~~f(x) = ln(x)+3e~~ $a(x) = \ln(x) + 3e$.

$f(x)$

Чистовик

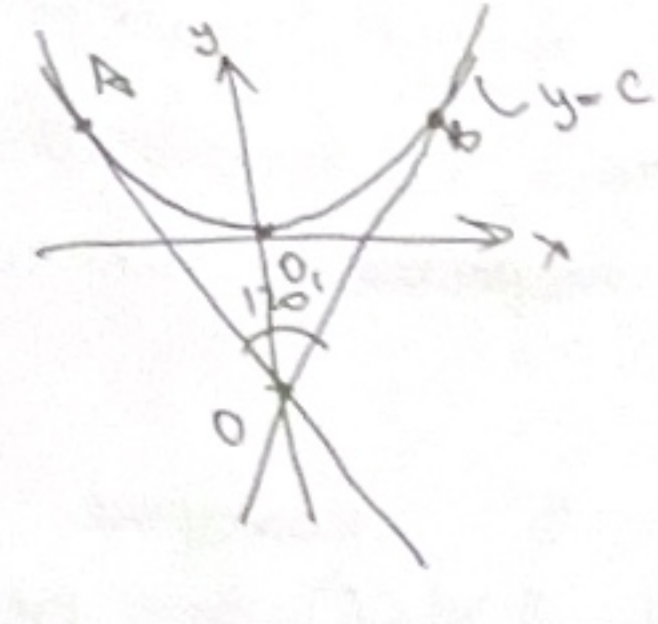


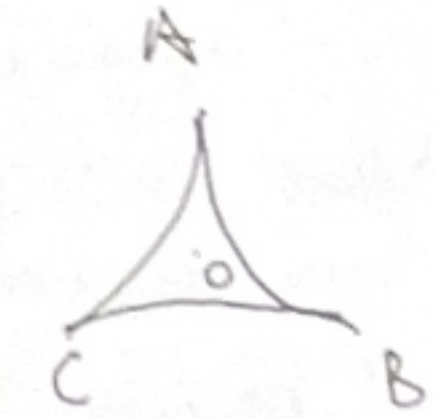
ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Черновик



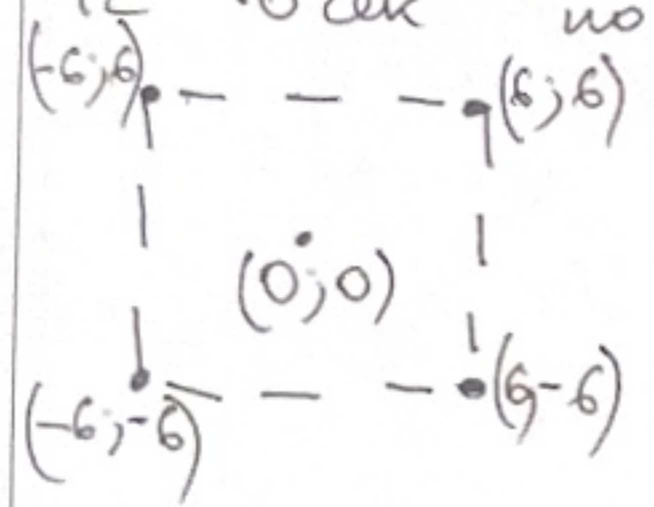




Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Черновик

Если прямоуг треуг имеет 2 катета, || осям координат, то плоскость, в которой он находится ~~[illegible]~~ ⊥ плоскости, образованной 2мя осями.

Посчитаем все S которые лежат в плоскости $(s = Z; |S| \le 6)$, для остальных ан-но. => Нужную величину умножим на 3.
в плоскости Z = C посчитаем кол-во нужных треуг и умножим на 13 (всего $c = 6$, $c \in Z$ – 13 штук. Для каждой целой точки в такой плоскости (всего их $13 \cdot 13 = 169$) существует 12 точек по горизонтали и 12 по верт.



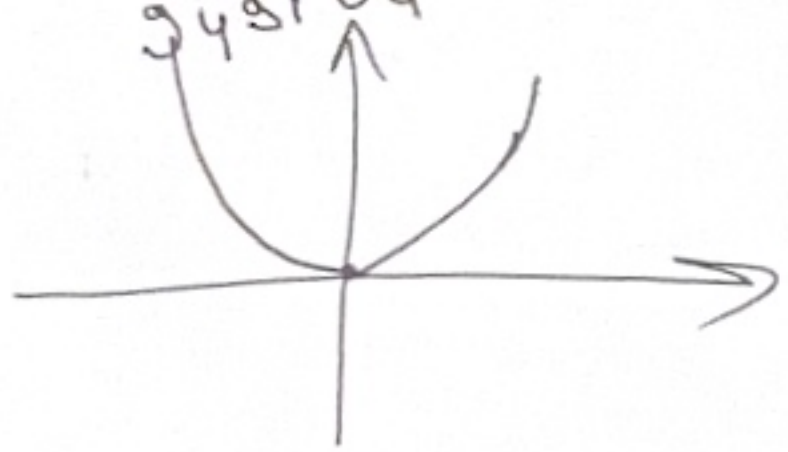

Очевидно, что любой нужный треугольник порождается так ровно 1 раз, значит, что всего нужных треуг $169 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 3 =$
$= 949104$

$169 \times 144$

$13 \cdot 3 = 39$

$144 \times 39$: 1296, 432, 5616

$5616 \times 169$: 50544, 33696, 5616, 949104







Черновик

Пусть S(n) - сума цифр числа n

$\frac{n}{S(n)} \vdots 9$, тогда и только тогда, когда

$n \vdots (9 \cdot S(n)) \Rightarrow n \vdots 9 \Rightarrow 9 \cdot S(n) \vdots 81 \Rightarrow n \vdots 9 \cdot S(n) \Rightarrow$
$\Rightarrow n \vdots 81$

Возможные n:

$81 \cdot 2 = 162$; $S(n) = 9 \Rightarrow \frac{n}{S(n)} = 18$ (+) 162

$81 \cdot 3 = 243$; $S(n) = 9 \Rightarrow \frac{n}{S(n)} = 27$ (+) 243

$81 \cdot 4 = 324$; $S(n) = 9 \Rightarrow \frac{n}{S(n)} = 36$ (+) 324

$81 \cdot 5 = 405$; $S(n) = 9$ $\frac{n}{S(n)} = 45$ (+) 405

$81 \cdot 6 = 486$; $S(n) = 18$ $\frac{n}{S(n)} = 27$ (+) 486

$81 \cdot 7 = 56$; $S(n) = 18$ $\frac{n}{S(n)} \notin Z$ $(n \not\vdots 2, S(n) \vdots 2)$

$81 \cdot 8 = 648$; $S(n) = 18$ $\frac{n}{S(n)} = 36$ (+) 648

$81 \cdot 9 = 729$; $S(n) = 18$ $\frac{n}{S(n)} \notin Z$ $(n \not\vdots 2; S(n) \vdots 2)$

$81 \cdot 10 = 810$; $S(n) = 9$ $\Rightarrow \frac{n}{S(n)} = 90$ (+) 810

$81 \cdot 11 = 891$ $S(n) = 18$ $\Rightarrow \frac{n}{S(n)} \notin Z$ $(n \not\vdots 2; S(n) \vdots 2)$

$81 \cdot 12 = 972$ $S(n) = 18 \Rightarrow \frac{n}{S(n)} = 54$ (+) 972

$81 \cdot 13 > 100$

Нужные числа:

162; 243; 324; 405; 486; 648; 810; 972

$324 + 486 + 810 = \underline{1620}$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

$\sqrt{3-3tg^2x} = 2\sqrt{2}\cdot \sin x$ $\quad 1 > \sin x \geq 0$ Черновик

$3-3tg^2x = 8\sin^2 x$

$3tg^2x + 8\sin^2 x - 3 = 0$

$3\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 8\sin^2 x - 3 = 0$

$3\sin^2 x + 8\sin^2 x\cdot\cos^2 x - 3\cos^2 x = 0$

$3(\sin^2 x - \cos^2 x) + 4\cdot 2\sin^2 x\cos^2 x = 0$

$3\cdot(-\cos 2x) + 2\sin^2 2x = 0$

$\cancel{\frac{2\sin 2x}{\cos 2x}\cdot\cos^2}$ $\quad 2t^2 + 3t - 2 = 0$

$t_1 = \frac{1}{2} \quad t_2 = -2$

$\frac{2\sin 2x}{\cos 2x} = 3 \quad -2 \quad \frac{1}{2}$

$2t^2+3t-2=0$

$\cancel{2tg 2x = 3}$ $\quad -1$

$\cancel{tg 2x = \frac{3}{2}}$

$\cancel{2x = \pm\, arctg\left(\frac{3}{2}\right) + 2k\pi}$

$\cancel{x = \pm\frac{1}{2}\cdot arctg\left(\frac{3}{2}\right) + \pi k}$

$\begin{cases} 3(1-tg^2x) = 8\sin^2 x \quad |\cdot\cos^2 x \\ 2\sqrt{2}\sin x \geq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 3(\cos^2 x - \sin^2 x) = 8\sin^2 x\cdot\cos^2 x \\ \sin x \geq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 3\cos 2x = 2\sin^2 2x \\ \sin x \geq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 3\cos 2x = 2(1-\cos^2 2x) \\ \sin x \geq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 2\cos^2 2x + 3\cos 2x - 2 = 0 \\ \sin x \geq 0 \end{cases}$

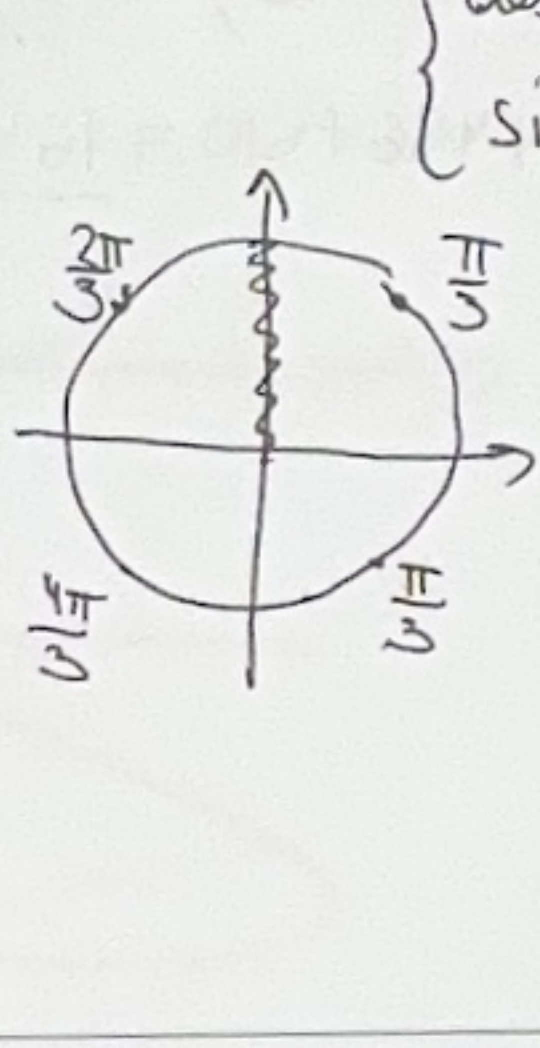
$\begin{cases} (\cos 2x - 2)(2\cos 2x + 1) = 0 \\ \sin x \geq 0 \end{cases}$

$\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 2 \quad \varnothing \\ \cos 2x = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \\ \sin x \geq 0 \end{array}\right.$

$\Downarrow$

$\begin{cases} \cos 2x = -\frac{1}{2} \\ \sin x \geq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 2x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k\in Z \\ \sin x \geq 0 \end{cases}$




$\begin{cases} x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k,\ k\in Z \\ \sin x \geq 0 \end{cases}$

$x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k\in Z$

$x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k\in Z$