+ 1 лист Ломоносов

0 255369 390006
25-53-69-39
(122,8)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 9 класс — дистр

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по Математике
профиль олимпиады

Волчкова Олега Сергеевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«28» марта 2026 года

Подпись участника

ОВ

25-53-69-39
(122.8)

Черновик.

№1.



10

№2.

$\frac{n^2}{abcd}$ $10^4 > n > 10^3$

$\overline{abcd.....}$ $10^8 > n^2 > 10^6$

n^2 8 или 7 цифр.

n^2 7 цифр.

$n \cdot 10^3$ _ _ _ _ _ _ _ _ _

$10^3 n + ta = n^2$

$t = n(n-10^3)$. , $t < 1000$.

$n = 1000$ или $t > 1000$, против.

n^2 8 цифр.

$10^4 \cdot n + t = n^2$ t - отр.

$t < 10000$.

$t = n(n-10^4)$.

№3.

(a, b)

$a \in [1;10]$ и $b \in [1;10]$.

$\cdot(a, b+k)$ $\cdot(a+t, b+k)$.

$\cdot(a, b)$. $\cdot(a+t, b)$.



a - 10вар. } $\Rightarrow$ 100 точек. $\frac{100 \cdot 99}{2} \cdot 2 =$
b - 10вар }

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Черновик.

100.

18 18.

$\frac{100 \cdot 81.}{2 \cdot 2} \cdot 2 = 50 \cdot 81.$

$50 \cdot 81.$

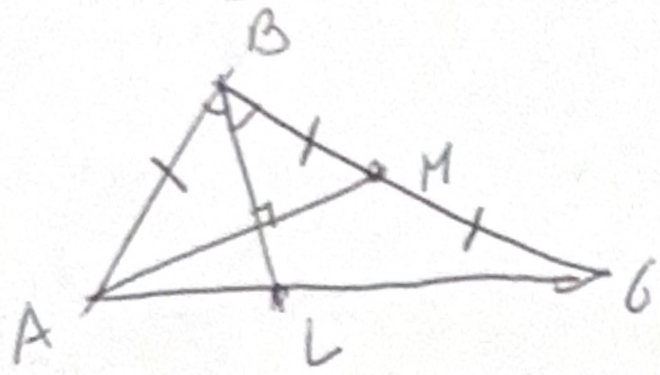
$\times \frac{81}{50}$

$+ \frac{00}{405}$

$405 0.$



№4.



$AB = 7$

$BC = 14.$

$AC = 8$

$AC = 9$

$AC = 10$

$\ldots$

$AC = 20.$

$AC = 8$

$AC = 9$

$AC = 10$

$\ldots$

$AC = 13$

$AC = 15$

$\ldots$

$AC = 20.$

№6.

$\frac{1}{a} + \frac{2x}{a^2} - \frac{3x^2}{a^3} \leq 0.$

$x \in [6; 2026 + 6].$

$a^3 + 2xa^2 - 3x^2a.$

$a(-3x^2 + 2ax + a) \leq 0.$

$a(3x^2 \neq 2ax - a) \geqslant 0.$

$3x^2 - 2ax - a \geqslant 0.$

$x_1 D = 4a^2 + 12a.$

опр:
$a \neq 0$

$3x^2 - 2ax - a \leqslant 0.$

$D = 4a^2 + 12a.$

$x_1 x_2 = -\frac{a}{3}$

$x_1 + x_2 = \frac{2a}{3}.$

a - опр.

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

25-53-69-39
(122.8)

Черновик.

$\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=|x_1-x_2|$.

$\sqrt{\frac{4a^2}{9}+\frac{4a}{3}}=2026$.

$\frac{4a^2}{9}+\frac{4a}{3}=2026^2$.

$4a^2+12a=(2026\cdot 3)^2$.

$a^2+3a=(1013\cdot 3)^2$.

$(a-3)(a)=(1013\cdot 3)^2$.

~~D=7 3²=7~~

$1013\cdot 1013\cdot 3\cdot 3$.

$D=9+4\cdot 1013^2\cdot 9$.

$a=\frac{-3-\sqrt{9+4\cdot 1013^2\cdot 9}}{2}$.

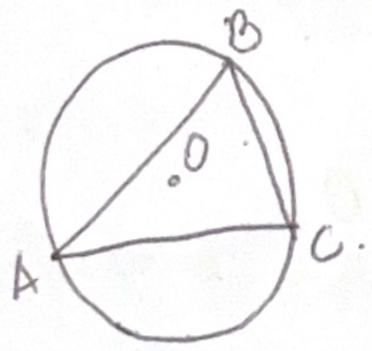
1013 | 7
7 | 144
13
7
6

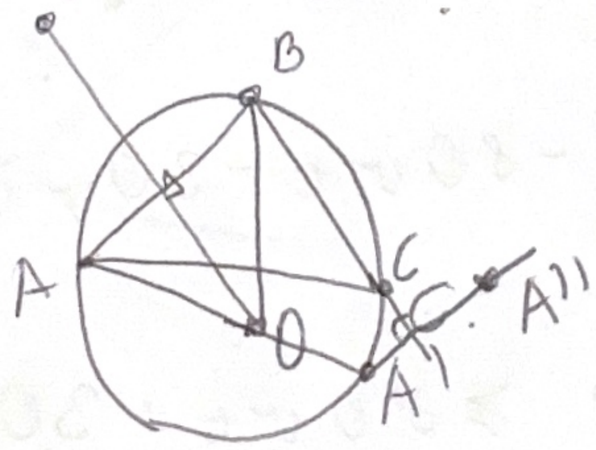
1700-1013=687.

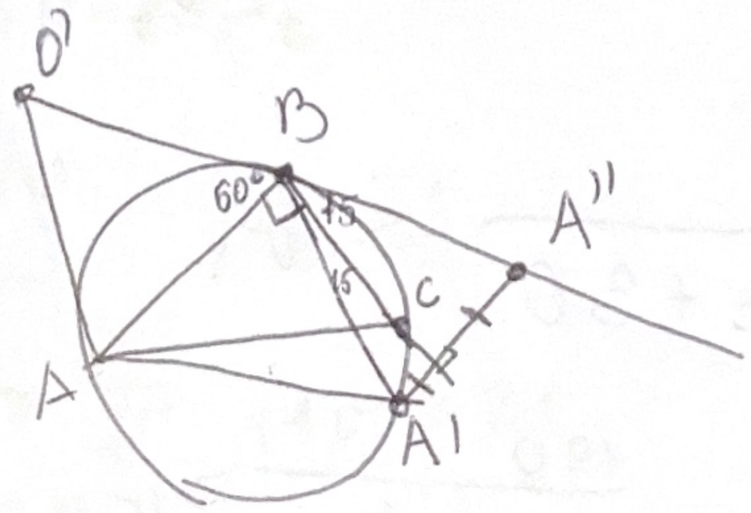
1013 | 17.
85 | 59.
163
153
10

1013 | 19
95 | 5.
63
57

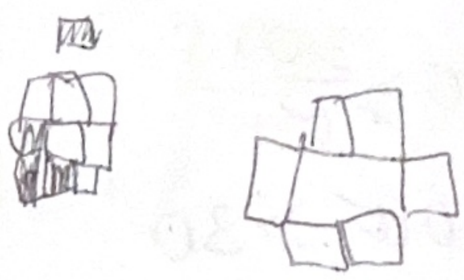
№7



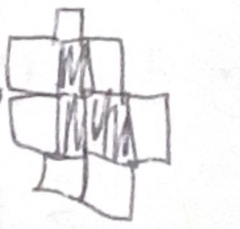


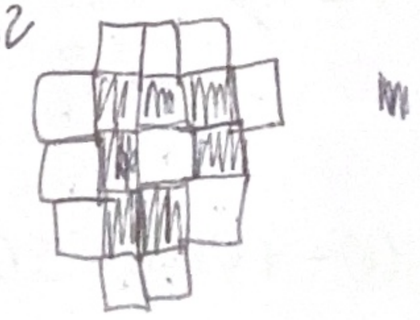


№8.



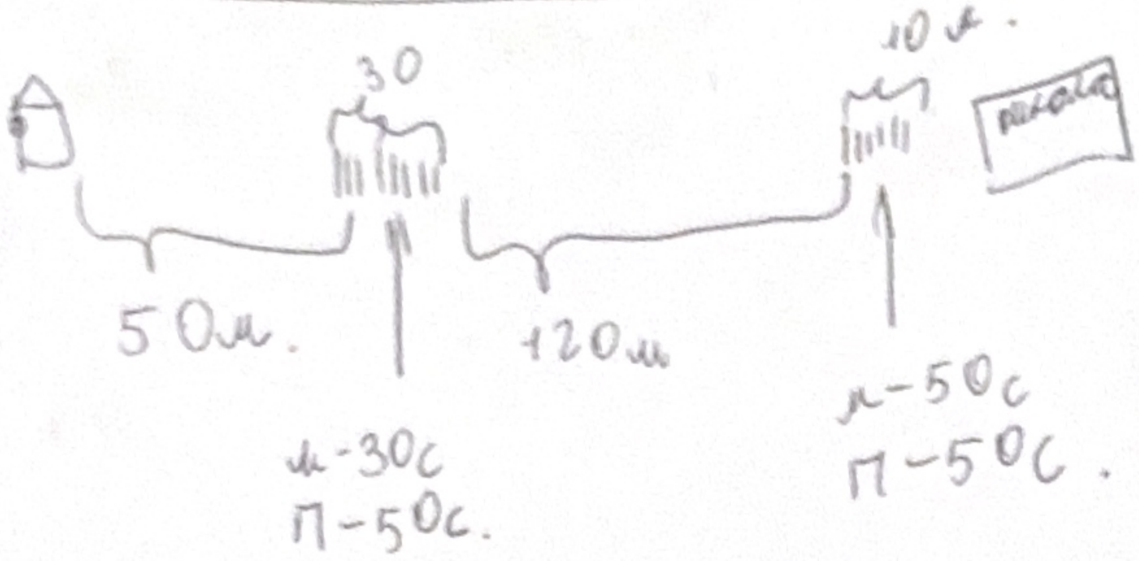
$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{11}\cdot\frac{1}{12}$





Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

№5. Черновик.



1: м п м п ....

2: 10с м п м п ....

v

$\frac{50}{v} = 80t + K.$

$\frac{50}{v} = 80t + 30 + K.$

$K > 30$

$\frac{120}{v} = 10 +$

$k - 30 > 0.$

$k - 30 > \frac{30}{v}.$

$\frac{50}{v} = 80t + k.$

$k - 30 \geq \frac{30}{v}.$

$\frac{200}{v} = 10 + 100l + c.$

$c < 100$

$K < 80.$

$c - 50 \geq \frac{10}{v}.$

$t = 0.$

$\frac{50}{v} - 80t - 30 \geq \frac{30}{v}.$

$\frac{50}{v} - 30 \geq \frac{30}{v}.$

$50 - 80vt - 30v \geq 30$

$50 - 30v \geq 30.$

$20 \geq 30v.$

$20 \geq 80vt + 30v.$

$\frac{2}{3}$ м/с $\geq v.$

$\frac{20}{80t + 30} \geq v.$

$\frac{200}{v} - 10 - 100l - 50 \geq \frac{10}{v}.$

$\frac{190}{10 + 100l + 50} \geq v$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

25-53-69-39
(122-8)

$\frac{20}{80t+30} \geq v$

$\frac{180}{10+100l+50} \geq v$

50 для $\frac{200}{v}$.

75 45.

$\frac{50}{v} = 80t + k.$

$50 - (k-30) \geq \frac{30}{v}.$

$80 - k \geq \frac{30}{v}.$

$80 - \frac{50}{v} - 80t \geq \frac{30}{v}$

$80v - 50 - 80vt \geq 30.$

$v - vt \geq 1.$

$v(1-t) \geq 1.$

$v \geq \frac{1}{1-t}.$

$80 > K.$

$80 > \frac{50}{v} - 80t$

$80v > 50 - 80vt.$

$v > \frac{50}{}$

$50 - S. \geq \frac{10}{v}.$

$110 \geq \frac{210}{v}.$

$100 > \frac{200}{v} - 10 - 100l.$ Срочно.

$\frac{50}{v} = 30. \Rightarrow v = \frac{5}{3}.$

$\frac{200}{v} = 60. \Rightarrow v = \frac{10}{3}.$

$\frac{200}{v} = 120.$

10+50+50+

$\frac{200}{v} = 60 + S.$

$S = \frac{200}{v} - 60.$

$\frac{50}{v}.$

$, > \frac{50}{v} \geq 30$

$\frac{50}{v} = 30 + l.$

$l < 50.$ $\frac{21}{11}$ $\frac{5}{3}.$

$50 - l \geq \frac{30}{v}.$

$\frac{206}{v} = 160 + S.$

$\frac{50}{v} - 30 = l.$

$50 + 30 - \frac{50}{v} \geq \frac{30}{v}.$

$80 \geq \frac{80}{v}.$

$1 \geq \frac{1}{v}. \quad v \geq 1.$

$11 \geq \frac{21}{v}.$

$110 \geq 21.$

$v \geq \frac{21}{11}.$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

$S = \frac{200}{v} - 160$. (Черновик).

$50 - S \geq \frac{10}{v}$.

$210 - \frac{200}{v} \geq \frac{210}{v}$.

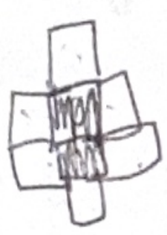
$v \geq 1$.

$\frac{200}{v} \geq 160$.

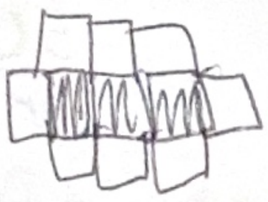
$\frac{200}{160} \geq v$.

$\frac{20}{16}$ $\frac{5}{4}$.

N8.



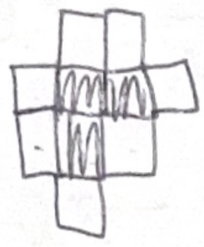
$\frac{2}{6}$.







$\frac{4}{8}$.



$\frac{2}{8}$.



$\frac{2}{9}$.



15g.

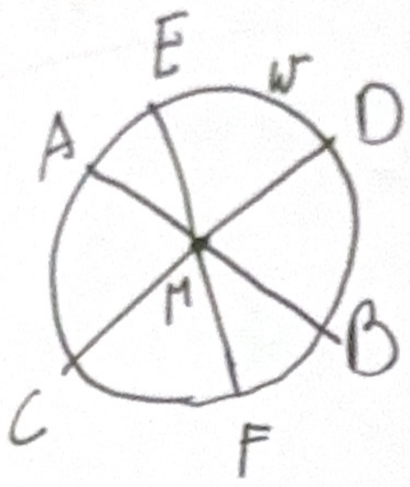
56g.

$28 + 132 = 160$
$130 + 120 = 250$
} 410

56g

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Чистовик



№1.

Дано: M - ср CD

M - ср AB

отрезок EF содержит т. M.

CAEDBF - вписан.

$r = 5$

Найти: min EF - ?

Решение:

1) ADBC - парал (т.к. диагонали пересекаются в сред.)

ADBC - вписан

⇓

ADBC - прямоугольник.

⇓

M - центр окр. w

⇓

$EF = 2r = 10$ (как диаметр.)

Ответ: min EF = 10.

№2.

n - четырехзначное $\Rightarrow 10^4 > n \geq 10^3$

$10^8 > n^2 \geq 10^6$

⇓

n^2 7-ми значное

или

n^2 8-ми значное.

(I) n^2 7-ми значное

⇓

$n^2 = \overline{x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7}$, $\overline{x_1 x_2 x_3 x_4} = n$.

⇓

$n^2 = n \cdot 10^3 + \overline{x_5 x_6 x_7}$

$\overline{x_5 x_6 x_7} = n(n - 10^3)$, если $n \neq 10^3 \Rightarrow n(n-10^3) > 10^3$

⇓

$\overline{x_5 x_6 x_7} > 10^3$, против.

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Если $n=10^3 \Rightarrow \overline{x_5 x_6 x_7} = \overline{000}$

II n^2 8-ми значное

$n^2 = \overline{x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8}$, $n = \overline{x_1 x_2 x_3 x_4}$

$\Downarrow$

$n^2 = 10^4 n + \overline{x_5 x_6 x_7 x_8}$

$\overline{x_5 x_6 x_7 x_8} = n(n-10^4)$, но $n < 10^4$

$\Downarrow$

$\overline{x_5 x_6 x_7 x_8}$ - отр, противоречие

Ответ: 1000

№3

Найдем количество прямоугольников, чьи стороны параллельны осям, а вершины - точки с целыми координатами от 1 до 10 включительно

Такой прямоугольник однозначно задается по своей диагонали

Кол. во способов выбрать 1 точку = 100

Кол. во способов выбрать 2-ю точку, не лежащую с 1 на прямой, параллельной оси = 100 - 19 = 81

$\Downarrow$

Кол. во способов выбрать диагональ = $\frac{81 \cdot 100}{2}$, но в прямоугольнике две диагонали

$\Downarrow$.

Кол. во способов выбрать не-повторяющийся прямоугольник = кол. во прямоугольников = $\frac{81 \cdot 100}{4}$.

4

В одном прямоугольнике ~~два~~ прямоуг. треугольника

$\Downarrow$.

Кол. во прямоуг. треугольников = $\frac{81 \cdot 100}{4} \cdot \cancel{2} = \cancel{4050}$ $\quad \frac{4}{8100}$

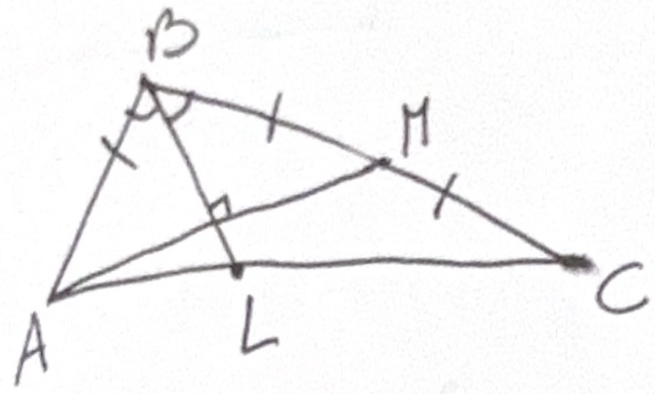
Ответ: 8100

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

№4

Чистовик

лист 3



Дано:

AM - мед

BL - бисс ; $AM \perp BL$

AB = 7

BC и AC - целые числа

Найти: P - ?

Решение:

1) $\angle ABL = \angle CBL$, m. к BL - бисс. $\Rightarrow \Delta ABM$ - р.б.

$AM \perp BL$

$\Downarrow$

$AB = BM = MC$

(m. к. AM - мед.)

$BC = BM + MC = 2BM = 2AB = 14$ (по условию)

2) $AB + AC > BC$

$7 + AC > 14 \Rightarrow \min AC = 8$.

$AB + AC > AC$

$21 > AC \Rightarrow \max AC = 20$.

ΔABC - не равнобедр $\Rightarrow AC \neq 14 = BC$

$AC \neq 7 = AB$.

3) $P = AB + AC + BC$

$\min P = 29$

$\max P = 41$, ~~$P \neq 38$~~ $P \neq 35$. (m. к $AC \neq 14$)

Ответ: 29; 30; 31; 32; 33; 34; 36; 37; 38; 39; 40; 41

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

№6 Чистовик

лист 4

$$\frac{1}{a}+\frac{2x}{a^2}-\frac{3x^2}{a^3}\leqslant 0$$

Огр: $a\neq 0$.

$$a^4\left(\frac{1}{a}+\frac{2x}{a^2}-\frac{3x^2}{a^3}\right)\leqslant 0 \quad (a^4\text{-полож}, a^4\neq 0)$$

$\Downarrow$

Если:

$$a^3+2a^2x-3x^2a\leqslant 0 \Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{2x}{a^2}-\frac{3x^2}{a^3}\leqslant 0.$$

$$a(a^2+2ax-3x^2)\leqslant 0$$

$$a(3x^2-2ax-a^2)\geqslant 0.$$

Если $a>0$

$\Downarrow$

$3x^2-2ax-a^2\geqslant 0$ Ветви $\uparrow$, множество решения бесконечно



Множество решений представляет два (или один) отрезка бесконечной длины, противоречие

$\Downarrow$

$a<0$.

$$3x^2-2ax-a^2\leqslant 0.$$

~~Корни~~ Ветви $\uparrow$; чтобы множество решений было, нужно наличие корней x_1 и x_2, причем, условием гарантировано, что $|x_1-x_2|=2026$

~~x_1+x_2~~ По теореме Виета:

$$x_1x_2=-\frac{a^2}{3} \qquad x_1+x_2=\frac{2a}{3}$$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Чистовик

лист 5

$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$

$2026^2 = \frac{4a^2}{9} + \frac{4a^2}{3} = \frac{16a^2}{9}$.

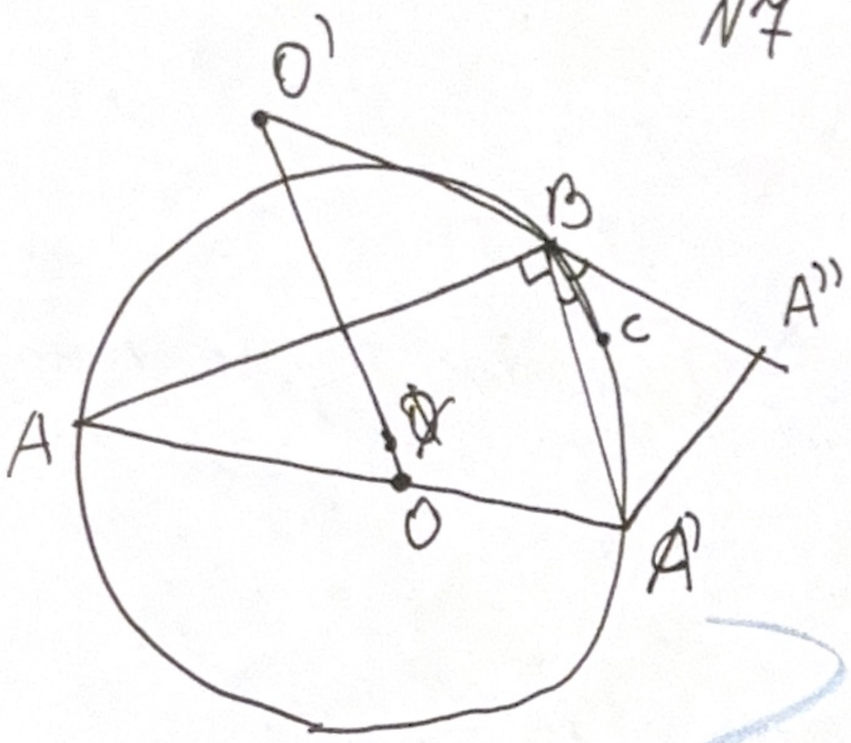
$a_{1;2} = \pm \frac{2026 \cdot 3}{4}$, пусть $a < 0$

$\Downarrow$

$a = -\frac{2026 \cdot 3}{4} = -\frac{1013 \cdot 3}{2} = -\frac{3039}{2}$ *

Ответ: $a = -\frac{3039}{2}$

№7



Дано:

$\angle ACB = 30°$.

O' симм O отн AB

O - центр (ABC).

AA' - диаметр (ABC)

A'' симм A' отн BC

т. O, т. B и т A'' лежат на одной пр.

Найти: $\angle ABC$ - ?

Решение:

1) $\angle AOB = 2\angle ACB \Rightarrow \angle AOB = 60°$
$OA = OB \Rightarrow \triangle AOB$ - р.б.
$\Rightarrow \triangle AOB$ - равност

$\Downarrow$

$\triangle AO'B$ - равност.

$\Downarrow$

$\angle O'BA = 60° \Rightarrow \angle ABA' = 120°$
(т.к. т A'', B и O' лежат на одной пр. по усл.)

2) $\angle ABA' = 90°$, т.к AA' - диаметр. $\Rightarrow \angle A'BA'' = 120° - 90° = 30°$

3) $\triangle A'BA''$ - р.б, BC - ср лин к $A'A'' \Rightarrow \angle A'BC = \angle A''BC = \frac{\angle A'BA''}{2} = 15°$

4) $\angle ABC = \angle ABA' + \angle A'BC = 90° + 15° = 105°$

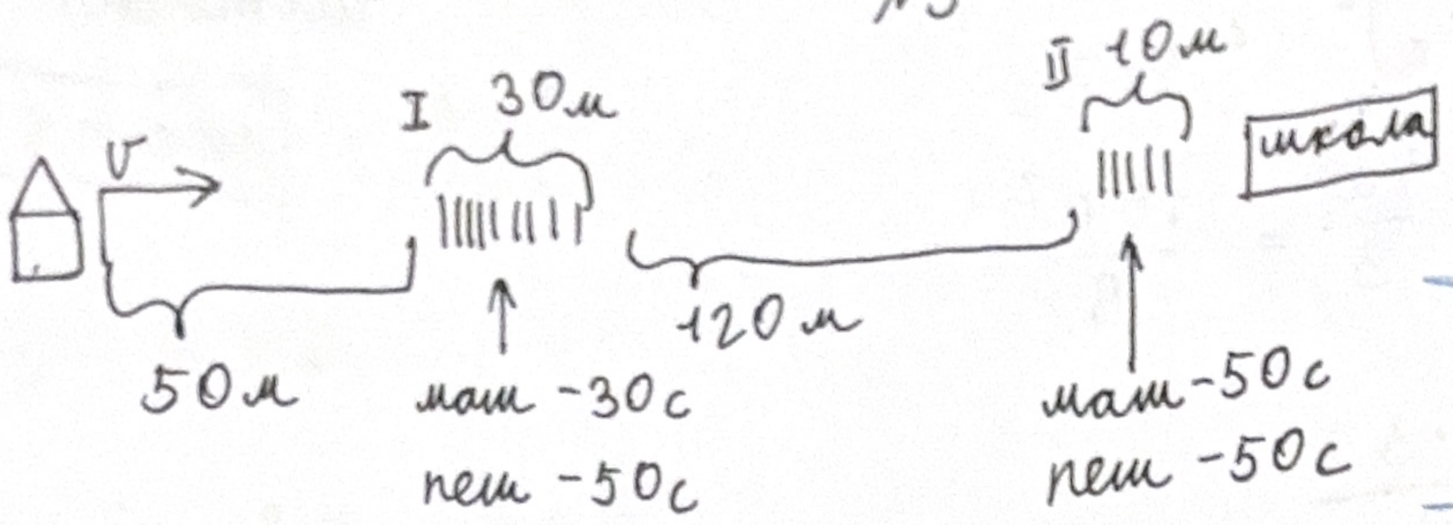
Ответ: 105°

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Чистовик

Лист 6

№5



I: м п м п...

II: 10 сек м п м п....

светофор красный - маш; светофор зеленый - пеш.

Предположим, Агриппина поедет по самому первому зеленому свету у II светофора

$$\Downarrow$$

$$\frac{50+30+120}{v} = 10+50+t.$$

$$t = \frac{200}{v} - 60, \text{ причем } t \geq \frac{10}{v} \text{ (чтобы Агриппина успела проехать)}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{200}{v} - 60 \geq \frac{10}{v} \qquad 110 - \frac{200}{v} \geq \frac{10}{v}$$

$$\frac{210}{v} \geq 60. \qquad 110 \geq \frac{210}{v}$$

$$v \geq \frac{21}{11}$$

Заметим, что $\frac{50}{v} > 30$ (чтобы Агриппина не выехала на красный)

$$\frac{11 \cdot 50}{21} \overset{?}{\geq} 30 \quad (\text{так } \frac{50}{v} \text{ при } \min v, \text{ то есть при } v = \frac{21}{11}).$$

$$11 \cdot 50 \overset{?}{\geq} 30 \cdot 21.$$

$$550 \overset{?}{\geq} 630, \text{ что неправда, противоречие}$$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

25-53-69-39
(122.8)

Чистовик

лист 7

Следовательно при наибольшей скорости Ариппина должна успеть не менее чем на второй зеленый свет у II светофора.

$$\frac{200}{v} \geqslant 10+50+50+50$$

$$\frac{200}{v} \geqslant 160$$

$$\frac{200}{160} \geqslant v \Rightarrow \frac{5}{4} \geqslant v$$

$$\max v = \frac{5}{4} \text{ м/с.}$$

При такой скорости:

50 м проедет за 40 сек, оставшиеся 40 сек, чтобы проехать пешеход, пешеход проедет за 24 сек,

120 м проедет за 96 сек

трассу до II светофора проедет за 160 сек,

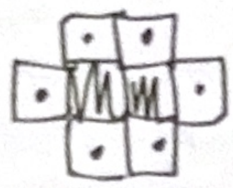
к этому времени у нее будет 50 сек чтобы переехать второй пешеходный переход, пешеход проедет за 8 сек

Ответ: $\max v = \frac{5}{4}$ м/с

Подписывать лист-вкладыш запрещено! Писать на полях листа-вкладыша запрещено!

№8 Чистовик

Первым и вторым ходом он как-то покрасит лист 8 и получит „доминошку"



6 вариантов, куда робот дальше сходит и любой из вариантов нам подходит

Ситуация после 3 хода:  или 

□ - клетка, которую робот теоретически может закрасить

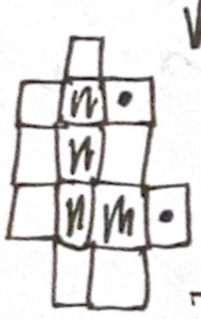
⊡ - клетка, которую робот может закрасить, не нарушив вид итогово рисунка

▣ - закрашенная клетка

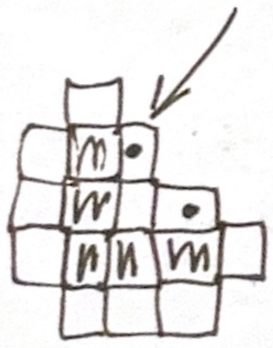
Все фигуры, отличающиеся лишь поворотом, мы будем считать идентичными



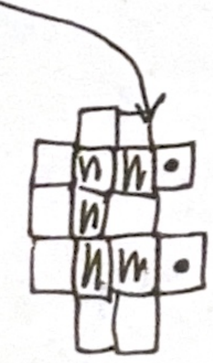
Шанс $\frac{4}{8}$



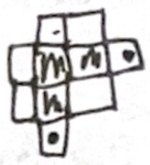
Шанс $\frac{2}{5}$



Шанс $\frac{2}{11}$



Шанс $\frac{2}{10}$



Шанс $\frac{2}{7}$



Шанс $\frac{2}{9}$

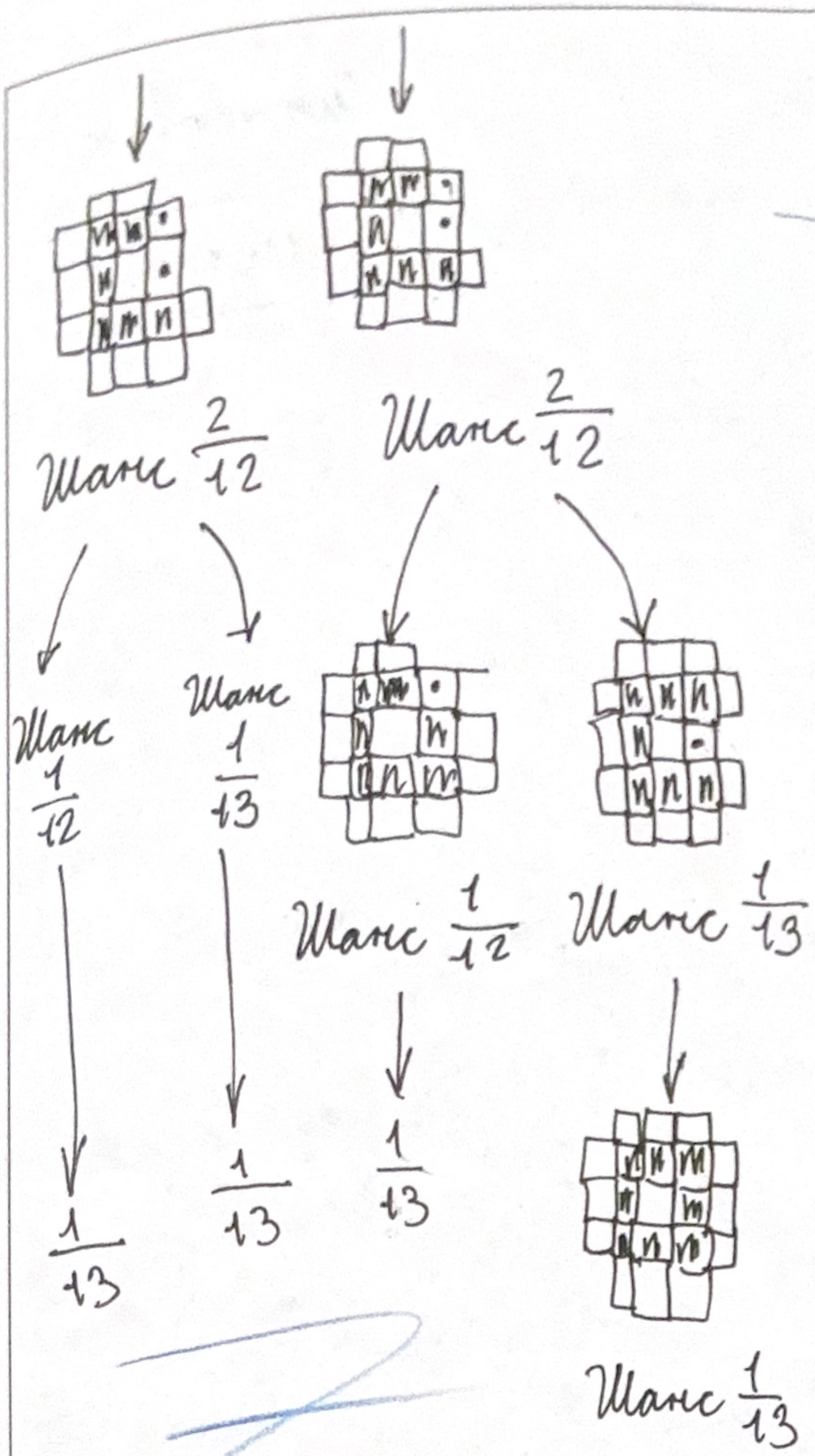
.....

Подписывать лист-вкладыш запрещено! Писать на полях листа-вкладыша запрещено!

25-53-69-39
(122.8)

Чистовик

Лист 3



Общая вероятность:

$$\left(\frac{4}{8}+\frac{2}{7}\right)\left(\frac{2}{9}\cdot\left(\frac{2}{11}\cdot\frac{2}{12}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{13}+\frac{2}{11}\cdot\frac{2}{12}\cdot\frac{1}{13}\cdot\frac{1}{13}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{2}{10}\cdot\frac{2}{12}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{13}+\frac{2}{10}\cdot\frac{2}{12}\cdot\frac{1}{13}\cdot\frac{1}{13}\right)\right)=$$

$$=\frac{4\cdot7+2\cdot8}{7\cdot8}\cdot\frac{2}{9}\cdot\Big(10\cdot2\cdot2\cdot13+2\cdot2\cdot10\cdot12+2\cdot2\cdot11\cdot13+$$

$$+2\cdot2\cdot11\cdot12\Big)\cdot\frac{1}{10\cdot12^2\cdot11\cdot13}=\frac{4\cdot7+16}{7\cdot9}\cdot\frac{130+120+143+132}{10\cdot12^2\cdot11\cdot13}=$$

Ответ: $\frac{4\cdot7+16}{7\cdot8}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{10\cdot2\cdot2\cdot13+10\cdot4\cdot}{}$ $=\frac{525}{7\cdot9\cdot10\cdot12^2\cdot11\cdot13}=\frac{563\cdot8!}{13!\cdot12\cdot7}$

Подписывать лист-вкладыш запрещено! Писать на полях листа-вкладыша запрещено!

$= \frac{5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8!}{13! \cdot 8 \cdot 4}$

Ответ: $\frac{5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8!}{13! \cdot 8 \cdot 4}$

Чистовик

лист 10