0 786527 980000

78-65-27-98
(124.12)

# МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
## имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11 класс вар. 1.

Место проведения Москва
город

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наименование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Вороненко Артёма Андреевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

выход $12^{55}$ — $13^{00}$

Дата

«29» марта 2026 года

Подпись участника

60 (Шестьдесят)

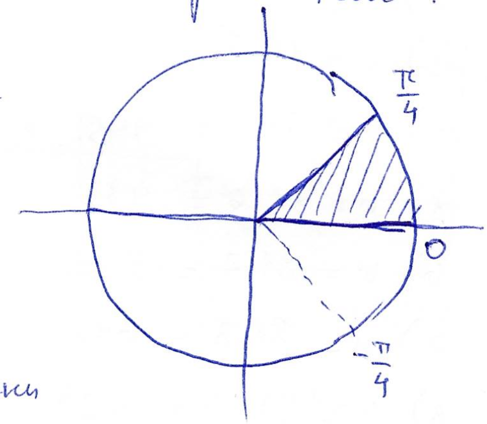


78-65-27-98 (124.12)

80 (Восемьдесят)

**№1.** | Чистовик

ОДЗ данного ур-я имеет вид: $6(1-tg^2x)\geq 0 \Leftrightarrow tg^2x \leq 1 \Leftrightarrow |tg\,x| \leq 1$. Также заметим, что при $\sin x<0$ ур-е не имеет решений. Тогда ур-е может иметь решения только на промежутках $x\in \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}[0+2\pi k, \frac{\pi}{4}+2\pi k]$




(см. рисунок). Рассмотрим промежуток $[0, \frac{\pi}{4}]$ (понятно, что корни ур-я будут периодически повторяться с пер. $2\pi$).

На этом пром-ке $y=tg^2x$ и $y=\sin x$ возрастают, а значит ф-ия $f(x)=\sqrt{6(1-tg^2x)}$ монотонно убывает, ф-ия $g(x)=4\sin x$ монотонно возрастает. Значит, ур-е $f(x)=g(x)$ имеет не более одного реш-я на указанном пром-ке.

При $x=\frac{\pi}{6}$ ур-е прин. вид:

$$\sqrt{6\left(1-tg^2\frac{\pi}{6}\right)} = 4\sin\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \sqrt{6\left(1-\frac{1}{3}\right)} = 4\cdot\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 2=2$, т.е. ур-е выполняется и решением исходного ур-я является серия $x=\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

Ответ: $\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

**№2** Если число $n\in\mathbb{N}$ при делении на сумму своих цифр даёт число, кратное 9, то и само $n \vdots 9$. Но тогда, по признаку делимости на 9, сумма цифр числа $n$ делится на 9. Таким образом, поскольку из условия следует, что $n$ делится на сумму своих цифр, $n \vdots 81$. Рассмотрим все трёхзначные числа

№2 (продолжение) | Чистовик

$n = 81k$ и проверим, ~~все~~ входят ли они в мн-во $A$:

1) $n = 81\cdot 2 = 162$. $\frac{162}{1+6+2} = \frac{162}{9} = 18 \,\vdots\, 9$, подходит
2) $n = 81\cdot 3 = 243$. $\frac{243}{2+4+3} = 27 \,\vdots\, 9$, подходит
3) $n = 81\cdot 4 = 324$. $\frac{324}{3+2+4} = 9\cdot 4 \,\vdots\, 9$, подходит
4) $n = 81\cdot 5 = 405$. $405 : 9 = 9\cdot 5 \,\vdots\, 9$, подходит
5) $n = 81\cdot 6 = 486$. $486 : 18 = 9\cdot 3 \,\vdots\, 9$, подходит
6) $n = 81\cdot 7 = 567$ $567 : 18 \notin \mathbb{Z}$, не подходит!
7) $n = 81\cdot 8 = 648$ $648 : 18 = 9\cdot 4 \,\vdots\, 9$, подходит
8) $n = 81\cdot 9 = 729$ $729 : 18 \notin \mathbb{Z}$, не подходит!
9) $n = 81\cdot 10 = 810$ $810 : 9 = 90 \,\vdots\, 9$, подходит
10) $n = 81\cdot 11 = 891$ $891 : 18 \notin \mathbb{Z}$, не подходит!
11) $n = 81\cdot 12 = 972$ $972 : 18 = 9\cdot 6 \,\vdots\, 9$, подходит.

Таким образом, 2-е, 5-е и предпоследнее трёх-зн. числа, входящие в $A$ — это 243, 486, 810. Их сумма равна
$81\cdot 3 + 81\cdot 6 + 81\cdot 10 = 81\cdot 19 = 1539$

Ответ: 1539.

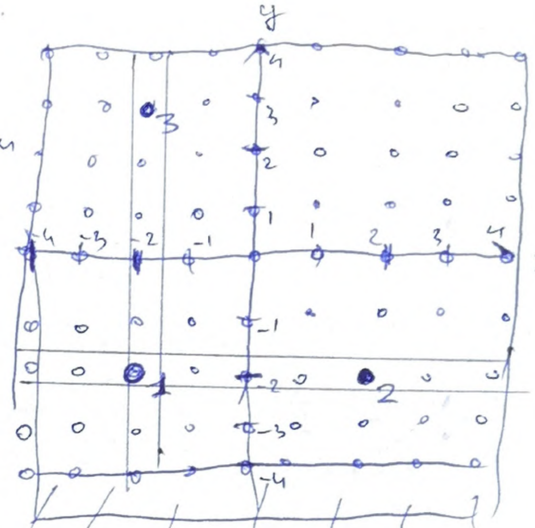
№3. Все прямоугольн. треугольника, удовлетворяющие условию, разбиваются на три группы: треугольники, лежащие в ~~плоскости~~ параллельной пл-ти $xOy$, ~~х~~ пл-ти $xOz$ и ~~х~~ пл-ти $yOz$; причём кол-во треугольников в этих трёх группах совпадает. Поэтому достаточно подсчитать треугольники в одной группе — пусть это треугольники, леж. в пл-ти, параллельной $xOy$. Точки из $F$ входят в плоскости $z=-4$, $z=-3$, ..., $z=4$, кол-во треугольн-в, лежащих в этих 9 плоскостях совпадает, ~~по~~ поэтому будем считать кол-во треугольников в одной такой плоскости. В заданной пл-ти точки располагаются, как

Чистовик

№3 (прод-е)

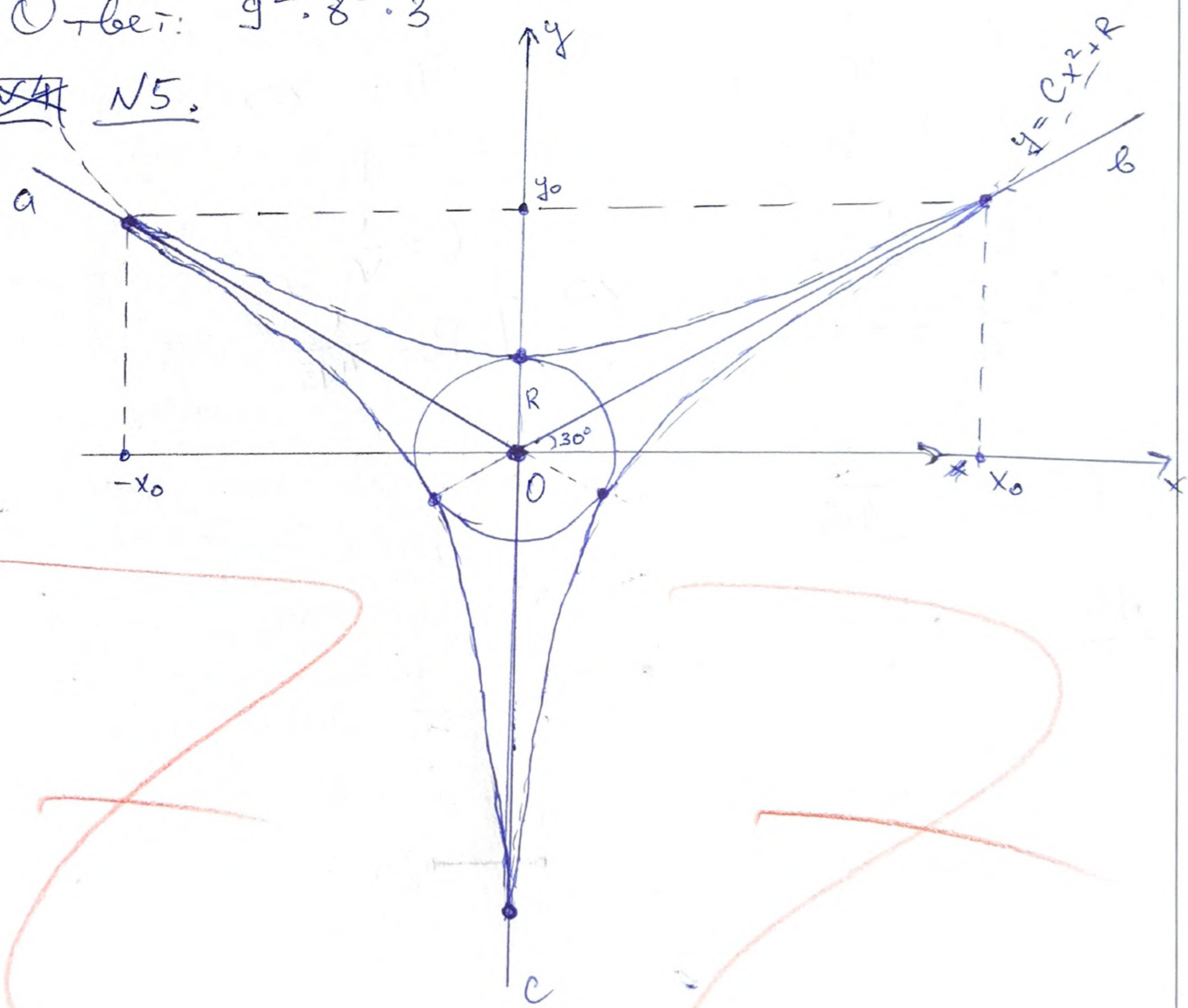
на рис-ке, образуя сетку 9×9.

Каждый треуг-к можно задать вершиной при прямом угле и двумя другими вершинами, находящимися в одних линиях с первой вершиной. Имеется $9^2$ способов выбрать первую вершину, и по 8 способов выбрать вторую и третью. Таким образом, получаем $9^2 \cdot 8^2$ ~~спо~~ треугольников в одной пл-ти, $9^2 \cdot 8^2 \cdot 9$ треугольников в одной группе и $9^3 \cdot 8^2 \cdot 3$ треугольников всего.




Ответ: $9^2 \cdot 8^2 \cdot 3$

~~№4~~ №5.



 Чистовик

№5 (прод-е) Введём систему координат, как на рисунке. Тогда парабола, заключённая между лучами a и b задаётся ф-ией $f(x) = y = Cx^2 + R$ в этой системе координат, где R – радиус вписанной окр-ти. Лучи a и b являются касательными к этой параболе, пусть они касаются параболы в точках $(-x_0, y_0)$ и $(x_0, y_0)$ соотв. Поскольку по условию $|(-x_0)-(x_0)| = 1$, то $x_0 = \frac{1}{2}$. Луч ~~a~~ b составляет с осью Ox угол равный 30°, значит, $y_0 = x_0 \cdot tg 30° = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$. Запишем условие касания луча b с параболой: это эквивалентно тому, что $f'(x_0) = tg 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$ и $f(x_0) = y_0$.

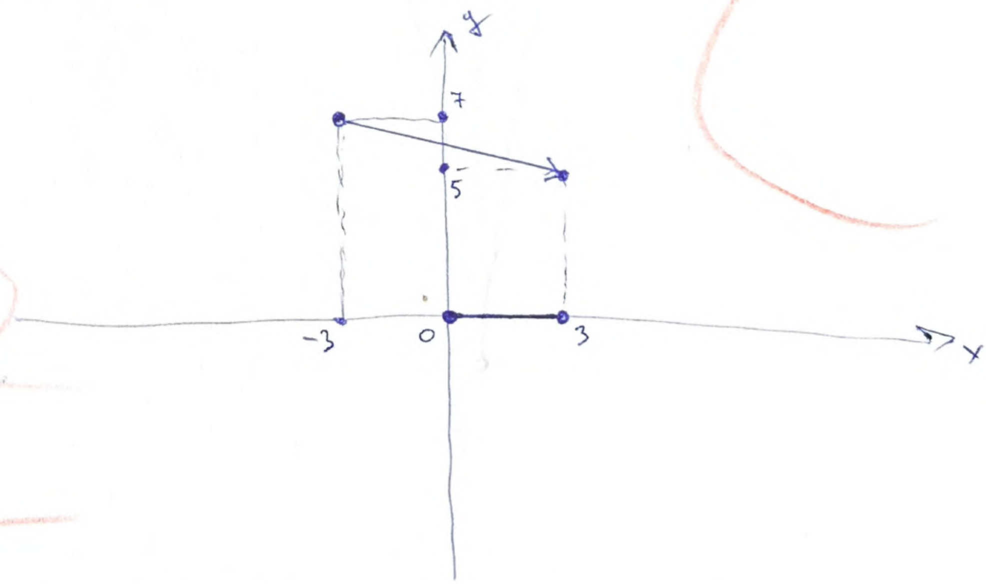
Решим систему:

$$\begin{cases} f'(x_0) = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ f(x_0) = y_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2Cx_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ Cx_0^2 + R = y_0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{4} + R = \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ R = \frac{1}{4\sqrt{3}} \end{cases}$$

Ответ: $\frac{1}{4\sqrt{3}}$

№6.

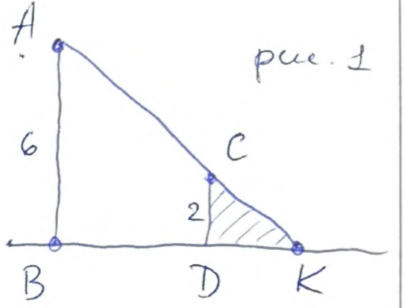


78-65-27-98 (124,12)

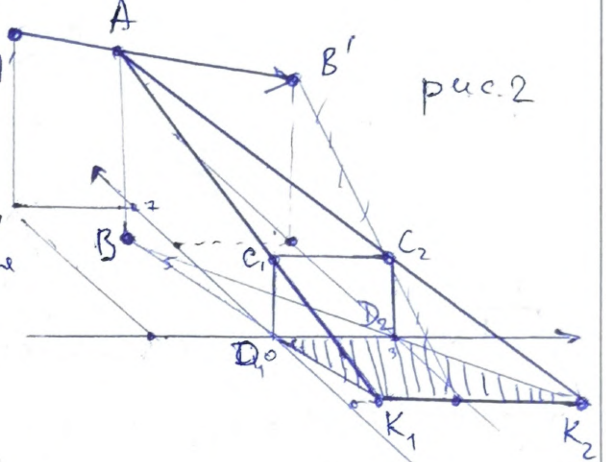
№6 (прод-е)

Чистовик

Пусть на рис. 1 светлячок находится в точке $A$, $B$ – проекция $A$ на землю, $CD$ – забор, $DK$ – затенённая область на земле. Из подобия треугольников $KAB$ и $KCD$ получаем, что $\frac{DK}{DB} = \frac{1}{2}$.

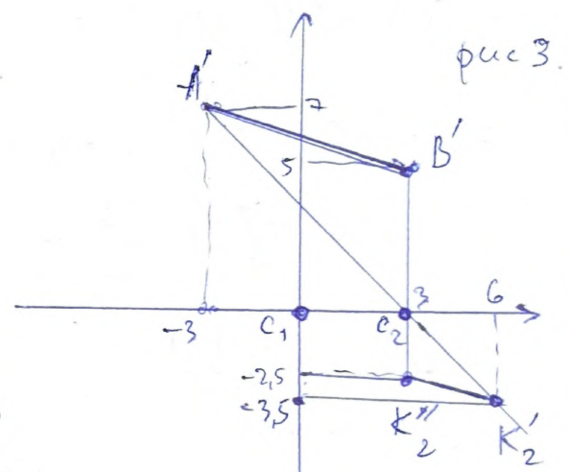



На рис. 2 эта ситуация показана в пространстве; здесь $BD_1 = 2D_1K_1$, $BD_2 = 2D_2K_2$, область $D_1D_2K_2K_1$ оказывается затенённой. Поскольку $\triangle BD_1D_2 \sim \triangle BK_1K_2$, то $D_1D_2 \parallel K_1K_2$.




Посмотрим, какое мн-во точек заметают точки $K_1$ и $K_2$ при перемещении точки $A$ вдоль ~~ука~~ вектора $\overline{A'B'}$.

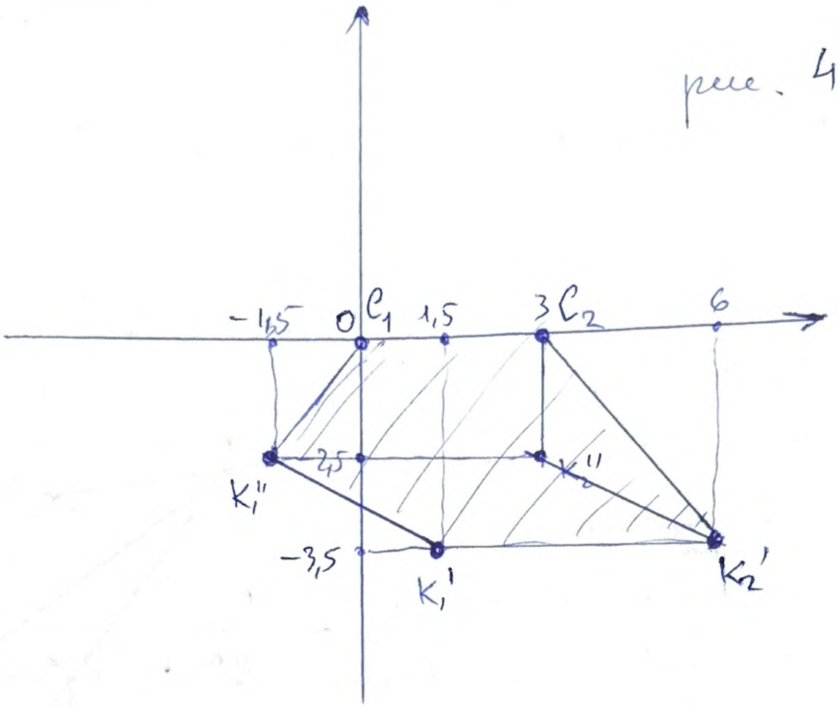
Необходимо найти ГМТ точек ~~$A \in A'B'$, т.ч.~~ $P$, т.ч. прямая $PC_{1,2}$ проходит через отрезок $A'B'$.




Очевидно, это ГМТ лежит в пл-тях $(A'B'C_2)$ и $(A'B'C_1)$, а значит, получаются при пересечении ~~плоско~~ указанных плоскостей плоскости земли. Пусть ГМТ для прямых, проходящих через т. $C_2$ – отрезок $K_2'K_2''$, через т. $C_1$ – отрезок $K_1'K_2''$. Тогда из подобий треугольников $A'B'C_2$, ~~и~~ $K_2'K_2''C_2$ и $A'B'C_1$ и $K_1'K_1''C_1$ получаем координаты точек.

$K_1'(1,5; -3,5)$, $K_1''(-1,5; -2,5)$, $K_2'(6; -3,5)$, $K_2''(3; -2,5)$.

№6 (прод.)




Тогда затенённая — это область, заштрихованная на рис. 4. Её площадь равна $S = S_{C_1C_2K_2''K_1''} + S_{K_2''K_2'C_2} + S_{K_1''K_2''K_2'K_1'} =$

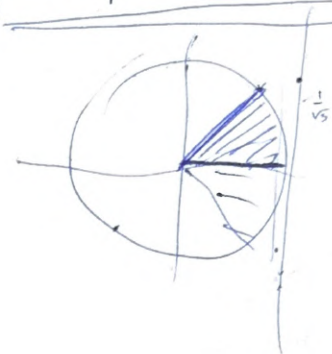
$= \frac{1}{2}(3+4{,}5)\cdot 2{,}5 + \frac{1}{2}\cdot 2{,}5\cdot 3 + 1\cdot 4{,}5 =$

$= 3{,}75\cdot 2{,}5 + 2{,}5\cdot 1{,}5 + 4{,}5 = \frac{15}{4}\cdot\frac{5}{2} + \frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2} + \frac{9}{2} =$

$= \frac{75}{8} + \frac{30}{8} + \frac{36}{8} = \frac{141}{8}$

Ответ: $\frac{141}{8}$.

Черновик




① $\sqrt{6(1-tg^2x)} = 4\sin x$

ОДЗ: $1 - tg^2 x \geq 0$

$tg^2 x \leq 1$

$\sqrt{6(1-tg^2x)} \leq \sqrt{6(1-0)} = \sqrt{6}$

$$\begin{cases} 6(1-tg^2x) = 16\sin^2 x \\ tg^2 x \leq 1 \\ \sin x \geq 0 \end{cases}$$

Мон?

$x = \frac{\pi}{6}$ $\quad tg^2 x = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{3}$ $\quad 6(1-tg^2x) = 6 \cdot \frac{2}{3} = 4$

$\sqrt{\dots} = 2$ $\quad 4\sin x = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$.

② $A = \{n \in \mathbb{N} \mid (n \vdots s(n)) \vdots 9\}$

Найти 3-зн ч. $\overline{abc}$ $\quad \frac{100a+10b+c}{a+b+c} \vdots 9$

100

$n \vdots 9 \cdot s(n)$ $\quad n \vdots 81$ $\quad 81 \cdot 20 = 1620$

$\cancel{n \vdots 9}$ $\quad \vdots 9$ $\quad 1620 - 81$

$n = 81 \cdot 2 = 162$ $\quad \frac{81 \cdot 2}{9} =$ $\quad$ $\begin{array}{r} -1620 \\ 81 \\ \hline 1539 \end{array}$

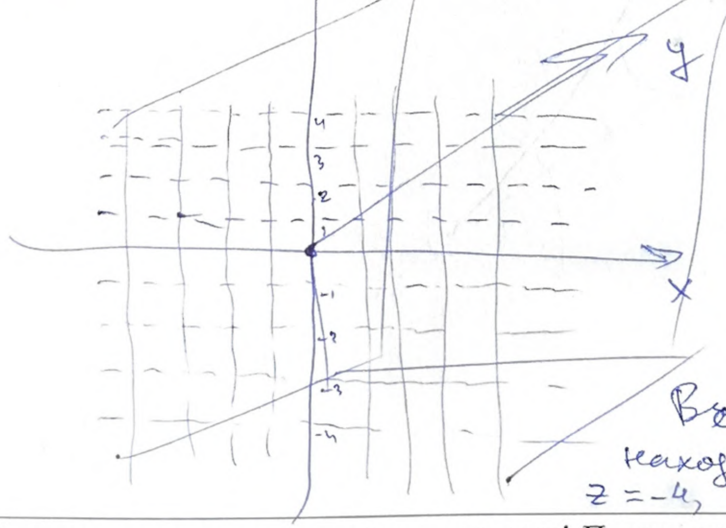
$\cancel{162 \vdots}$ $\quad \frac{162}{9} =$

1) $n = 81 \cdot 2 = 162$ $\quad \frac{162}{9} = 9 \cdot 2 = 18 \vdots 9$

2) $n = 81 \cdot 3 =$

$\begin{array}{r} \times 81 \\ 19 \\ \hline 729 \\ 81 \\ \hline 1539 \end{array}$

③




3 группы:

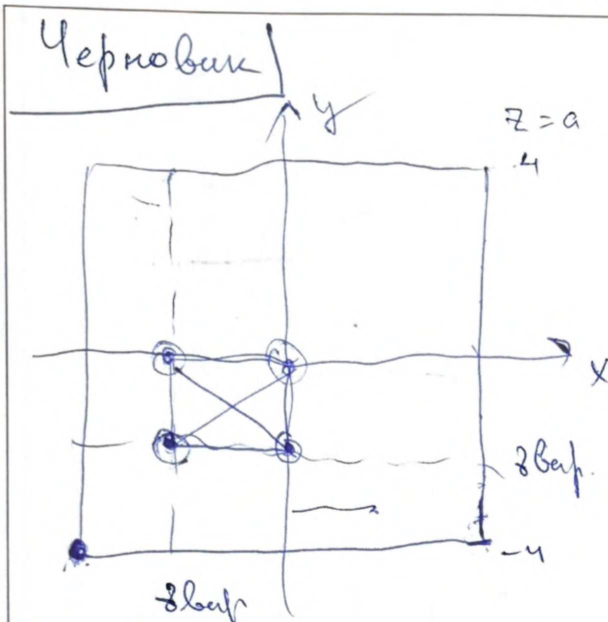
тр-ки, леж. в пл-ти, пар. $xOy$, $xOz$, $yOz$

Сравн.

Рассмотрим $xOy$

Все эти тр-ки находятся в пл-тях $z=-4$, $z=-3$, ..., $z=4$.

Черновик




9 поз.

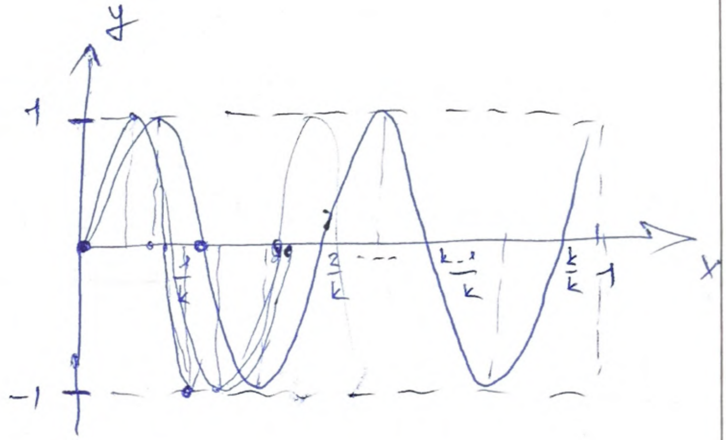
$9\cdot9\cdot8\cdot8$

$9^2\cdot8^2\cdot9\cdot3$

Кол-во пр-к зад. 4-рех

1 верш.: $\frac{9^2\cdot(8^2)\cdot4}{4} = ?$

4.




$y = \sin k\pi x$

$k \in \{13, 15, 17\}$

$t = k\pi x$

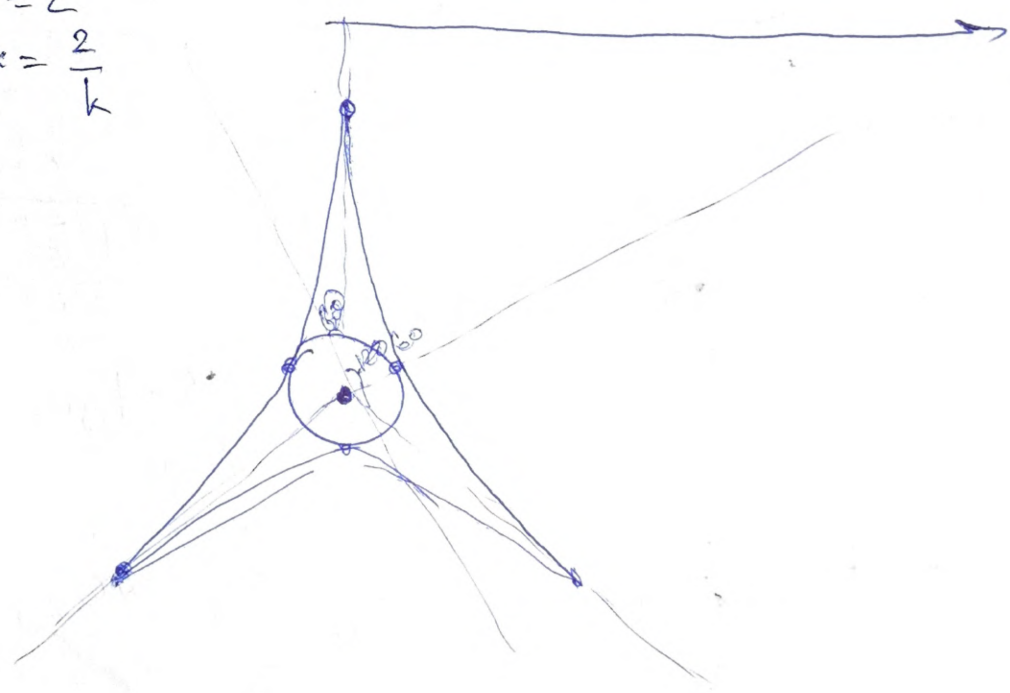
Пер $t = 2\pi$

$k\pi x = 2\pi$

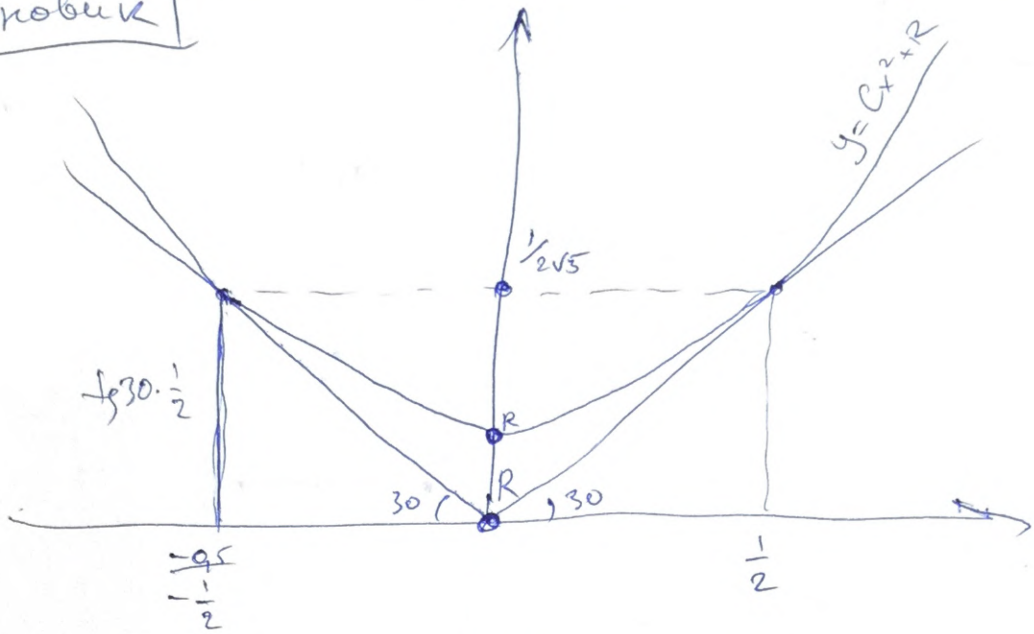
$kx = 2$

$x = \frac{2}{k}$

5.



Черновик

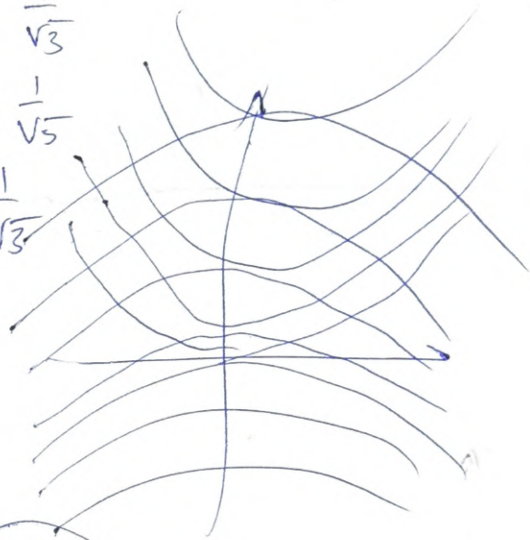



$y=Cx^2+R$ $\quad$ $y'\left(\frac{1}{2}\right)=tg\,30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$2Cx=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$2C\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{\sqrt{5}}$

$C=\frac{1}{\sqrt{3}}$



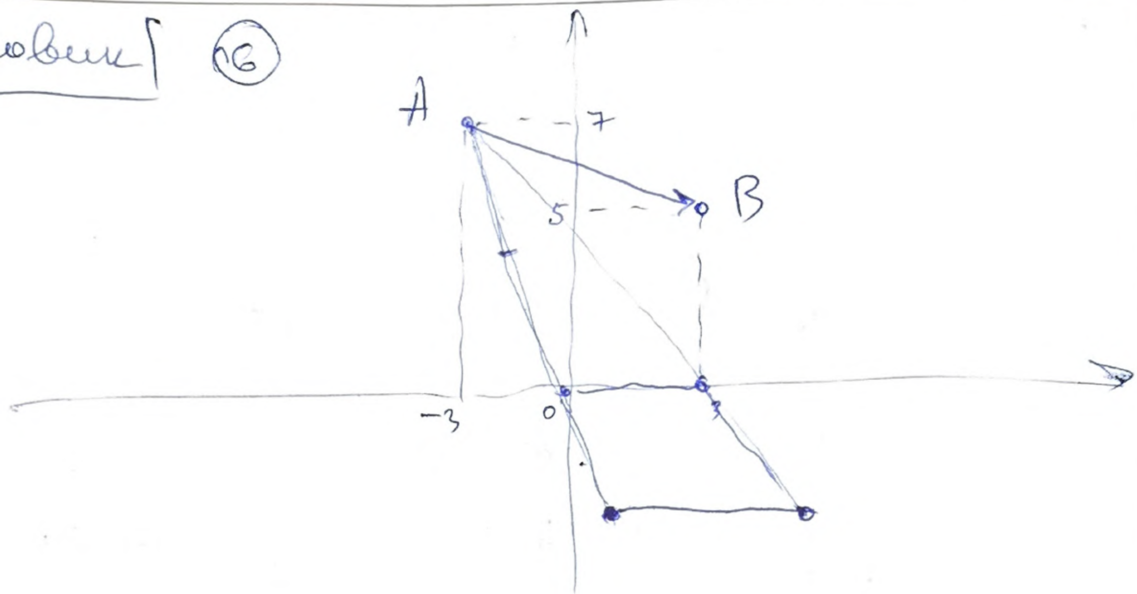
$f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{3}}+R$

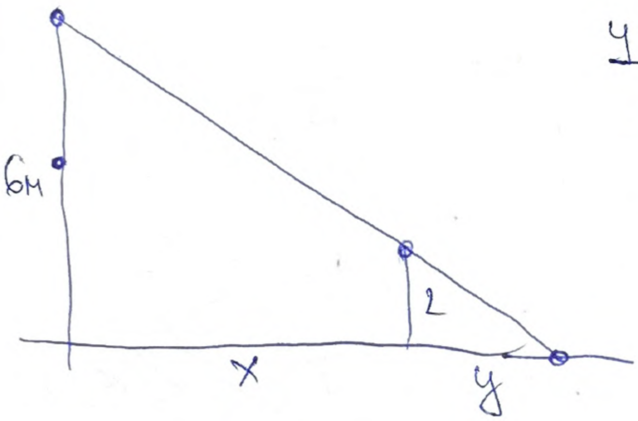
$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2\sqrt{5}}$

$\frac{1}{4\sqrt{3}}+R=\frac{1}{2\sqrt{5}}$

$R=\frac{1}{2\sqrt{5}}-\frac{1}{4\sqrt{5}}=\frac{1}{4\sqrt{5}}$

Черновик 16



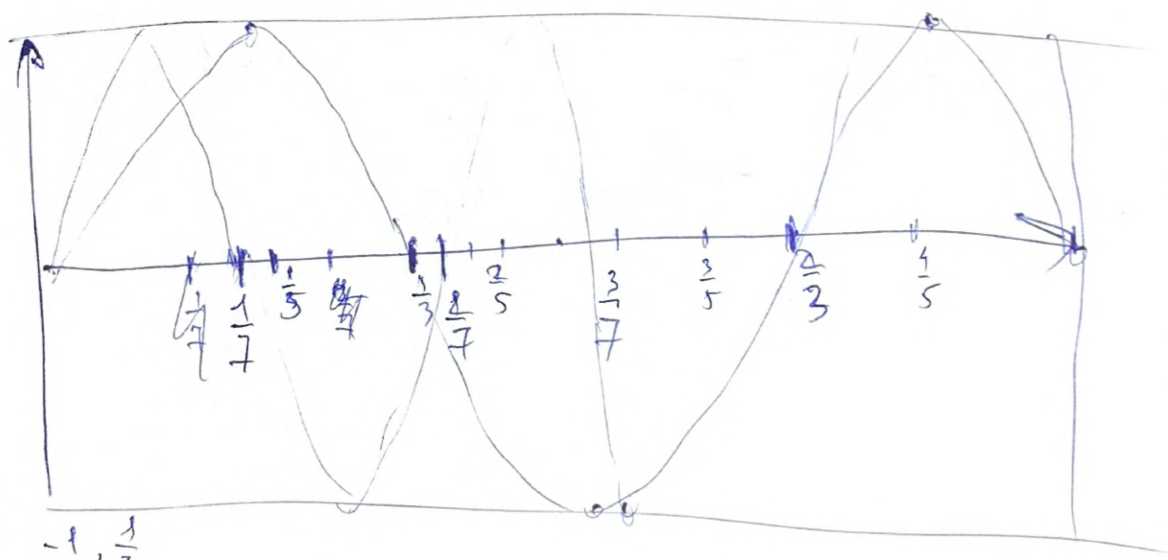




$$\frac{y+x}{y} = \frac{6}{2} = 3$$

$$y + x = 3y$$

$$2y = x$$

$$y = \frac{x}{2}$$



$\frac{-1 \pm 3}{4}$ $-1, \frac{1}{2}$

3, 5, 7

Черновик

$$8x^2\log_a x - \log_x a - 2x \le 0$$

$$8x^2\log_a x - \frac{1}{\log_a x} - 2x \le 0$$

$$\frac{4x^2}{\log_a x} \qquad \cancel{4x} - \frac{2x}{\log_a^2 x} - \frac{1}{\log_a x}$$

$$1 - \frac{1}{8x^2\log_a^2 x} - \frac{1}{\cancel{4}4x\log_a x} \le 0$$

Чистовик | №8 Поделив нер-во на $8x^2\log_a x$, получим:

$$1-\frac{1}{8x^2\log_a^2 x}-\frac{1}{4x\log_a x}\le 0$$

(Это можно сделать, поскольку ОДЗ: $x>0$, $x\neq 1$). Тогда, взяв $t=\frac{1}{4x\log_a x}$,

получим: $1-2t^2-t\le 0$

$$\cancel{\Leftrightarrow\quad t^2+2t-1\geq 0}$$

$$\cancel{\Leftrightarrow\quad t\in[-1-\sqrt{2},\,-1+\sqrt{2}]}$$

$$\cancel{t\in(-\infty,\,-1-\sqrt{2}]\cup[-1+\sqrt{2},\,+\infty)}$$

~~Откуда:~~ $\cancel{\left[\begin{array}{l}\frac{1}{4x\log_a x}\le -1-\sqrt{2}\\ \frac{1}{4x\log_a x}\geq -1+\sqrt{2}\end{array}\right.}$

$$\Leftrightarrow\quad 2t^2+t-1\geq 0\quad\Leftrightarrow\quad t\in(-\infty,\,-1]\cup\left[\frac{1}{2},\,+\infty\right)$$

Откуда: $\left[\begin{array}{l}\frac{1}{4x\log_a x}\le -1\\ \frac{1}{4x\log_a x}\geq \frac{1}{2}\end{array}\right.$

1) При $a>1$, ф-я $y=\frac{1}{4x\log_a x}$ монотонно ~~возр-ет~~ убывает.

Повысить оценку на 20 баллов (старая оценка – 60б, новая оценка – 80б)

Председателю апелляционной комиссии
олимпиады школьников «Ломоносов»
Ректору МГУ имени М.В. Ломоносова
академику В.А. Садовничему от
участника заключительного этапа по
профилю «математика»
Вороненко Артёма Андреевича

Апелляция.

Прошу пересмотреть мой индивидуальный предварительный результат заключительного этапа, а именно 60 баллов, учитывая следующие мои пояснения:

1) В задаче № 1 я учел «ограничения вида “синус и подкоренное выражение должны быть положительны”» (формулировка из критериев оценивания): «ОДЗ данного уравнения имеет вид: $6(1-\operatorname{tg}^2 x) \geq 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 x \leq 1 \Leftrightarrow |\operatorname{tg} x| \leq 1$. Также заметим, что при $\sin x < 0$ уравнение не имеет решений» (из работы). Далее, я нашел верные решения уравнения на промежутках $\left[2\pi k; \frac{\pi}{4}+2\pi k\right], k \in \mathbb{Z}$, используя монотонность функций на каждом из промежутков. К сожалению, я упустил решения на промежутках $\left[\frac{3\pi}{4}+2\pi k; \pi+2\pi k\right], k \in \mathbb{Z}$, удовлетворяющих вышеописанным ограничениям. Но, решения уравнения на этих промежутках находятся совершенно аналогичным способом, используя монотонность функций.

2) Задача № 3 мной решена верно, но, к сожалению, в ответе я описался и вместо правильного числа, найденного в решении («Таким образом, получаем $9^2 \cdot 8^2$ треугольников в одной плоскости, $9^2 \cdot 8^2 \cdot 9$ треугольников в одной группе и $\boldsymbol{9^3 \cdot 8^2 \cdot 3}$ **треугольников всего**», $9^3 \cdot 8^2 \cdot 3 = 139968$), переписал эту строчку с ошибкой: «Ответ: $9^2 \cdot 8^2 \cdot 3$».

3) В решении задачи № 5 я указал, что лучи $a$, $b$, $c$ являются общими касательными для парабол, поскольку посчитал этот вывод очевидным из соображений симметрии. Строгого определения угла в криволинейном треугольнике в школьном курсе нет. Считаю, что решение проведено без ошибок.

4) В решении задачи № 6 одна из страниц (последняя) по невнимательности не была помечена как «Чистовик», в то время как предыдущие были помечены.

Исходя из изложенного, считаю, что мною верно решены задачи №№ 2, 3, 5, 6, и наполовину решена задача № 1.

Подтверждаю, что я ознакомлен с Положением об апелляциях на результаты олимпиады школьников «Ломоносов» и осознаю, что мой индивидуальный предварительный результат может быть изменён, в том числе в сторону уменьшения количества баллов.

23.04.2026