

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 9 класс

Место проведения Москва  
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов  
наименование олимпиады

по Математике  
профиль олимпиады

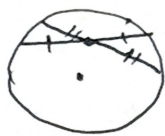
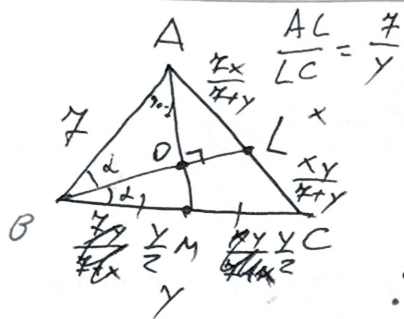
Вяткин Егор Евгеньевич  
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата  
«29» марта 2026 года

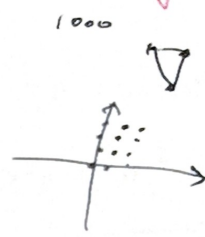
Подпись участника  
Егор

15-87-27-73

(122.9)

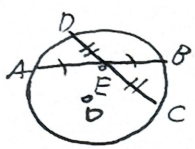


$abc + n$   
 $n^2 = abcd \dots$   
 6-й шаг  $abc + n$   
 $n^2 - 100n = 20$   
 $n(n-100) = 20$



N1

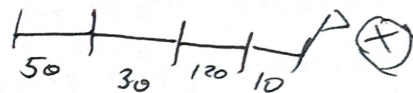
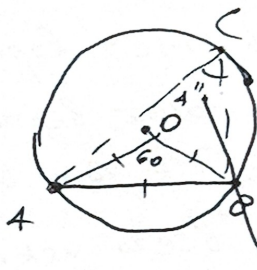
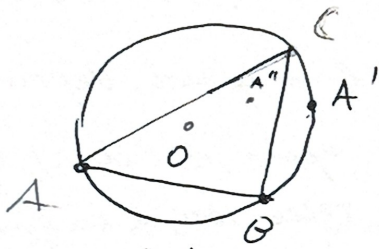
Заметим, что две хорды, которые являются началом той же хорды, симметричны относительно прямой, проведенной через точку A и центр круга, т.к.



из-за степ. точки E относ.  $\omega$   
 $AE \cdot EB = DE \cdot EC \Rightarrow$  (т.к.  $AE = EB$  и  $DE = EC$ ), то  $AE = DE = EC = EB =$  длины этих хорд равны. Так как известно, что хорда + диаметру, проведен. через точку, делая ее началом  $\Rightarrow$  или E это центр  $\omega$  (и тогда 3-я хорда - диаметр  $\Rightarrow$  её длина  $\geq 5 \cdot 2 = 10$ ), или нет и тогда  $DC \parallel AB$  и тогда они совп., что W условие  $\Rightarrow$  min длина 3-й хорды = 10

$\angle = 30^\circ$

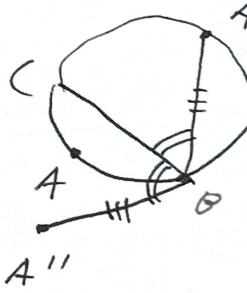
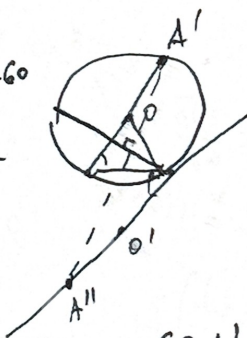
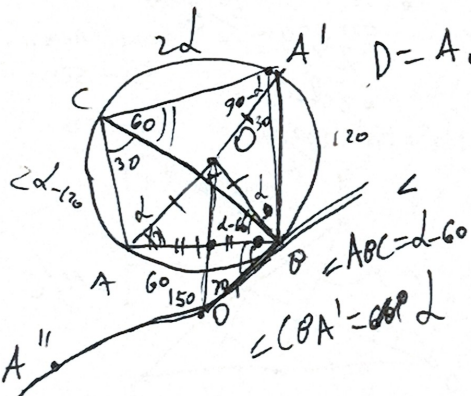
хорды = 16 Ответ: 10  
 $\angle BCA' = 60^\circ$



$\frac{50}{x} > 50$   
 $h = \frac{x \cdot \sqrt{3}}{2}$   
 $\frac{200}{x}$

$-3x^2 + 2x + a^2 = 0$

$D = 4a^2 + a^2 \cdot 12 = 16a^2 \sqrt{D} = -4a$



$\angle ABA'' = 60^\circ$

$\angle CBA' = \angle CBA'' = \alpha$

$120 + 60 + \alpha - 120 = 360$

$4\alpha = 360$

1/2

Пусть число  $n = \overline{abcd}$ , и тогда в  $n^2$  от 8 до 7 цифр (т.к.  $n^2 \geq 1000^2 = 10^6$ , и  $n^2 < 10000^2 = 10^8$ ). Если 7:

$n^2 = \overline{abcdxyz} = n \cdot 1000 + \overline{xyz} \Rightarrow n(n-1000) = \overline{xyz}$ , то есть  $< 1000$  и  $\geq 0$  произв.  $n$  и  $(n-10^3)$ , и либо  $n=1000$  (тогда  $n^2 = \frac{1000000}{n}$ ), либо  $n-1000 \geq 1 \Rightarrow n(n-1000) \geq 1 \cdot 1000 \neq \overline{xyz}$  т.к. не 3-х знаков. Если же 8 цифр:

$n^2 = \overline{abcdxyzw} \Rightarrow n^2 = n \cdot 10^4 + \overline{xyzw} \Rightarrow n(n-10^4) = \overline{xyzw}$ , и т.к.  $n \leq 9999 < 10^4$ , то  $n-10^4 < 0$ , и  $n > 0 \Rightarrow n(n-10^4) < 0$ , и  $\Rightarrow$  не может быть  $\overline{xyzw}$  (т.к. это  $\geq 0$ )

Ответ: 1000

1/3

Заметим, что можно просто для каждой точки подсчитать, для скольких  $\Delta$ -ов прямоуг. с верш. в этих точках она является вершиной с прямым углом. Для точки  $(x, y)$ , где  $x, y \in \mathbb{N}$  и  $\leq 10$ , вариантов  $9^2 = 81$ , т.к. есть  $10-1=9$  вариантов в отложить вертикальный катет (все точки на самой вертикали кроме её самой), и столько же по горизонтали. Т.к. для всего точек 100, и каждая "даёт" 81 нужный  $\Delta$ , то всего искомым  $\Delta$ -ов 8100

Ответ: 8100

$\frac{1}{a} + \frac{2x}{a^2} - \frac{3x^2}{a^3} \leq 0 \mid \cdot a^3$  200с.

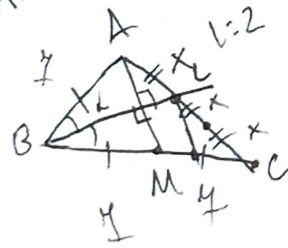
$-3x^2 + 2ax + a^2 \leq 0$

$x_1 = \frac{-2a + \sqrt{D}}{-6}$

$D = b^2 - 4ac = 4a^2 - 4 \cdot (-3) \cdot a^2 = 4a^2 + 12a^2 = 16a^2$

$AM^2 = 4^2(1 - \cos 2\alpha)$

$AC^2 = 4^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 4 \cos 2\alpha = 4^2(5 - 4 \cos 2\alpha)$



$4\sqrt{1 - \cos 2\alpha}$  и  $4$  и  $\leq 5010$   
 $AC = 4\sqrt{1 - 2\cos 2\alpha + 1}$

• 1 цвет:  $\frac{50}{x} \geq 30$  и  $\frac{80}{x} \leq 80$  маш./пеш. 30-50  
 • 2 цвет:  $\frac{200}{x} \geq 60$  и  $\frac{110}{x} \leq 110$  50-50 (+)  
 [x] = M/C  
 0 k 50 3. 120 10 80/x > 30 80/x < 80


15-87-27-73  
(122.9)

№6 Знак  $a^3$  совп. со знаком  $a$ ;  $a \neq 0$

•  $a > 0$ :

$$-3x^2 + 2ax + a^2 \geq 0$$

Но это парабола с ветвями вниз, у нее 4 корня  $x$  при  $\text{кор.}$

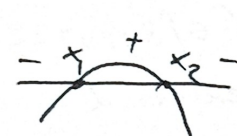
ока  $\leq 0$  не отрезок, а дуга лука:   
(или просто прямая, или с выколотой точкой)

$\Rightarrow$  здесь нет реш.

•  $a < 0$ :

$$-3x^2 + 2ax + a^2 \geq 0:$$

Длина отрезка  $= x_2 - x_1 = \frac{-2a - \sqrt{D}}{-6} - \frac{-2a + \sqrt{D}}{-6} = \frac{2\sqrt{D}}{6} = \frac{\sqrt{D}}{3}$

  $= \frac{\sqrt{D}}{3} = 2026$  по условию,  $2026$

$$D = (2a)^2 - 4 \cdot (-3) \cdot a^2 = 16a^2 \Rightarrow \sqrt{D} = -4a \text{ (т.к. } a < 0) \Rightarrow$$

$$\frac{-4a}{3} = 2026 \Rightarrow a = \frac{3 \cdot 2026}{-4} = -3 \cdot (500 + 6,5) = -3 \cdot 506,5 =$$

$$-1500 - 19,5 = -1519,5$$

№4

] точка против. А диаметр.  $= A'$ . Т.к.  $\angle AOB = \angle ACO = 60^\circ$ , то  $\triangle AOB$  - равностор. (т.к.  $AO = OB$  как радиусы)

Тогда,  $\angle ABO' = \angle ABO = 60^\circ$ , и т.к. по условию  $A''$  и  $O'$  лежат на 1-й прямой, то  $\angle AOA'' = \angle ABO' = 60^\circ$ .

]  $\angle CAA' = \alpha$ . Заметим, что  $AA'$  - диаметр,  $\angle CAA' = 90^\circ \Rightarrow$   
 $\angle OCA' = 60^\circ$ . Также по св-ву ~~впис. углов~~ симметрии,  $\angle CBA' =$

$= \angle COA''$ ; по св-ву впис. углов,  $\angle COA' = \alpha \Rightarrow$

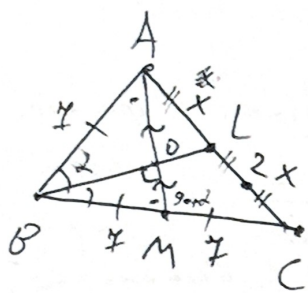
$\angle COA'' = \alpha$ , и т.к.  $\angle ABO = 60^\circ$ , то  $\angle COA = \alpha - 60^\circ$ .

Теперь, т.к.  $\angle COA + \angle COA' = 90^\circ$ , то  $\alpha - 60^\circ + \alpha = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 75^\circ \Rightarrow$

$$\angle A = \alpha + 60^\circ = 135^\circ \Rightarrow \angle B = 180^\circ - 30^\circ - 135^\circ = 15^\circ$$

Отв:  $\angle B = 15^\circ$

$\sqrt{4} \quad D = AM \cap BL$



Т.к. в  $\triangle ABM$   $BO$ -и высота и бисс-а, то

ок  $p/d \Rightarrow AM \cdot AB = BM$ , и т.т.  $AB = 7$ , а

$BM = MC$ , то  $BC = 7 * 2 = 14$ . Найдём теперь

$AC$ . ( $AC \neq 14$  т.к.  $\triangle AOC$  не  $p/d$ )

Заметим, что т.к.  $BL$ - бисс-а, то  $\frac{AL}{LC} = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow LC = 2AL$  ( $\square AL = x \Rightarrow LC = 2x$ ) По перву  $\Delta$ -ка,

$7 + 3x > 14 \Rightarrow 3x > 7$ , и  $7 + 14 > 3x \Rightarrow 21 > 3x$ , то есть  $AC \in [8; 20] \Rightarrow$

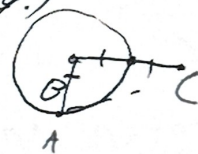
$P_{AOC} \in [29; 41]$ ,  $\{35\}$   $\forall \alpha \in \text{от } \angle AOC (= \angle)$  и при изменении  $\alpha$

$AC$  также нек. непрерывно, и при  $\alpha = 0$   $AC = 7$  (но это не  $\Delta$ ),

и при  $\alpha = 180^\circ$   $AC = 21$  (также не  $\Delta$ ), и при уменьш.  $\alpha$  от  $180^\circ$  до  $0^\circ$

$AC$  также краин будет меняться непрер. от 21 до 7 (и эти значения мы выкадываем т.к. тогда  $\Delta$  вырожд.)

Ответ:  $P_{AOC} \in [29; 41] \setminus \{35\}$  и  $P_{AOC} \in \mathbb{N}$



Не пол. на машины:  $t > 30 \text{ с} \Rightarrow \frac{50}{x} > 30 \Rightarrow x < \frac{5}{3} = 1,6$

учет 1:  $t < 80 \Rightarrow \frac{80}{x} < 80 \Rightarrow x < 1$

не

ис. 3)  $50 \text{ с (ч.)}$   $\frac{200}{x} > 60 \Rightarrow x < \frac{10}{3}$   $\frac{200}{x} > 10$  (т.к.  $x < 20$ )

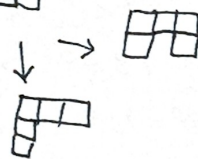
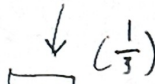
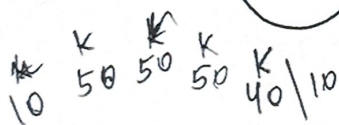
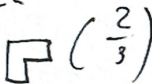
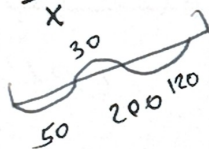
$\frac{50}{x} > 80$

$\frac{50}{x} > 50$

$\frac{210}{x} \leq 110$

$\frac{210}{x} < 220$

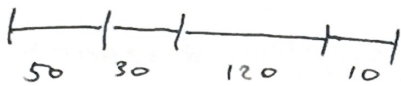
$\frac{80}{x} < 22$



15-87-27-73  
(122.9)

№5

] скорость дев. в м/с =  $x$ , тогда



$\frac{50}{x} \geq 5$  (чтобы она не жила на первом светофоре) и  $\frac{80}{x} \leq 80$  (чтобы она не переехала на 1-ом свет. на красный)

и  $\frac{80}{x} \leq 80 \Leftrightarrow x \geq 1$

приобретение ускорения, и вообще, она не останавливается по условию)

Потом, к второму переходу

она доедет за  $\frac{200}{x}$  секунду, и

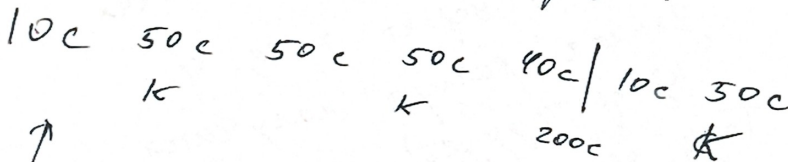
т.к. она не останавливается, то будет

зелёный тогда и ещё  $\frac{10}{x}$  секунду. То есть, т.к.  $x \leq \frac{50}{80} = \frac{5}{8}$ , то  $\frac{200}{x} > 10$  (т.к.  $200 > 80x$ )  $\Rightarrow$  за первый "узел" 2-го светофора она не успеет,  $\Rightarrow \frac{200}{x} \geq 10 + 50 \Rightarrow \frac{200}{60} \geq x \Rightarrow$

$x \leq \frac{10}{3}$ . Также, за  $\frac{210}{x} \leq 10 + 50 + 50 \Rightarrow \frac{210}{110} \leq x \Rightarrow x \geq \frac{21}{11}$

~~Именно при такой  $x$  девушка заметит, что это все ограничено на Ариппикль, ведь мы рассмотрели все её взаимодействия с обоими светофорами~~

Заметим, что т.к.  $x \leq 1$  и  $x \geq 1$ , то  $x = 1$ , и при такой  $x$  дев-ка действ. не будет нарушить ПДД ни на 1-ом светофоре ни на втором, ведь мы уже посчитали для первого, а для второго она поедет к нему через 200 секунд, и тогда там становится цвет будет зелёным: (а через  $\frac{10}{1} = 10$ с станет красным)



Ответ:  $v_{\text{дв.}} = 1 \text{ м/с}$

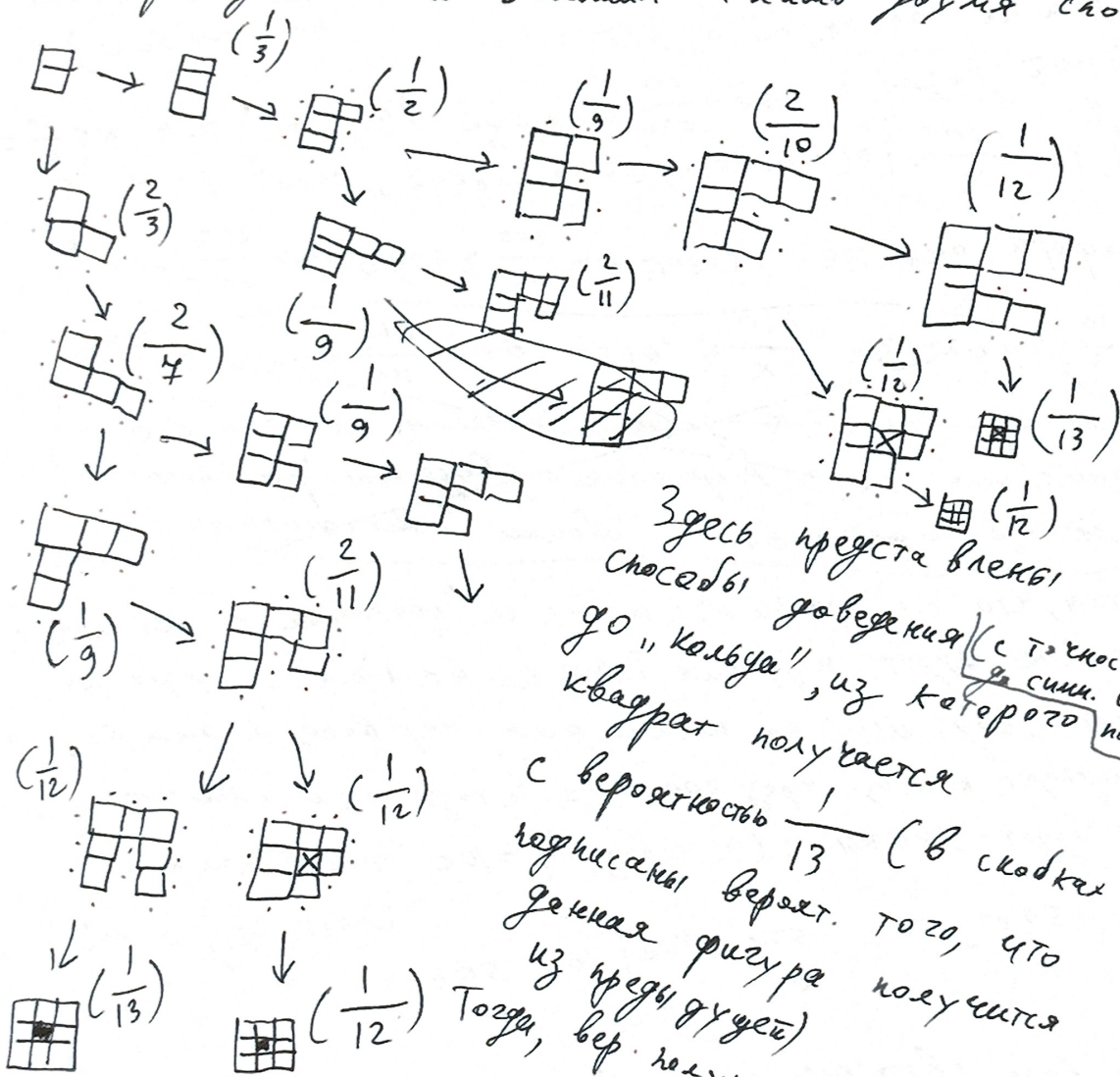
↑  
увета втор. светофора по времени от нач. движ. девушки

№8

Как всё равно, какие 2 сосед. клетки покрасит кадимур

Заметим, что если на очередном шаге у кого-то получилась фигура из  $x$  клеток,  $v$  которой  $v$  — количество клеток 2 соседа кроме двух „крайних“ клеток, то преобразовать её „правильно“ можно при достаточно больших  $x$  лишь двумя способами.

можно при достаточно больших  $x$  лишь двумя способами.



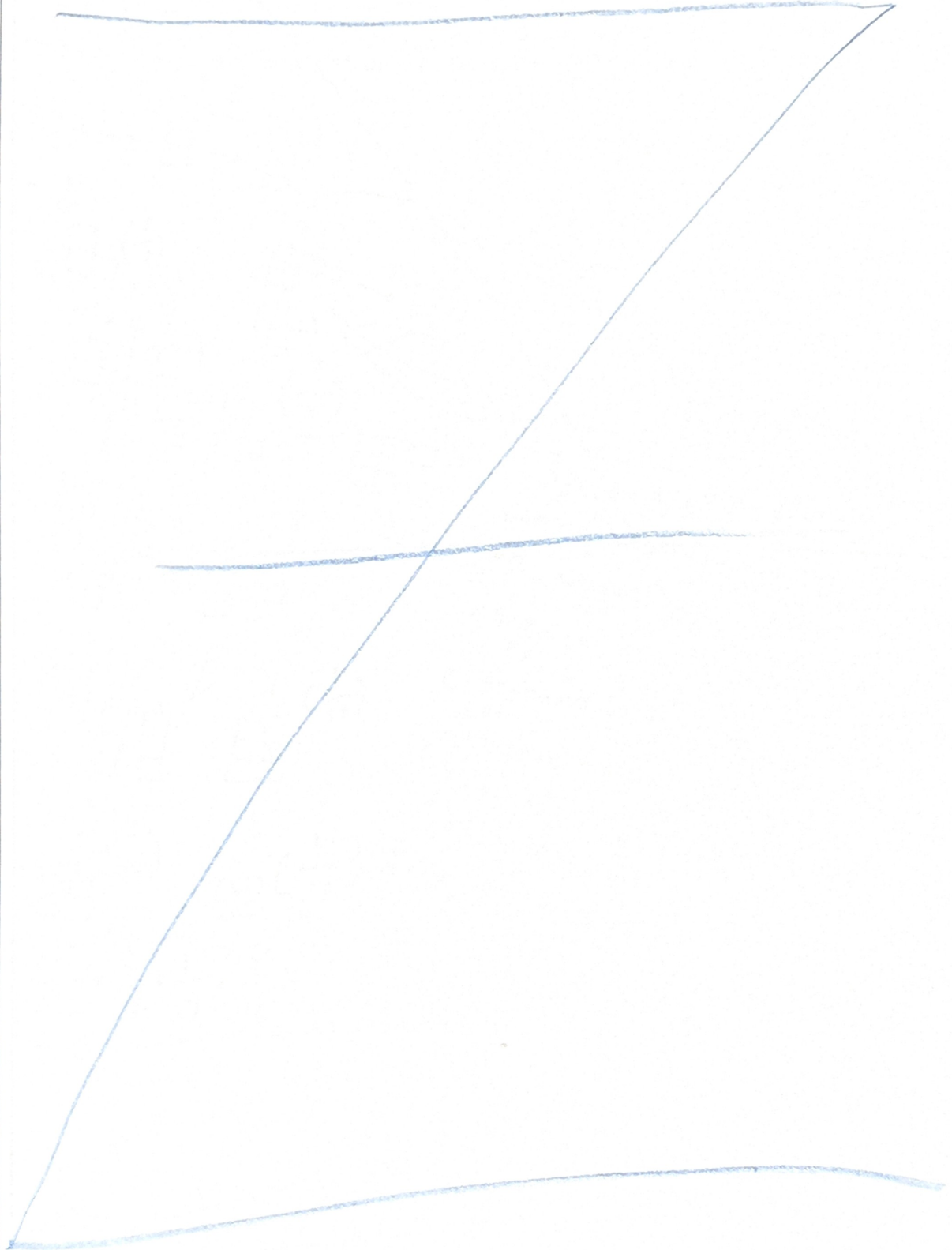
$$3x^2 - 2xa - a^2 = 0$$

$$D = 4a^2 + 12a^2 = \left(\frac{4a}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$$\frac{2\sqrt{D}}{6} = 2026$$

$$2 \cdot \frac{-4a}{3} = 2026$$

$$\frac{-4a}{3}$$



№1 ✓  
№2 ✓  
№3 ✓  
№4... (0)  
№5 ✓  
№6 ✓  
№7 ✓  
№8 ...

