0 884767 510008

88-47-67-51

(124.28)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 6

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Галась Леонида Михайловича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«29» марта 2026 года

Подпись участника

88-47-67-51
(124.28)

75 (Семьдесят пять)

№1

2 листовых

$$\sqrt{6(1-\mathrm{ctg}^2 x)} = 4\cos x$$

$$\begin{cases} 6(1-\mathrm{ctg}^2 x) = 16\cos^2 x \\ \cos x \ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 - \frac{3\cos^2 x}{\sin^2 x} = \cancel{16}\,8\cos^2 x \\ \cos x \ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3\sin^2 x - 3\cos^2 x - 8\cos^2 x\sin^2 x}{\sin^2 x} = 0 \\ \cos x \ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{-3\cos 2x - 2\sin^2 2x}{\sin^2 x} = 0 \\ \cos x \ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{-3\cos 2x - 2(1-\cos^2 2x)}{\sin^2 x} = 0 \\ \cos x \ge 0 \end{cases}$$

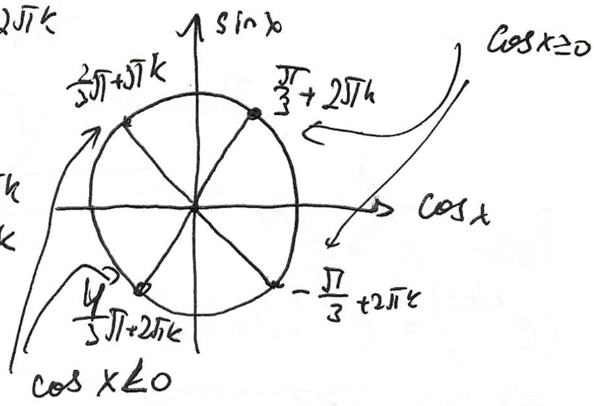
$$\begin{cases} \frac{2\cos^2 2x - 3\cos 2x - 2}{\sin^2 x} = 0 \\ \cos x \ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2(\cos 2x + \frac{1}{2})(\cos 2x - 2)}{\sin^2 x} = 0 \\ \cos x \ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos 2x = -\frac{1}{2} \\ \sin x \ne 0 \\ \cos x \ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 2x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \\ 2x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k \end{array}\right. \\ \sin x \ne 0 \\ \cos x \ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + \pi k \\ x = -\frac{\pi}{3} + \pi k \end{array}\right. \\ \sin x \ne 0 \\ \cos x \ge 0 \end{cases}$$



4

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k \end{array}\right.$

Чистовик

№2

$S(x)$ – сумма цифр числа x

$x \vdots S(x) = 9k \Rightarrow x = S(x) \cdot 9k \Rightarrow x \vdots 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow S(x) \vdots 9 \Rightarrow S(x) = 9m \Rightarrow x = 9m \cdot 9k = 81mk \Rightarrow$

$\Rightarrow x \vdots 81 \Rightarrow$ В множество A должны входить

Трёхзначные числа делящиеся на 81: $\underline{162}$, $\underline{243}$, $\underline{324}$, $\underline{405}$, $\underline{486}$, 567, $\underline{648}$, 729, $\underline{810}$, 891, $\underline{972}$. Из этих чисел нам подходят

Только: 162, 243, 324, 405, 486, 648, 810, 972 (т.к 567, 729, 891 ⋮ 18)

Получается: $162 + 648 + 972 = 1782$

№8

$a > 0$
$x > 0$
$a \neq 1$
$x \neq 1$

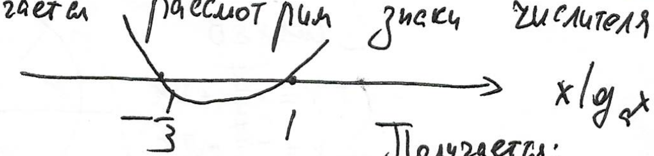
$$3x^2 \log_a x - \log_x a - 2x \leq 0$$

$$3x^2 \log_a x - \frac{1}{\log_a x} - 2x \leq 0$$

$$\frac{3x^2 \log_a^2 x - 2x \log_a x - 1}{\log_a x} \leq 0$$

$$\frac{3(x \log_a x - 1)(x \log_a x + \frac{1}{3})}{\log_a x} \leq 0$$

Получается рассмотрим знаки числителя:



Получается:

$x \log_a x = 1 \Rightarrow x^x = a$

$x \log_a x = -\frac{1}{3} \Rightarrow x^x = \frac{1}{a^3}$

Расс. $x^x = e^{x \ln x}$

$(e^{x \ln x})' = e^{x \ln x} \cdot (1 + \ln x) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ при $x > \frac{1}{e}$ → произв > 0

$< \frac{1}{e}$ → произв < 0

$= \frac{1}{e}$ произв $= 0$

(только если $a \neq \frac{1}{e}$, $\frac{1}{a^3} \neq \frac{1}{e} \Rightarrow a \neq \sqrt[3]{e}$)

$\Downarrow$

$\left[\begin{array}{l} x^x = a \\ x^x = \frac{1}{a^3} \end{array}\right.$ – имеет 3 корня при $a > 0$, $a \neq 1$

Получается, что 2 из них $(x_1; x_2) < 1$, один $x_3 > 1$

Чистовик №8 (продолжение)

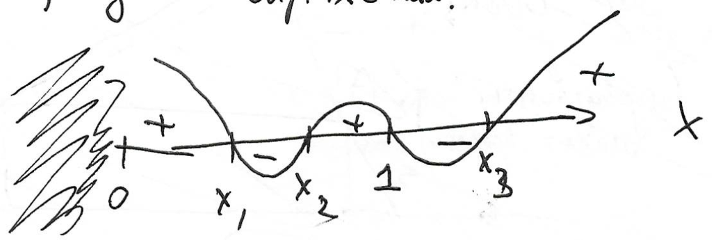
А знаки для $\log_a x$, если $a<1$, то при $x<1$, $\log_a x>0$

$x>1$, $\log_a x<0$

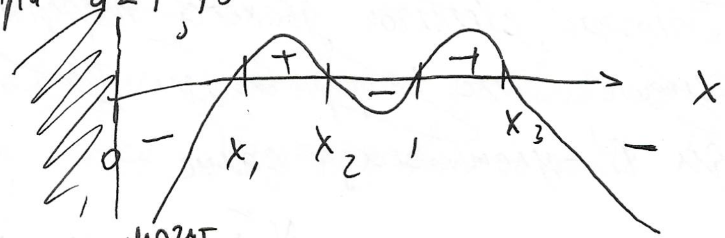
$a>1$, то $x<1$, $\log_a x<0$

$x>1$, $\log_a x>0$

При $a>1$, то знаки выражения:

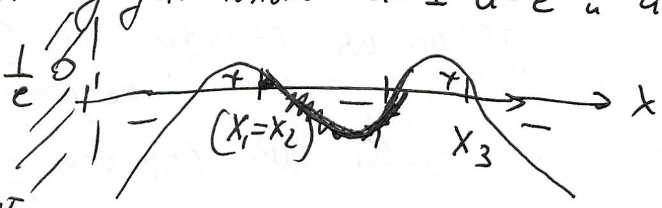


при $a<1$, то

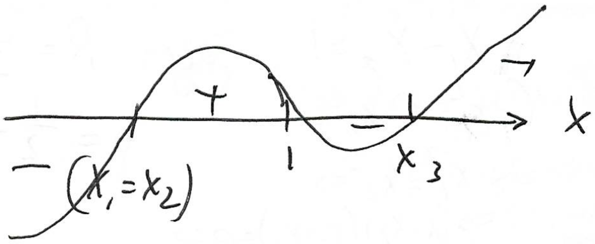


Получается нам могут подходить только ~~a>1~~ $a=\frac{1}{e}$ и $a=\sqrt[3]{e}$

$a=\frac{1}{e}$
↓
не подходит



$a=\sqrt[3]{e}$
↓
не подходит



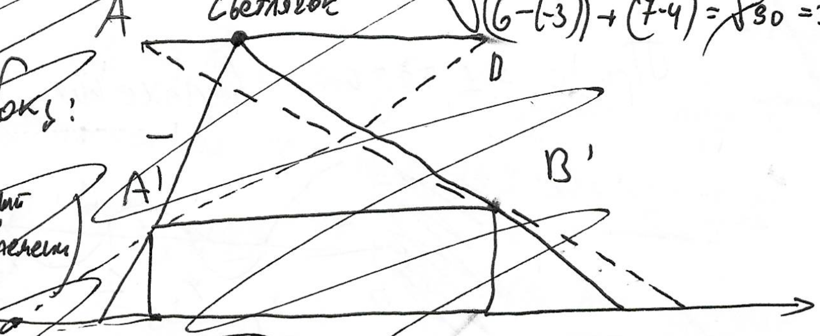
Ответ: нет таких a

Черновик

~~N 6~~

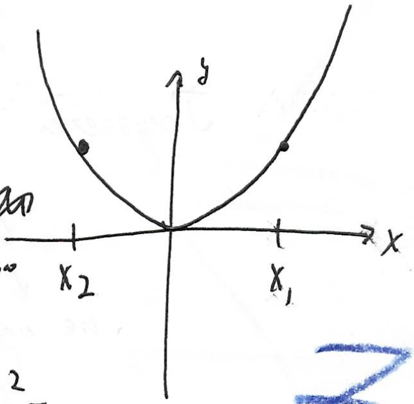
~~A $(-3;4)$, B $(6;7)$ => длина забора $\sqrt{(6-(-3))^2+(7-4)^2}=\sqrt{90}=3\sqrt{10}$~~

~~Вид сбоку: (произвольный момент времени)~~



~~Получается, светлячок движется непрерывно, а значит и „затемнение" тоже непрерывно, для точки A' оно увеличивается, а для B' - уменьшается, а самые~~

N 5



Рассмотрим параболу $y=Cx^2$, с центром координат в точке касания с окружностью

Из условия мы понимаем, что

$x_1-x_2=1$, тогда $R=\frac{1}{2}-Cx_1^2=$

$C x_1^2=Cx_2^2=$ $\qquad =\frac{1}{2}-\frac{C}{4}$

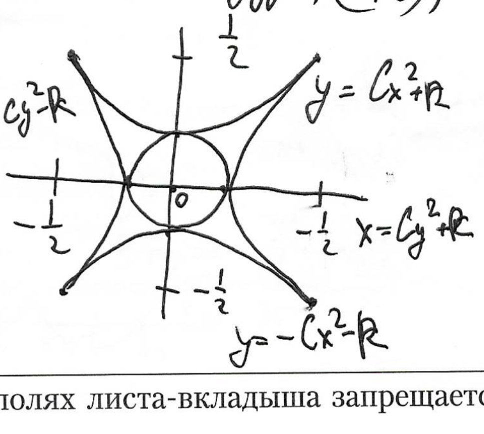
$\Rightarrow x_1^2=x_2^2\Rightarrow$

$\Rightarrow (x_1-x_2)(x_1+x_2)=0\Rightarrow$

$\Rightarrow x_1+x_2=0\Rightarrow x_1=\frac{1}{2},\ x_2=-\frac{1}{2}$

Ответ: $\frac{1}{2}-\frac{C}{4}$

Аналогично делаем для остальных парабол, получается, что если вести базис с центром координат в центре окружности, то координаты точек будут: $(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$; $(\frac{1}{2};-\frac{1}{2})$; $(-\frac{1}{2};\frac{1}{2})$; $(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2})$



$y=Cx^2+R$

~~$x=Cy^2+R$~~

~~$x-y=C(y-x)(x+y)$~~

~~$(C(x+y)+1)(y-x)=0\Rightarrow y=x$~~

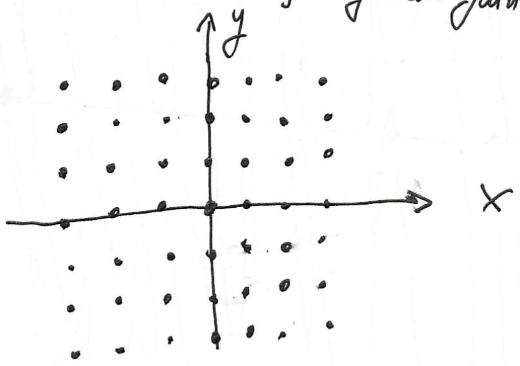
~~$\Rightarrow y=-\frac{1}{c}-x$~~

88-47-67-51 (124,28)

Чистовик

№3

Так как стороны треугольника (катеты) параллельны* осям, то получаемые Δ-ки лежат в пл-тях O_{xy}, O_{xz}, O_{yz} и их сдвиги. В силу симметрии нам достаточно посчитать кол-во Δ-ков в 1 пл-ти, а затем умножить на их кол-во. $(\underbrace{7+7+7}_{=21})$



Выбираем произвольную точку 49 способами, и точку, которая не лежит на той же абсциссе или ординате, 36 способов.

$\frac{49\cdot 36}{2}$ (пары 1,2 и 2,1 посчитали, а они одинаковы)

Такие пары образуют прямоугольник, где всего можно сделать 2 прямоугольных Δ-ка. Получается всего Δ-ков: $\frac{49\cdot 36}{2}\cdot 2 = 49\cdot 36$

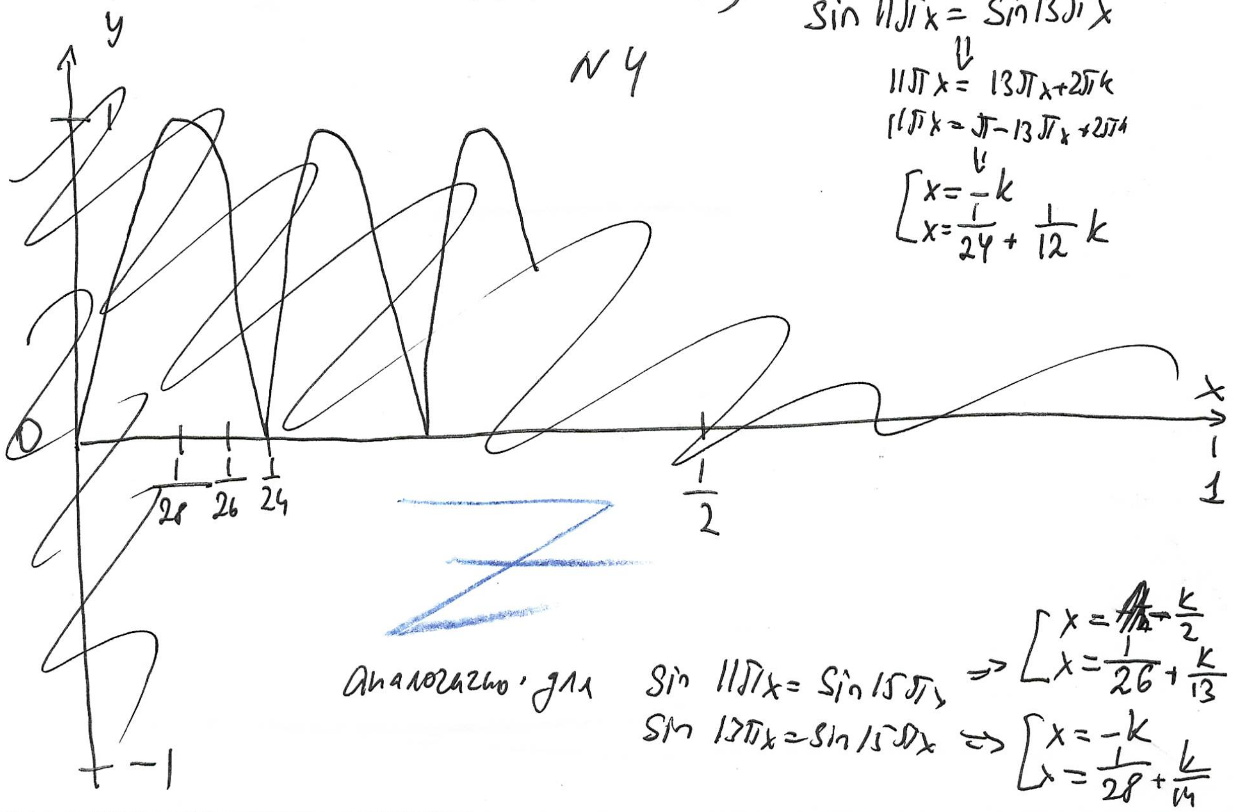
Тогда для всех 21 пл-тей: $49\cdot 36\cdot 21$

Ответ: $49\cdot 36\cdot 21$

* (Это так, т.к пл-ть треугольника содержит прямые, которые пересек. параллельны O_x, O_y или O_z (паре) и они ⊥-ны => пл-ти параллельны O_{xy}, O_{yz} или O_{xz})

№4

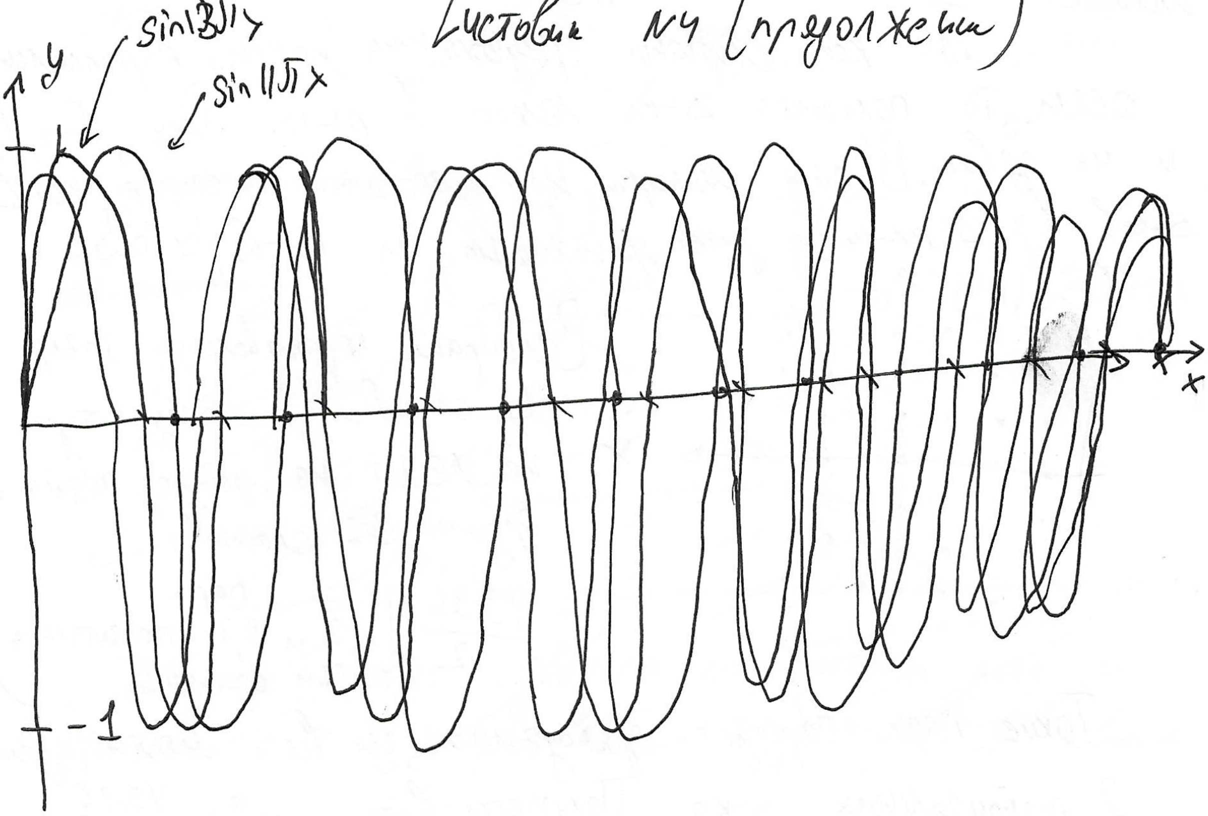
$\sin 11\pi x = \sin 13\pi x$
$\Updownarrow$
$11\pi x = 13\pi x + 2\pi k$
$11\pi x = \pi - 13\pi x + 2\pi k$
$\Updownarrow$
$\left[\begin{array}{l} x = -k \\ x = \frac{1}{24} + \frac{1}{12}k \end{array}\right.$



аналогично для $\sin 11\pi x = \sin 15\pi x \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{k}{2} \\ x = \frac{1}{26} + \frac{k}{13} \end{array}\right.$

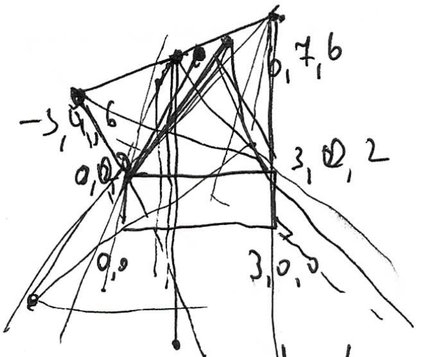
$\sin 13\pi x = \sin 15\pi x \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -k \\ x = \frac{1}{28} + \frac{k}{14} \end{array}\right.$

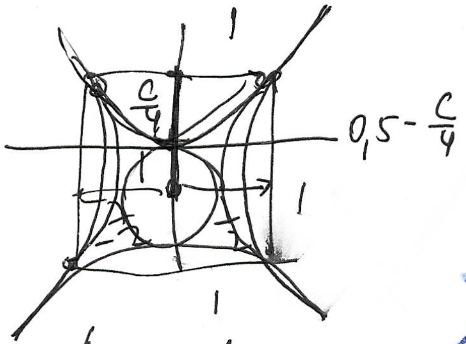
Листовик №4 (продолжение)

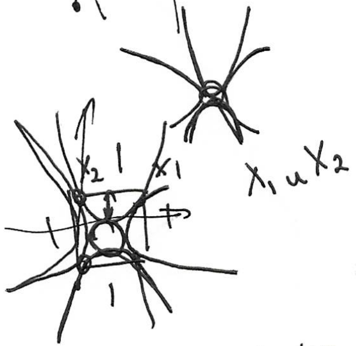


Точек пересечения: $11+12+13=36$
$1+1+2$ $= 40 \Rightarrow 40$ областей

Черновик







$\cancel{f}x_1^2 = \cancel{c}x_2^2$

$x_1 - x_2 = 1$ $x_1 + x_2 = 0$

$x_1 = \frac{1}{2}$

$x_2 = -\frac{1}{2}$

$C_4 x.$

$x+y = Cx^2 + \cancel{R} - Cy^2 - \cancel{R}$

$y = Cx^2 + R$ $y - Cx^2 + R = 0$

$x = Cy^2 + R$ $x - Cy^2 + R = 0$

$C(x-y)(\cancel{x+1})$ $\frac{1}{2} - C\frac{1}{4}$

$C(x-y)(x+y) = (x-y)$

$x-$

$(C(x-y)-1)(x+y) = 0$

$(C(x+y)-1)(x-y) = 0$

$y - Cx^2 + \cancel{R} = x^2 - Cy^2 + \cancel{R}$

$C(x-y) - 1 = 0$

$Cy^2 - Cx^2 = x - y$

$y = x$ $y = \frac{1}{C} - x$

$C(x+y)(y-x) = x - 1)$

$Cx + Cy = 1$

$Cx - Cy - 1 = 0$

$(C(x+y)+1)(y-x) = 0$

$y = -x + \frac{1}{C}$

$Cy = Cx - 1$

$y = x - \frac{1}{C}$

$x = -\frac{1}{C}$

$Cx + Cy + 1 = 0$

$Cy = 1 - Cx$

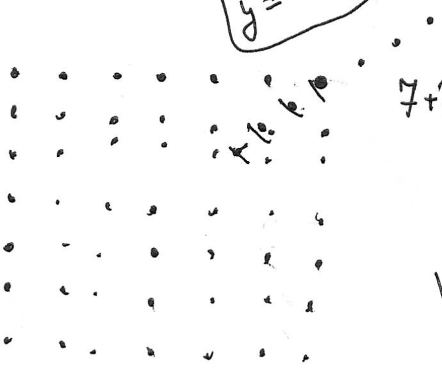
$y = \frac{1}{C} - x$

$\frac{1}{15}$ $\frac{3}{15}$ $\frac{1}{11}$

$\frac{3}{11}$ $\frac{5}{15}$

$\frac{5}{11}$ $\frac{7}{15}$

$\frac{7}{11}$ $\frac{9}{15}$



$7+7+7$

$\frac{49 \cdot (45-13)}{2} \cdot 2$

Черновик

$11x=13x+2k$ $\quad -2x=2k \Rightarrow x=-k$

$11x=1-13x+2k$ $\quad 24x=1+2k \Rightarrow x=\frac{1}{24}+\frac{k}{12}$ $\quad \frac{11}{7}$ $0\le k\le 11$

$k=0$

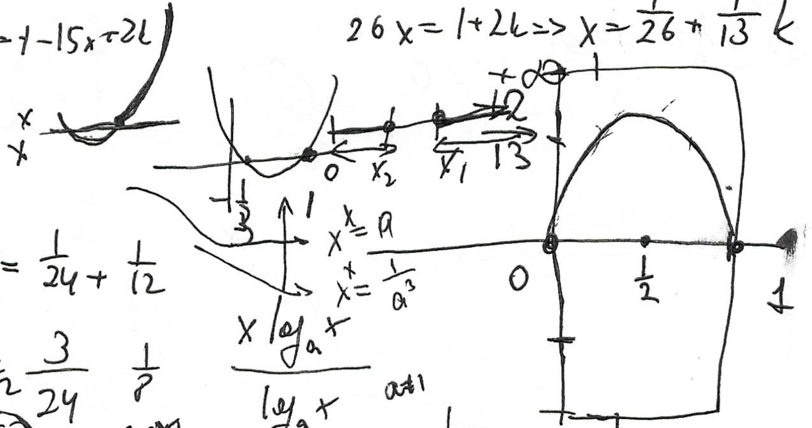
$13x=15x+2k$ $\quad -2x=2k \Rightarrow x=-k$

$13x=1-15x+2k$ $\quad 28x=1+2k \Rightarrow x=\frac{1}{28}+\frac{1}{14}k$ $\quad \frac{13}{14}$ $0\le k\le 13$

$11x=15x+2k$ $\quad -4x=2k \Rightarrow x=-\frac{k}{2}$

$11x=1-15x+2k$ $\quad 26x=1+2k \Rightarrow x=\frac{1}{26}+\frac{1}{13}k$ $\quad 0\le k\le 12$

$(x\ln x)'=1+\ln x$



$e^{x\ln x}(1+\ln x)$

e^{ax} $\quad 1+\ln x$ $\quad x=\frac{1}{e}$

$k=\frac{1}{24}+\frac{1}{12}$

$x^x=a$

$x^x=\frac{1}{a^3}$

$\frac{x\log_a x}{\log_a x}$ $\quad a\ne 1$

$a>0$
$x<0$

$\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \frac{3}{24}$ $\quad \frac{1}{8}$

$\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{1}{4}$ $\sqrt[4]{\frac{1}{4}}=\frac{1}{\sqrt[4]{4}}$ $\quad \frac{22}{24}$ $\quad \frac{23}{24}$

$\frac{2}{13}$ $\quad \frac{1}{11}$ $\quad (e^{x\ln x})'$

13 22

1 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 $\quad 11\cap 93$

1 $\quad$ 25 27

$x^x=(e^{\ln x\cdot x})'$

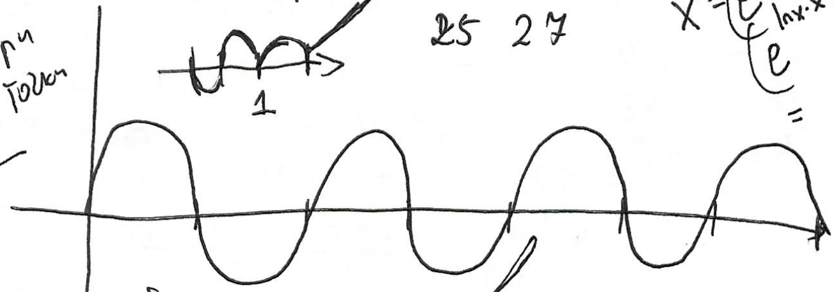
$(e^{\ln x\cdot x})'=$

=

Три точки

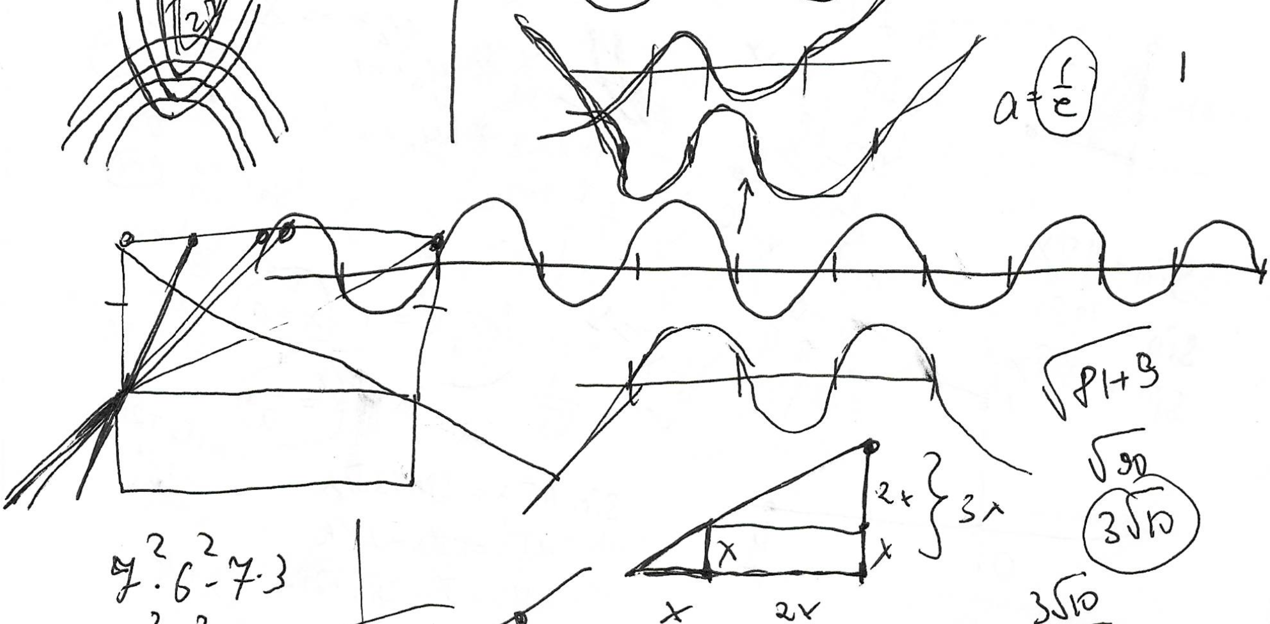
$\frac{1}{e}$

1



$a=\frac{1}{e}$

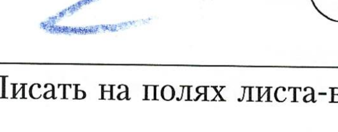
1



$\sqrt{81+9}$

$\sqrt{90}$

$3\sqrt{10}$



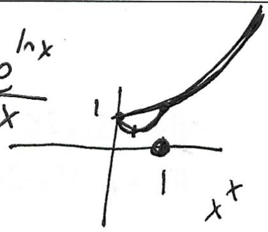
$7^2\cdot 6^2-7\cdot 3$

$7^3\cdot 6^2\cdot 3$

$(3;9)$ $\quad \frac{3\sqrt{10}}{2}$

Черновик

$e^{\ln x}$ $\quad \frac{\cos}{\sin}$ $\quad \sqrt{6\left(1-\left(\frac{\cos}{\sin}\right)^2\right)} = 4\cos x$ $\quad e^{\ln x}\cdot\frac{1}{x} = \frac{e^{\ln x}}{x}$



$\ln x\, e^{\ln x - 1}$ $\quad : 9$

$x^+ = 1$ $\quad x^+$

$a : S(a) = 9k \Rightarrow$

$\Rightarrow a : 9$

$\sqrt{6\left(\frac{\sin^2 - \cos^2}{\sin^2}\right)}$

$\cos x > 0$

$x \log_a x = 1$

$e^{\ln a}$ $\quad x^x = a$ $\quad (e^{ax})' = a e^{ax}$

$a = 9$

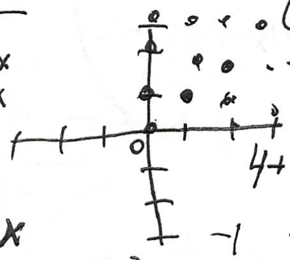
$3x^2\log_a x - \frac{1}{\log_a x} - 2x \le 0$

$-\cos 2x = \sqrt{\frac{1-2\cos^2 x}{\sin x}}$

$\Rightarrow a : 81$

$\frac{3x^2\log_a^2 x - 2x\log_a x - 1}{\log_a x} \le 0$

$(e^{\ln x})' = e^{\ln x}(\ln x)' = e^{\ln x}\cdot\frac{1}{x}$



162 $\quad$ 1

243 $\quad$ 2

324 $\quad$ 3

405 $\quad$ 4 $\quad$ 891

486 $\quad$ 5 $\quad$ 81

~~567~~ $\quad$ 972

648 $\quad$ 6

~~729~~

810 $\quad$ 7

~~891~~

972 $\quad$ 8

$6\left(1-\frac{\cos^2}{\sin^2}\right) = 16\cos^2 x$ $\quad e^{x\ln x}$ $\quad (e^{\ln x})^x$

$4 + 4\cdot 3 = 16$

$3\,\frac{\sin^2 - \cos^2}{\sin^2} = 8\cos^2 x$

$\frac{2\pm4}{6} = 1$ $\quad -1$

$x e^{\ln x\cdot x}$

$3t^2 - 2t - 1 \le 0$ $\quad \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$

$(t-1)(t+\frac{1}{3})$

$\frac{3\sin^2 - 3\cos^2 - 8\cos^2\sin^2}{\sin^2} = 0$

~~$3 - 6\cos^2 x$~~

$t - \frac{2}{3}t - \frac{1}{3}$ $\quad 3(\frac{1}{3}) - 2(\frac{1}{3}) - 1$

$-1 + \frac{2}{3} - 1 = 0$

$\frac{-3\cos 2x + 2\sin^2 2x}{\sin^2 x}$

$2x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ $\quad \frac{1}{3} + \frac{2}{3}$

$x = \frac{\pi}{6} + \pi k$

$162 + 648 + 972$

$2(1-\cos^2 2x)$

$60 \Rightarrow 30$ $\quad \Rightarrow$

$x = -60$ $\quad -30$

648 $\quad$ 810

162 $\quad$ 872

710 $\quad$ 1682

$-2t - 3t + 2 = 0$

$x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$

$2t + 3t - 2 = 0$

$\cos 2x = \frac{1}{2}$

$9 + 4\cdot 4 = 25$

$= -\frac{1}{3}$

650

970

1620

$\frac{-3\pm5}{4} \Rightarrow -2;\ \frac{1}{2}$

$x\log_a x = 1$

$-\frac{1}{3}$ $\quad 1$

$\log_a x$

$\log_a x \Rightarrow x<1\ a>1$

$a<1$ $\quad x>1$

$(x>0)$

$x\log_a x = 1$

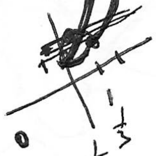
$x \ne 1$

$x\log_a x = -\frac{1}{3}$

1620

162

1782 $\quad (e^{\ln x})^x$



$e^{x\ln x}$ $\quad x \to 0$

$\frac{1}{3}$ $\quad \frac{1}{3}$ $\quad \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$

$a > 1$

$\log_a x > 0$ $\quad < 0$

$x > 1$

$\cdot\ (\ \ )$

$e^{\ln x\cdot x}$

$\sin = 11\pi x$

$\sin = 13\pi x$

$\sin = 15\pi x$

$x \to 0$

$x = 1$

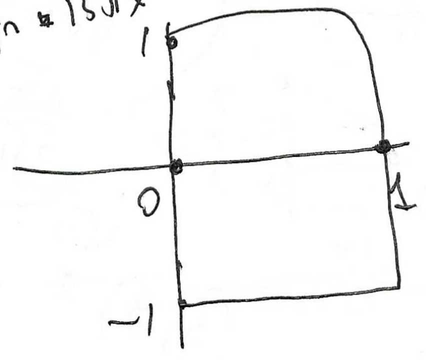
$\ln x$

$x \to 0$

$\log_a x^x = 1$ $\quad x^x = a$ $\quad e^{x\ln x} = e^{\ln a}$

$\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$

$x^x = \frac{1}{a^3}$



$11 = 15x + 2\pi k$

$-4x = 2\pi k$

$x = -\frac{\pi}{2}k$

$\sin 11\pi x = \sin 13\pi x$

$11\cancel{\pi}x = 13\cancel{\pi}x + 2\cancel{\pi}k$

$11\cancel{\pi}x = \cancel{\pi} - 13\cancel{\pi}x + 2\cancel{\pi}k$ $\quad x = k$

$11x = 13x + 2k \Rightarrow -2x = 2k$

$11x = 1 - 13x + 2k$ $\quad 24x = 1 + 2k$

$x = \frac{1}{24} + \frac{k}{12}$