Выход 12^{56} – 12^{52}

0 671223 870000

67-12-23-87
(124.31)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 1

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Горбузова Кирилла Аркадьевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«29» марта 2026 года

Подпись участника

85 (Восемьдесят пять)

67-12-22-87 (124.31)

Чистовик

№1

$\sqrt{6(1-tg^2x)} = 4\sin x$ $\quad \begin{cases} \sin x \geq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases}$ усл.1

$6(1-tg^2x) = 16\sin^2 x$

т.к. $1+tg^2x = \frac{1}{\cos^2x}$, то $tg^2x = \frac{1}{\cos^2x} - 1$

$6(1-\frac{1}{\cos^2x}+1) = 16\sin^2x \quad |\cdot\cos^2x \neq 0$

$3(2\cos^2x-1) = 8\sin^2x\cdot\cos^2x$

$3\cos2x = 2(2\sin x\cos x)^2$

$3\cos2x = 2\sin^2 2x$

$3\cos2x = 2(1-\cos^2 2x)$

пусть $\cos2x = t$, тогда

$3t = 2-2t^2$

$2t^2+3t-2=0$

$D = 9-4\cdot2(-2) = 9+16 = 25$

$t = \frac{-3\pm5}{4}$

$\left[\begin{array}{l} t=-2 \\ t=\frac{1}{2} \end{array}\right.$, $\quad \left[\begin{array}{l} \cos2x=-2 \ (1) \\ \cos2x=\frac{1}{2} \ (2) \end{array}\right.$

(1) $\cos2x = -2$

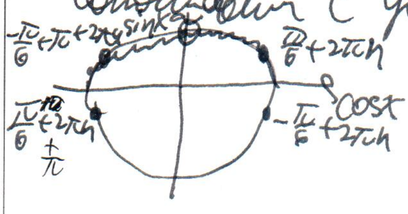
нет решений, т.к. $\cos2x \in [-1;1]$

(2) $\cos2x = \frac{1}{2}$

$2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n\in Z$

$x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$

сопоставим с усл. 1



тогда подходят 2 серии точек

$\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{6}+2\pi n, n\in Z \\ x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k, k\in Z \end{array}\right.$

Ответ: $x=\frac{\pi}{6}+2\pi n, n\in Z$; $x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k, k\in Z$

Чистовик

№2

пусть $\overline{abc}$ – искомое число, тогда

$\frac{\overline{abc}}{a+b+c}=9k$, $k\in\mathbb{Z}$

$\overline{abc}=9(a+b+c)k$

правая часть $\vdots 9 \Rightarrow \overline{abc}$ тоже $\vdots 9$, но тогда по равносильности числа $\overline{abc}$ и $a+b+c$ по модулю 9 $a+b+c$ тоже $\vdots 9$, тогда правая часть $\vdots 81 \Rightarrow \overline{abc} \vdots 81$ следовательно все такие трёхзначные числа:

162
243
324
405
486
567
648
729
810
891
972

$\frac{162}{1+6+2}=\frac{162}{9}=18=2\cdot 9$ – подходит

$\frac{243}{2+4+3}=\frac{81\cdot 3}{9}=9\cdot 3$ – подходит

$\frac{324}{3+2+4}=\frac{81\cdot 4}{9}=9\cdot 4$ – подходит

$\frac{405}{4+5+0}=\frac{81\cdot 5}{9}=9\cdot 5$ – подходит

$\frac{486}{4+8+6}=\frac{81\cdot 6}{18}=9\cdot 3$ – подходит

$\frac{567}{5+6+7}=\frac{81\cdot 7}{18}=\frac{9\cdot 7}{2}$ – не подходит, т.к. не целое

$\frac{648}{6+4+8}=\frac{81\cdot 8}{18}=9\cdot 4$ – подходит

$\frac{729}{7+2+9}=\frac{81\cdot 9}{18}=\frac{9\cdot 9}{2}$ – не подходит, т.к. не целое

$\frac{810}{8+1+0}=\frac{81\cdot 10}{9}=9\cdot 10$ – подходит

$\frac{891}{8+9+1}=\frac{81\cdot 11}{18}=\frac{9\cdot 11}{2}$ – не подходит, т.к. не целое

$\frac{972}{9+7+2}=\frac{81\cdot 12}{18}=9\cdot 6$ – подходит

Таким образом подходят: 162, 243, 324, 405, 486, 648, 810, 972

$S=243+486+810=729+810=1539$

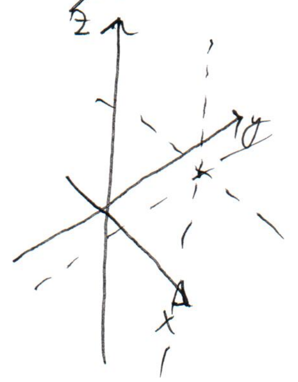
Ответ: 1539.

Чистовик

№3

~~Сначала~~ Всего точек у нас: ~~...~~ по каждой координате может быть $-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4$ — 9 вариантов. Тогда всего точек $9^3=729$.

Сначала выберем вершину равнобедр. треуг. с прямым углом. Её можно выбрать 729 способами. Далее, чтобы катеты были параллельны одной из осей, нужно выбирать точки для оставшихся вершин на прямых, проходящих через выбранную точку, которые параллельны осям. На каждой такой прямой будет ещё по 8 точек. Тогда ~~всего~~ выбрать 2 из 24 них можно C_{24}^2 способами, но мы также посчитали ~~...~~ варианты, когда эти 2 точки лежат на одной прямой, поэтому их надо вычесть для каждой оси также пар C_8^2.



Тогда всего способов будет равно $729\cdot(C_{24}^2-C_8^2-C_8^2-C_8^2)=$

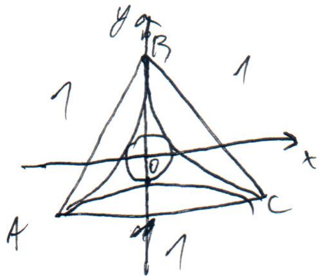
$=729\left(\frac{24\cdot23}{2}-3\cdot\frac{8\cdot7}{2}\right)=729\cdot(12\cdot23-12\cdot7)=729\cdot12(23-7)=$

$=729\cdot12\cdot16=729\cdot192=139968$

Полученные треуг. прямоугольные, т.к. углы между осями равны 90°, а мы ведём их параллельно осям.

Ответ: 139968 прямоуг. треуг.

№5



Введём декартову систему ~~к~~ координат ~~...~~ с центром O в центре окр. Пусть вершины треуг. — A, B, C. Найдём их координаты

Введём систему координат так, что ось абсцисс $\parallel AC$. Тогда заметим, что ось ~~...~~ ординат — высота в $\triangle ABC$, который равносторонний $\Rightarrow h=AB\cdot\sin 60^\circ=1\cdot\frac{\sqrt3}{2}=\frac{\sqrt3}{2}$.

Также заметим, что если мы будем поворачивать картинку

Чистовик

№5 (продолжение) / вокруг O

на 120° по часовой или против часовой стрелки, то при вращении относительно на месте (только вершины поменяются местами, а со- на которые треуг. останется на месте). тогда оно будет переходить в другую вершину треуг. => O — центроид △ABC, а т.к. △ABC — равносторонний, то O — точка пересечения медиан => O делит её медиану (и соответственно высоту, т.к. △ABC — равносторонний) в отношении $\frac{2}{1}$.

Тогда расстояние от O до AC равно $\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{3}}{6}$

Тогда т.к. A и C симметричны отн. оси ординат и $AC=1$, то A и C имеют такие координаты $A(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{6})$, $C(-\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{6})$

будем считать, что c — коэф. при x^2 >0, тогда уравнение нижней — $y=cx^2-r$, где r — радиус окр. Мы сдвинули на r вниз, т.к. вершина параболы проходит через т. $(0;-r)$.

Тогда парабола проходит через т. A => $-\frac{\sqrt{3}}{6}=-c(\frac{1}{2})^2-r$.

$r=\frac{\sqrt{3}}{6}-\frac{c}{4}$, $c>0$

если $c=0$, то парабола не будет параболой;

если $c<0$, то $y=cx^2-r$, откуда $-\frac{\sqrt{3}}{6}=c(\frac{1}{2})^2-r$

$r=\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{c}{4}$, $c<0$

тогда можно сказать, что $r=\frac{\sqrt{3}}{6}-\frac{|c|}{4}$

чтобы окр. существовала, нужно, чтобы $r>0$, тогда

$\frac{\sqrt{3}}{6}-\frac{|c|}{4}>0$

$|c|<\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$-\frac{2\sqrt{3}}{3}<c<\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Ответ: $r=\frac{\sqrt{3}}{6}-\frac{|c|}{4}$, при $c\in(-\frac{2\sqrt{3}}{3};0)\cup(0;\frac{2\sqrt{3}}{3})$.

Чистовик

№3

ОДЗ:
$$\begin{cases} a>0 \\ x>0 \\ a\ne1 \\ x\ne1 \end{cases}$$

$8x^2\log_a x-\log_x a-2x\le0$

$8x^2\log_a x-\frac{1}{\log_a x}-2x\le0$

Неравенство
№ 3 (продолжение)

$$\frac{8x^2\log_a^2 x - 2x\log_a x - 1}{\log_a x} \le 0$$

$$\frac{8\left(x\log_a x - \frac{1}{2}\right)\left(x\log_a x + \frac{1}{4}\right)}{\log_a x} \le 0$$

$$\frac{\left(\log_a x^x - \frac{1}{2}\right)\left(\log_a x^x + \frac{1}{4}\right)}{\log_a x - 0} \le 0$$

по методу рационализации

$$\frac{(a-1)\left(x^x - a^{\frac{1}{2}}\right)(a-1)\left(x^x - a^{-\frac{1}{4}}\right)}{(a-1)(x-1)} \le 0$$

пусть $a^{\frac{1}{4}} = b$, $b > 0$, $b \ne 1$, тогда

$$\frac{(b^4-1)\left(x^x - b^2\right)\left(x^x - \frac{1}{b}\right)}{x-1} \le 0$$

исследуем функцию $f(x) = x^x$, $x > 0$

$f'(x) = (x^x)' = \left(e^{\ln x^x}\right)' = \left(e^{x\ln x}\right)' = e^{x\ln x}\left(\ln x + \frac{x}{x}\right) = x^x(\ln x + 1)$

$f'(x) = 0$

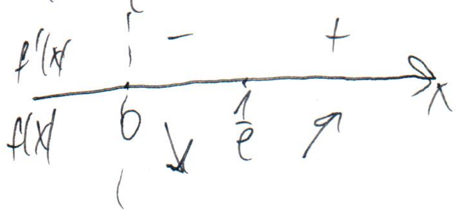
$x^x(\ln x + 1) = 0$

т.к. $x^x > 0$, т.к. $x > 0$, то перейдем обе части на x^x

$\ln x + 1 = 0$

$\ln x = -1$

$x = \frac{1}{e}$

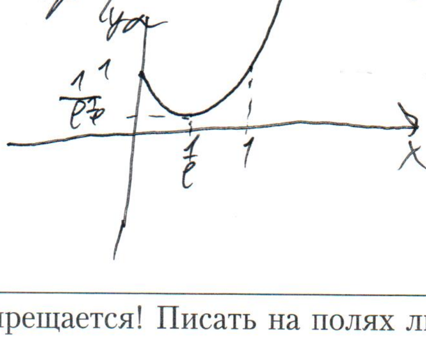


значит $x = \frac{1}{e}$ – т. мин,

тогда $f(x) \ge f\left(\frac{1}{e}\right) = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}} = e^{-\frac{1}{e}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{e}}}$

тогда т.к. $\lim\limits_{x \to 0^+} x^x = 1$, то

график $f(x)$ выглядит так



Исследуем [illegible]

тогда решим нер-во при различных $b>0$.

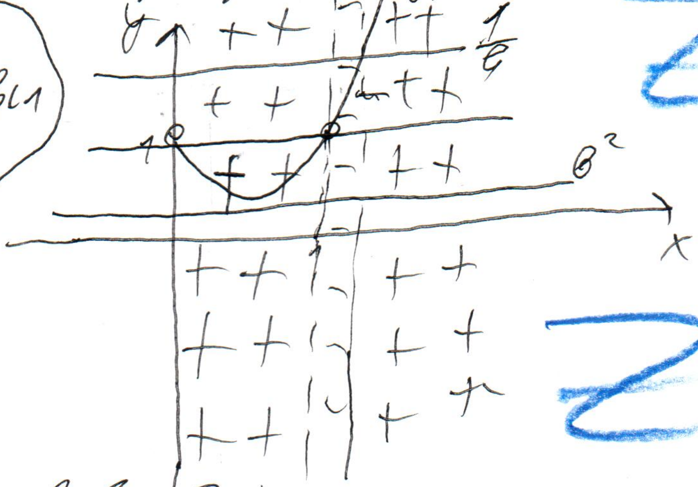
~~[illegible]~~ в стороне при $b<1$

I $b^2 < \frac{1}{e^{\frac{1}{e}}}$, тогда $b < \frac{1}{e^{\frac{1}{2e}}}$, т.к. $b>0 \Rightarrow \frac{1}{b} > e^{\frac{1}{2e}} > 1$, т.к. $\frac{1}{2e}>0$.

тогда заверим [illegible] на графике $\frac{1}{b}$, b^2 и $y=1$

при $b<1$, $b^4<1 \Rightarrow b^4-1<0$, тогда нер-во выглядит так при $b<1$

$$\frac{(x^x-b^2)(x^x-\frac{1}{b})}{x-1} \ge 0 \quad (1)$$

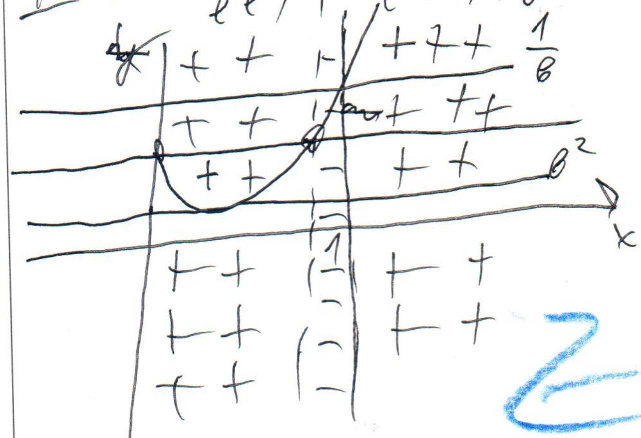


~~[illegible]~~

Отметим + и −, места, где нер-во имеет такой знак

тогда $x\in(0;1)\cup[x_0;+\infty)$, где $x_0^{x_0}=\frac{1}{b}$ — не подходит под условие

II $b^2=\frac{1}{e^{\frac{1}{e}}}$, $b=\frac{1}{e^{\frac{1}{2e}}}$, $\frac{1}{b}=e^{\frac{1}{2e}}>1$

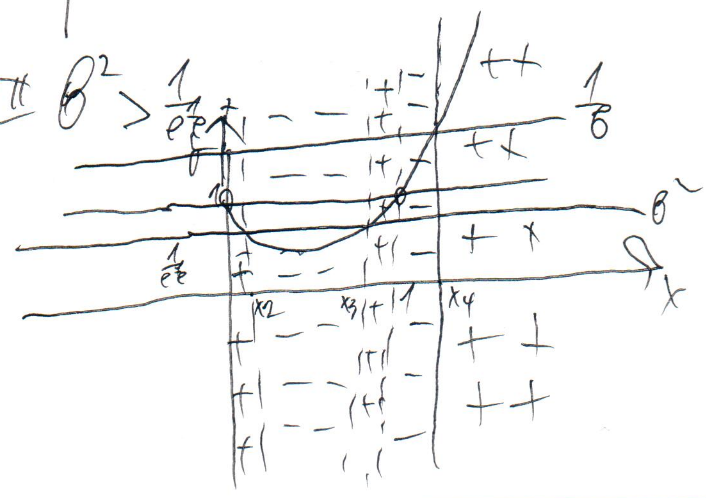


тогда отметим знаки нер-ва (1)

тогда $x\in(0;1)\cup[x_1;+\infty)$, где $x_1^{x_1}=\frac{1}{b}=e^{\frac{1}{2e}}$

не подходит под условие

III $b^2 > \frac{1}{e^{\frac{1}{e}}}$



тогда отметим знаки

тогда $x\in(0;x_2]\cup[x_3;1)\cup[x_4;+\infty)$ — не подходит под условие

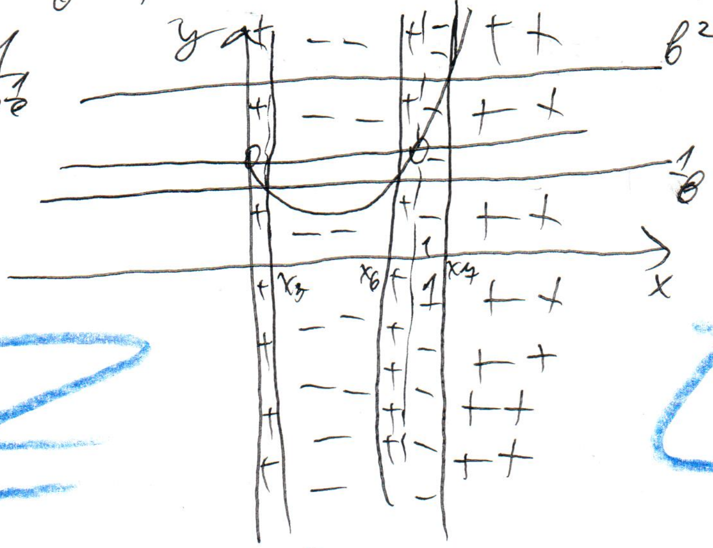
Исследование №1 (продолжение 3)

Мы рассмотрим все возможные положения прямых для $b<1$.
теперь $b>1$, тогда $b^4>1 \Rightarrow b^4-1>0$, тогда нер-во примет вид:

$$\frac{(x^x-b^2)(x^x-\frac{1}{b})}{x-1}\le 0 \quad (2)$$

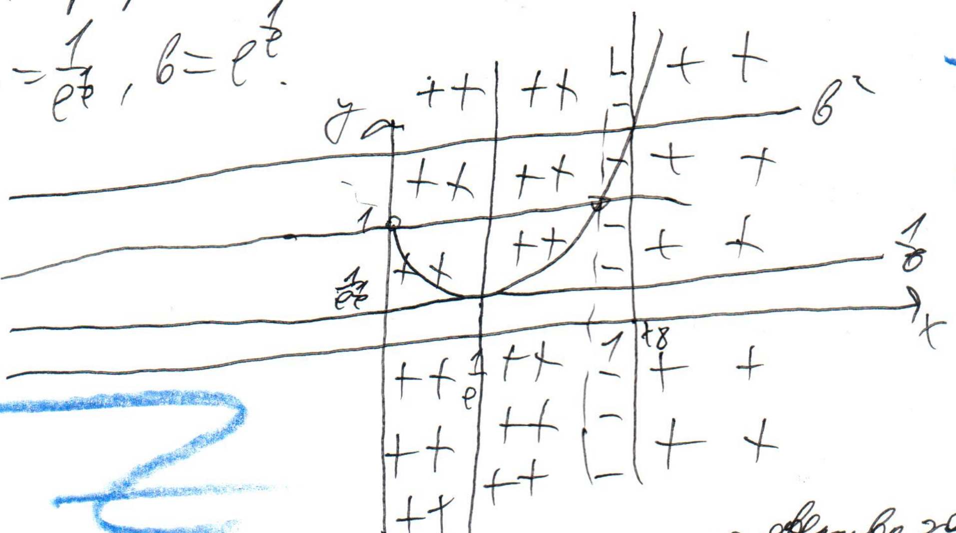
при $b>1$ $\frac{1}{b}<1$, $b^2>1$ тогда рассмотрим случаи

IV $\frac{1}{b}>\frac{1}{e^{\frac{1}{e}}}$



расставим знаки нер-ва
нам подходят $x\in[x_5;x_6]\cup(1;x_7]$ — не подходят под условие

V $\frac{1}{b}=\frac{1}{e^{\frac{1}{e}}}$, $b=e^{\frac{1}{e}}$.

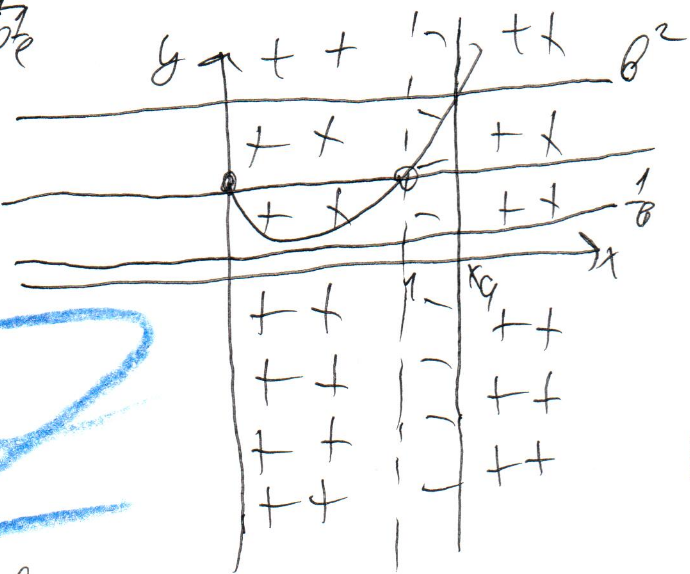


тогда заметим, что при $x=\frac{1}{e}$ наше ~~нер-во будет равно~~ подкоренное значение,
тогда $x=\frac{1}{e}$ — его решение при $b=e^{\frac{1}{e}}$, тогда
$x\in\{\frac{1}{e}\}\cup(1;x_8]$ — подходит под условие задачи.

Чистовик

№8 (продолжение 4)

VI $\frac{1}{b} < \frac{1}{e^{\frac{1}{e}}}$



расставляем знаки и получаем

тогда $x \in (1; x_q]$ — не подходит под условие задачи

Мы разобрали все случаи расположения графиков при $b > 0$ и единственное b, при котором выполнилось условие задачи, равно $e^{\frac{1}{e}}$

$b = e^{\frac{1}{e}}$

делаем обратную замену

$a^{\frac{1}{4}} = e^{\frac{1}{e}}$

$\boxed{a = e^{\frac{4}{e}}}$ — это и будет единственное число a, при котором выполняется условие.

Ответ. $a = e^{\frac{4}{e}}$.

№4

Найдём x, при которых $y = \sin k\pi x = 1$

$k\pi x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$

$kx = \frac{1+4n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{1+4n}{2k}$, $n \in \mathbb{Z}$

Найдём x, при которых $\sin k\pi x = -1$

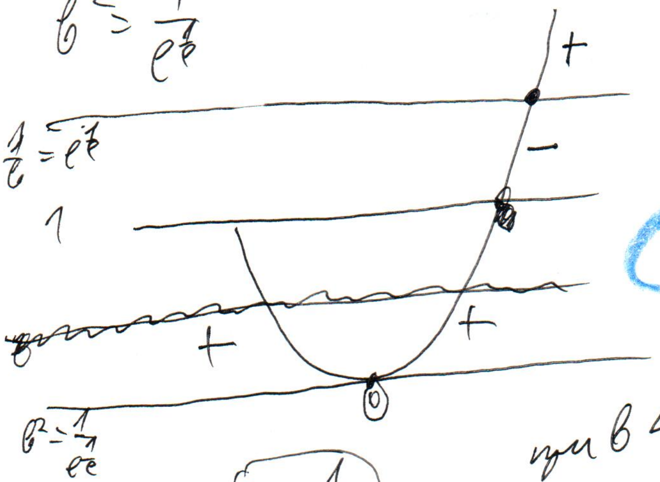
$k\pi x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$

$kx = \frac{4m-1}{2}$, $m \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{4m-1}{2k}$, $m \in \mathbb{Z}$

Черновик

$b^2 = \frac{1}{e^{\frac{1}{b}}}$

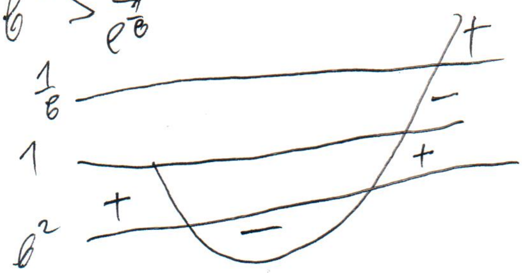


$\boxed{x = \frac{1}{b}}$

при $b < 1$

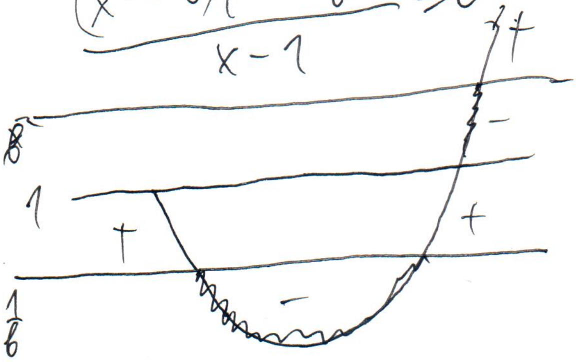
$$\frac{(x^x - \frac{1}{e^{\frac{1}{b}}})(x^x - e^{\frac{1}{b}})}{x-1} \geq 0$$

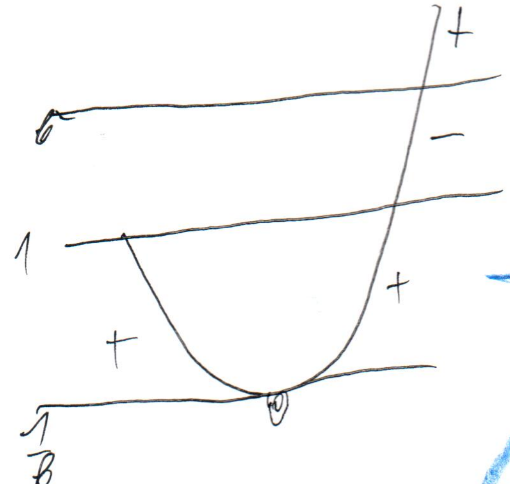
$1 > b^2 > \frac{1}{e^{\frac{1}{b}}}$



при $b > 1$

$$\frac{(x^x - b^2)(x^x - \frac{1}{b})}{x-1} \leq 0$$





Черновик

$a>0$
$x>0$
$a\neq1$
$x\neq1$

$8x^2\cdot\log_a x - \frac{1}{\log_a x} - 2x \le 0$

$\frac{1}{\log_a x}(8x^2\log_a^2 x - 2x\log_a x - 1) \le 0$

$8t^2-2t-1=0$

$D=4+4\cdot8=36$

$t=\frac{2\pm6}{16}$

$\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$

$\frac{-4}{16}=-\frac{1}{4}$

$\frac{8(x\log_a x-\frac{1}{2})(x\log_a x+\frac{1}{4})}{\log_a x}\le0$

$\frac{8(x\log_a x-\frac{1}{2})(x\log_a x+\frac{1}{4})}{(a-1)(x-1)}\le0$

$\frac{(\log_a x^x-\frac{1}{2})(\log_a x^x+\frac{1}{4})}{(a-1)(x-1)}\le0$

$\frac{(a-1)(x^x-a^{\frac{1}{2}})(a-1)(x^x-a^{-\frac{1}{4}})}{(a-1)(x-1)}\le0$

$a^{\frac{1}{4}}=b>0$

$\frac{(b^4-1)(x^x-b^2)(x^x-\frac{1}{b})}{x-1}\le0$

$y=x^x=e^{\ln x^x}=e^{x\ln x}$

$y'=e^{x\ln x}\cdot(\ln x+\frac{x}{x})=x^x(\ln x+1)$

$y(\frac{1}{e})=e^{\frac{1}{e}\cdot(-1)}=e^{-\frac{1}{e}}<e^0=1$

$1-\frac{1}{e}<0$

если $b>1$ $\frac{1}{e^{\frac{1}{e}}}$

$\frac{(b^4-1)(x-\frac{1}{e})(x-f(b^2))(x-f(\frac{1}{b}))}{(x-1)}\le0$

$f(b^2)^{f(b^2)}=b^2$

$f(\frac{1}{b})^{f(\frac{1}{b})}=\frac{1}{b}$

$x=\frac{1}{e}$

$\frac{1}{b}$

1

$-$

$+$

$+$

нет

$b<1$

$b^2<\frac{1}{e^{\frac{1}{e}}}$

$\frac{x^x-\frac{1}{b}}{x-1}\ge0$

b

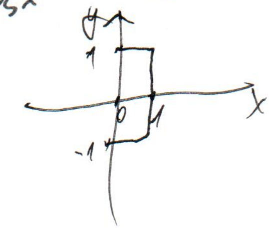
b^2

Черновик

$\sin x > 0$

$1+tg^2x=\frac{1}{\cos^2x}$

$tg^2x=\frac{1}{\cos^2x}-1$



$6(1-\frac{1}{\cos^2x}+1)=16\sin^4x$

$12\cos^2x-6=16\sin^4x\cos^2x$

$6\cos^2x-3=2\sin^2 2x$

$3\cos 2x=2\sin^2 2x$

$3\cos 2x=2-2\cos^2 2x$

$2t^2+3t-2=0$

$l=9$

$729\cdot(C_{24}^2-3\cdot C_8^2)=$

$=729(\frac{24\cdot 23}{2}-3\cdot\frac{8\cdot 7}{2})=$

$=729(12\cdot 23-12\cdot 7)=$

$=729\cdot 12\cdot 16$

$\overline{abc}=(a+b+c)\cdot 9k$

$100a+10b+c=9ka+9bk+9ck$

$a(100-9k)+b(10-9k)+c(1-9k)=0$

$abc \vdots 9$

$a+b+c \vdots 9$

$abc \vdots 81$

162
243
324
405
486
567
648
729
810
891
972

$\times\ 12 \cdot 16$

72

$+\ 12$

192

28

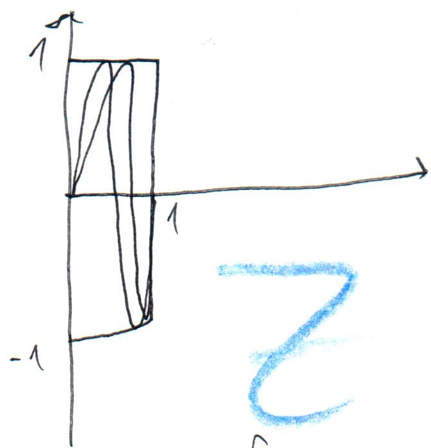
$\times\ 729 \cdot 192$

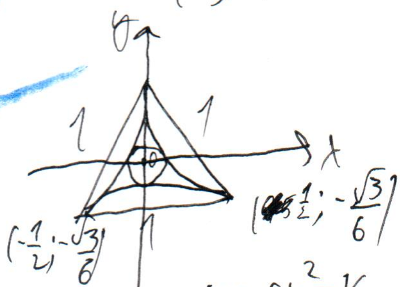
1458

$+\ 6561$

729

139968





$h=1\cdot\frac{\sqrt3}{2}$

$c>0$

$\boxed{r=\frac{\sqrt3}{6}-\frac{c}{4}}$

$y=cx^2-r$

$-\frac{\sqrt3}{6}=-c\cdot\frac14-r$

$-\frac{\sqrt3}{6}=c\frac14-r \quad r=\frac{c}{4}+\frac{\sqrt3}{6}$