0 779216 670009

77-92-16-67
(124.3)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11 класс

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов ~~по математике~~
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Гафарова Тимура Робертовича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«29» марта 2026 года

Подпись участника

 90 (девяносто)

чистовик

77-92-16-67 (124.3)

№1

$\sqrt{6(1-tg^2x)} = 4\sin x$

$\begin{cases} 6(1-tg^2x) = 16\sin^2 x \ (*) \\ \sin x \geq 0 \end{cases}$

*) $6 \cdot \dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x} = 16\sin^2 x$

$3\dfrac{\cos 2x}{\cos^2 x} = 8\sin^2 x$ $\longrightarrow$ $\cos x \neq 0$

$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$

$3\cos 2x = 8\sin^2 x \cos^2 x$

$3\cos 2x = 2\sin^2 2x$

$3\cos 2x = 2(1-\cos^2 2x)$

$2\cos^2 2x + 3\cos 2x - 2 = 0$

$t = \cos 2x$

$1 \geq t \geq -1$

$2t^2 + 3t - 2 = 0$

$D = 9 + 16 = 25$

$t = \dfrac{-3 \pm 5}{4}$

$\left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{2} \\ t = -2 \end{array}\right.$ - неуд. огранич.

$t = \frac{1}{2}$

$\cos 2x = \frac{1}{2}$

$\begin{cases} \cos 2x = \frac{1}{2} \ (1) \\ \sin x \geq 0 \ (2) \end{cases}$

2) $\sin x \geq 0$

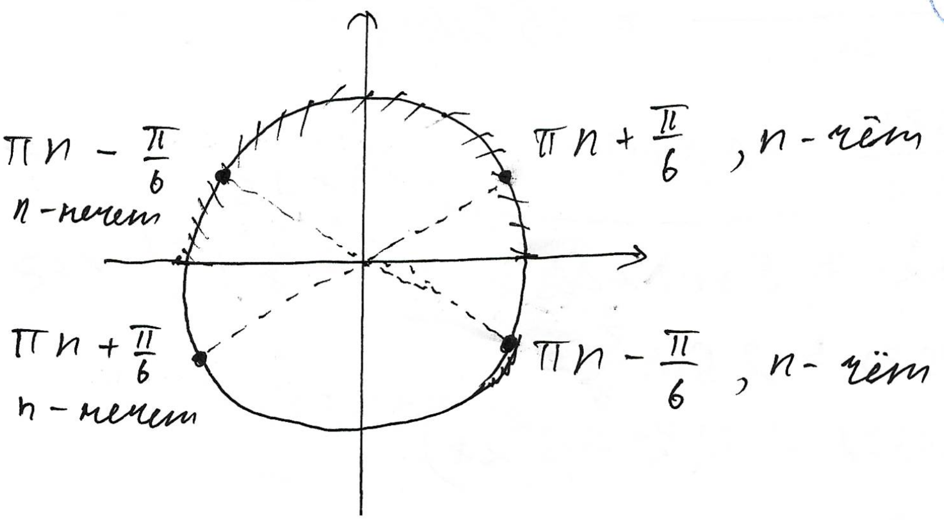
$x \in [2\pi k; 2\pi k + \pi]$, где $k \in Z$

№1 (продолж.) чистовик

1) $\cos 2x = \frac{1}{2}$

$$2x = 2\pi n \pm \frac{\pi}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pi n \pm \frac{\pi}{6}, \quad n \in \mathbb{Z}$$



$$\cancel{\left[\begin{array}{ll} x = 2\pi p + \frac{\pi}{6}, & p \in \mathbb{Z} \\ x = \pi(2m+1) - \frac{\pi}{6}, & m \in \mathbb{Z} \end{array}\right.}$$

$$\left[\begin{array}{ll} x = 2\pi p + \frac{\pi}{6}, & p \in \mathbb{Z} \\ x = 2\pi p + \frac{5\pi}{6}, & p \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{ 2\pi p + \frac{\pi}{6};\ 2\pi p + \frac{5\pi}{6} \mid p \in \mathbb{Z} \right\}$

№2

Назовём $S(x)$ - сумма цифр числа x

$(x : S(x)) \vdots 9 \Rightarrow x \vdots 9 \Rightarrow S(x) \vdots 9$,

а ~~его~~ раз ~~х~~ и $(x : S(x)) \vdots 9$, то $\underline{x \vdots 81}$

№2 (продолж) чистовик

Найдём все трёхзначные числа кратные 81-му и выберем из них подходящие:

$81 \cdot 1 = 81 < 100$

$81 \cdot 2 = 162$

$81 \cdot 3 = 243$

$81 \cdot 4 = 324$

$81 \cdot 5 = 405$

$81 \cdot 6 = 486$

$81 \cdot 7 = \cancel{5612}\ 567$

$81 \cdot 8 = 648$

$81 \cdot 9 = 729$

$81 \cdot 10 = 810$

$81 \cdot 11 = \cancel{891}\ 891$

$81 \cdot 12 = 972$

$81 \cdot 13 = 1053 > 999$

$162 : (1+6+2) = 18$

$243 : (2+4+3) = 27$

$324 : (3+2+4) = 36$

$405 : (4+5) = 45$

$486 : (4+8+6) = 27$

$567 : (5+6+7) = 31{,}5 \notin Z$

$648 : (6+4+8) = 36$

$729 : (7+2+9) = 40{,}5 \notin Z$

$810 : (8+1) = 90$

$891 : (8+9+1) = 49{,}5 \notin Z$

$972 : (9+7+2) = 54$

$\Rightarrow$ все трёхзначные числа мно-ва A - это 162; 243; 324; 405; 486; 648; 810 и 972.

Тогда

$243 + 648 + 972 = 81 \cdot 3 + 81 \cdot 8 + 81 \cdot 12 =$

$= 81(3+8+12) = 81 \cdot 23 = (1600 + 240 + 23)$

$= 1863$

Ответ: 1863.

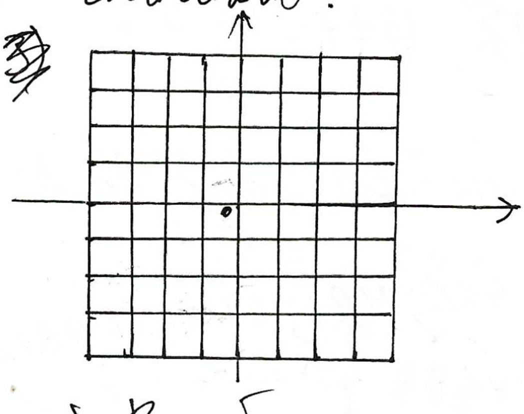
№3 В множестве F каждая точка (целых) имеет три координаты, каждая от -4 до 4 включительно, т.е. всего точек $9 \cdot 9 \cdot 9 = \underline{729}$.

Способ выбора треугольников:

1) Сначала выбираем, каким двум осям будут параллельны катеты – 3 способа.

Тогда все точки лежат в какой-то плоскости, параллельной плоскости, образованной двумя выбранными осями. Т.е. какая-то коорд. у трёх точек будет совпадать.

2) Выбираем эту координату – 9 способов.



Теперь точки лежат в пределах квадрата 8x8.

3) Выбираем вершину треугольника, лежащую напротив гипотенузы. – 81 способ.

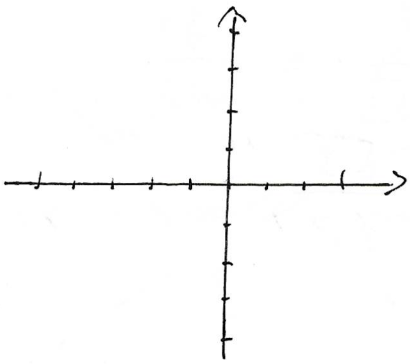
Тогда оставшиеся две вершины лежат на прямых параллельных осям, проведённых ~~в выбранной~~ через выбранную вершину в пределах квадрата, т.е.

77-92-16-67 (124.3)

~~4) Выбираем~~ чистовик

№3 (продолж.)

4) Выбираем оставшиеся две вершины по ~~8~~ 8 способов каждая т.к. по две коорд. уже выбраны, а третья лежит от -4 до 4 включ. и не совпадает с коорд. уже выбранной вершины.



Итого, всего способов выбрать такой треугольник

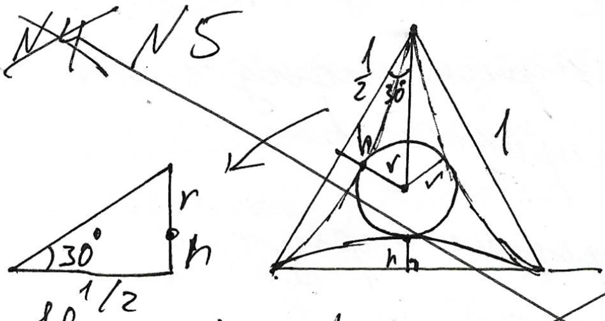
$3\cdot9\cdot81\cdot8^2 = 3\cdot9\cdot81\cdot64 = 3\cdot9\cdot(4800+320+64)$

$= 3\cdot9\cdot5184 = 3(45900+720+36) = 3\cdot46656 =$

$= 139968$

Ответ: 139968

~~N4~~ N5

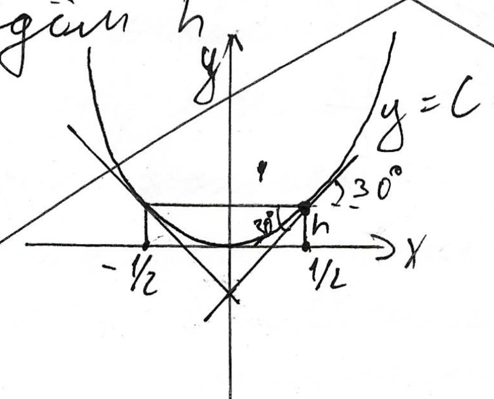


$h + r = \frac{1}{2}\cdot tg30^\circ = \frac{1}{2\sqrt3} = \frac{\sqrt3}{6}$

параболы касания т.к. ~~идём~~ нулевой

$y = Cx^2$

Найдём h



$y' = 2xC$

$y'(1/2) = C$

$y'(1/2) = tg30^\circ$

чистовик

~~№5 (продолж)~~

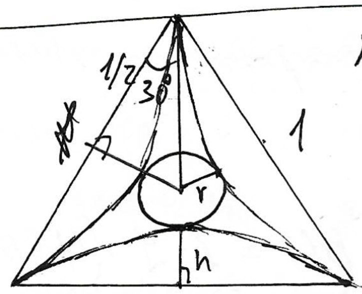
~~$\Rightarrow c = tg\,30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$~~

~~$\Rightarrow h = y(1/2) = \frac{1}{4}c\ \cancel{\ } = \frac{1}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{12}$~~

~~$\Rightarrow r = \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{12}$~~

~~Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{12}$~~

№5



т.к. между параболами нулевой угол, то они касаются $\Rightarrow$ по симметрии прямая проходящая через вершину "треуг." и центр окружности будет касательной к обеим параболам при этой вершине. ~~$\Rightarrow$ угол м/у~~

~~про~~ Проведём отрезки м/д вершинами

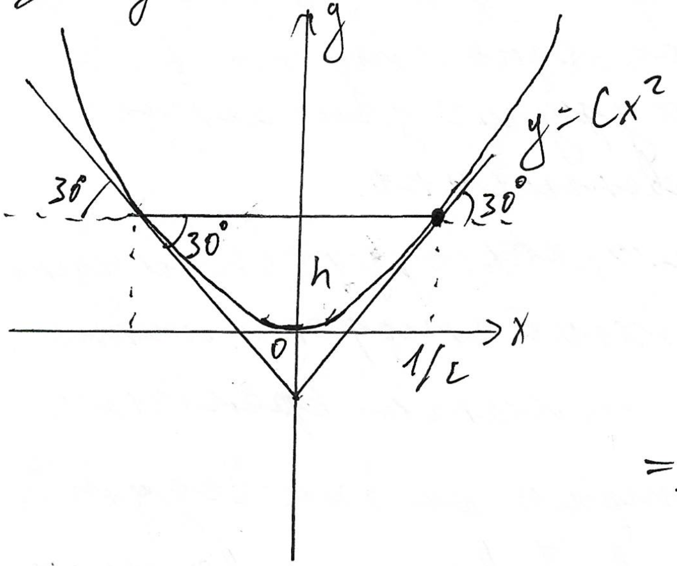
$\Rightarrow$ ~~пол~~ из симметрии получим р/с треуг. со стороной 1

$\Rightarrow$ угол м/д стороной треуг. и касат. к параболе 30°

$\Rightarrow h + r = \frac{1}{2} \cdot tg\,30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{6}$

№5 (продолж.) чистовик

Найдём h



$y' = 2Cx$

$y'(1/2) = C$

$y'(1/2) = tg\, 30^\circ$

$\Rightarrow C = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow h = y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{3}}{12}$

$\Rightarrow r = \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{12}$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{12}$

№6 ~~Назовём~~

Заметим, что тень стены в любой момент времени - это четырёхугольник, одной стороной которого является ~~оно~~ нижняя сторона стенки, противоположная ей - проекция верхней стороны стены на плоскость пустыря. ~~отн.~~ через точку нахождения светлячка.

$\Rightarrow$ т.к. верхняя сторона стенки $\parallel$ плоскости пустыря, то ~~ее~~ оно ~~проз~~ $\parallel$ собственной проекции $\Rightarrow$ нижняя сторона стенки $\parallel$ проекц. верхней.

№6 (продолж.) чистовая

=> Тень стенки - трапеция, одно основание которой одно и то же в любой момент, а другое двигается во время движения светлячка.

Тогда посмотрим, как будет выглядеть ~~прое~~ проекция верхней стороны ~~стенки~~ в том или иной момент времени.

Для ~~для~~ этого посмотрим ~~их~~ как ведут себя проекции двух верхних вершин стенки. Тогда проекцией верхней стороны стенки будет отрезок || противоп. стороне стенки, ~~их~~ концы которого лежат на ~~их~~ траектория движения проекций верхних вершин стенки. А эти траектории - это обычные проекции траектории движения светлячка ч/з ~~на~~ верхние вершины ~~стор~~ стенки.

Найдем проекции точек A и B ч/з концы верхней стороны стенки на плоскость пузыря

$A(-5; 2; 6)$ $B(6, 9, 6)$

$X(0; 0; 2)$ $Y(3; 0; 2)$; X, Y - это концы верхней стороны стенки.

$AX: \frac{x-0}{-5-0} = \frac{y-0}{2-0} = \frac{z-2}{6-2}$; $\frac{x}{-5} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{4}$

плоскость пузыря - это $\underline{z=0}$

№6 (продолж.) чистовик

$A_1: \begin{cases} z=0 \\ \frac{x}{-5}=\frac{-2}{4} \\ \frac{y}{2}=\frac{-2}{4} \end{cases}$ $\begin{cases} z=0 \\ x=2,5 \\ y=-1 \end{cases}$ $A_1(2,5;-1;0)$

$AY: \frac{x-3}{-8}=\frac{y}{2}=\frac{z-2}{4}$; $A_2: \begin{cases} z=0 \\ x-3=\frac{(-8)(-2)}{4} \\ y=-1 \end{cases}$ $\begin{cases} z=0 \\ x=7 \\ y=-1 \end{cases}$

$A_2(7;-1;0)$

$BX: \frac{x}{6}=\frac{y}{9}=\frac{z-2}{4}$ $B_1: \begin{cases} z=0 \\ x=\frac{-2\cdot 6}{4} \\ y=\frac{-2\cdot 9}{4} \end{cases}$ $\begin{cases} z=0 \\ x=-3 \\ y=-4,5 \end{cases}$

$B_1(-3;-4,5;0)$

$BY: \frac{x-3}{3}=\frac{y}{9}=\frac{z-2}{4}$ $B_2: \begin{cases} z=0 \\ x-3=\frac{-2\cdot 3}{4} \\ y=-4,5 \end{cases}$ $\begin{cases} z=0 \\ x=1,5 \\ y=-4,5 \end{cases}$

$B_2(1,5;-4,5;0)$

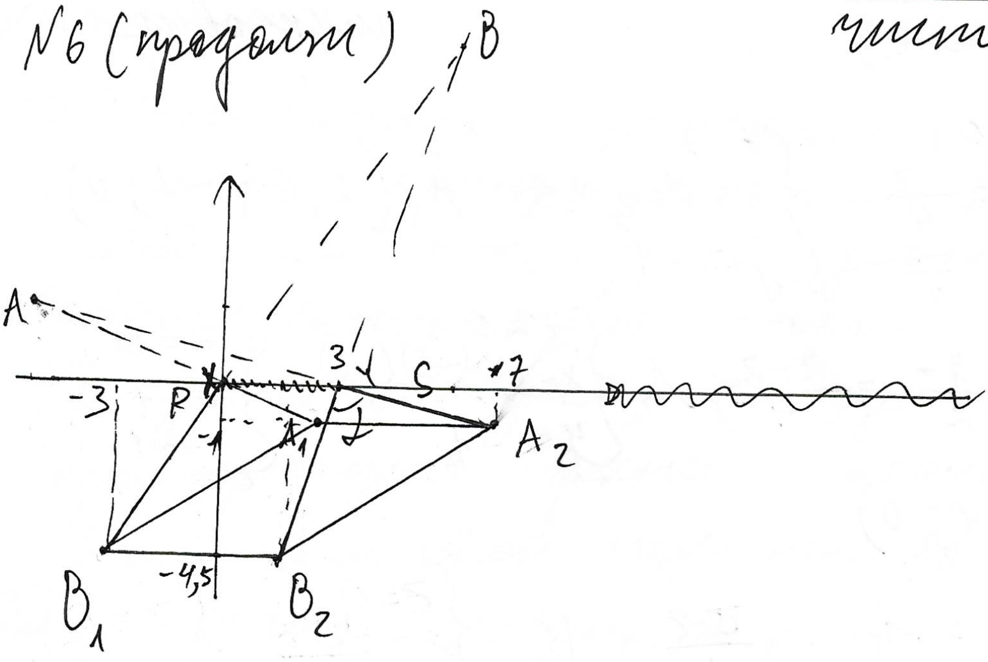
Тогда A_1B_1 – траектория движения проекции X на пустырь

A_2B_2 – ~~прое~~ траектория движения проекции Y на пустыре.

A_1A_2 – проекция XY из A на пустырь

B_1B_2 – проекция XY из B на пустырь

№6 (продолж.) чистовик



$\Rightarrow$ Затемнённой областью будет пятиугольник $PSA_2B_2B_1$ где P и S - нижние ~~конц~~ вершины стенки

$$S_{PSA_2B_2B_1} = S_{PSB_2B_1} + S_{SA_2B_2} =$$

$$S_{PSB_2B_1} = \frac{3+4,5}{2}\cdot 4,5 = \frac{7,5\cdot 4,5}{2} = \cancel{\frac{135}{8}}$$

$$= \frac{15\cdot 9}{8} = \frac{135}{8}$$

$S_{SA_2B_2} =$ $SA_2 = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$

$$SB_2 = \sqrt{\frac{81}{4}+\frac{9}{4}} = \frac{3\sqrt{10}}{2}$$

$$A_2B_2 = \sqrt{16+\frac{49}{4}} = \frac{\sqrt{113}}{2}$$

$$\frac{113}{4} = \frac{90}{4} + 17 - 2\cos\alpha\cdot\frac{3\sqrt{170}}{2}$$

$$\cos\alpha = \frac{45}{2\cdot 3\sqrt{170}} = \frac{15}{2\sqrt{170}}$$

черновик $\quad S(x)$ - сумма цифр

№2 $\quad x \vdots 9 \Rightarrow S(x) \vdots 9$

$$\frac{x}{S(x)} \vdots 9 \Rightarrow \underline{x \vdots 81}$$

$162 : 9 = 18$
$243 : 9 = 27$
$324 : 9 = 36$
$405 : 9 = 45$
$486 : 18 = 27$
$567 : 18 =$ нецелое
$648 : 18 = 36$
$729 : 18 =$ нецелое
$810 : 9 = 90$
$891 : 18 =$ нецелое
$972 : 18 = 54$

162
243
324
405
486
648
810
972

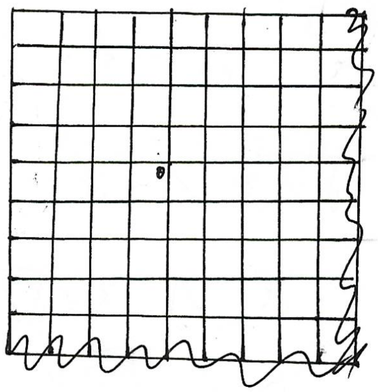
$243 + 648 + 972$

$$\begin{array}{r} 243 \\ 648 \\ 972 \\ \hline \underline{1863} \end{array}$$

№3

$3 \cdot 9 \cdot 81 \cdot 64 =$
$= 3^7 \cdot 2^6 = 27(4800 + 320 + 64)$
~~$729 \cdot 3 \cdot 64$~~
~~$2187 \cdot 64$~~
$= 27 \cdot 5184)$

$5184 \cdot 9$
$= 45000 + 9000 + 720 + 36$
$= 46656 \cdot 3$
$= \underline{139968}$

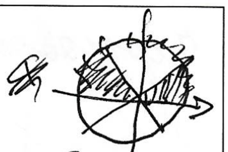


$$\frac{75 \cdot 45}{200} = \frac{3 \cdot 45}{8} = \frac{135}{8}$$

черновик

$\sqrt{6(1-tg^2x)} = 4\sin x$

$\begin{cases} \sin x \geq 0 \\ 1 - tg^2 x \geq 0 \end{cases}$



$tg^2 x \leq 1$

$\cos x \neq 0$

$6(1-tg^2x) = 16\sin^2 x$

$3\,\dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x} = \cancel{16}\,8\sin^2 x$

$3\cos 2x = 4\sin^2 2x$

$3\cos 2x = 4 - 4\cos^2 2x$

$4\cos^2 2x + 3\cos 2x \cancel{+} - 4 = 0$

$\cos 2x = t$

$1 \geq t \geq -1$

$4t^2 + 3t - 4 = 0$

$D = 9 + 64 = 73$

$t = \dfrac{-3 \pm \sqrt{73}}{8}$

$\dfrac{-3-\sqrt{73}}{8} \wedge -1$ $\qquad$ $\dfrac{-3+\sqrt{73}}{8} \wedge 1$

$-3-\sqrt{73} \wedge -8$ $\qquad$ $\sqrt{73} - 3 \wedge 8$

$8 \wedge 3 + \sqrt{73}$ $\qquad$ $\sqrt{73} \wedge 11$

$5 \wedge \sqrt{73}$ $\qquad$ $<$

$<$

$t = \dfrac{-3+\sqrt{73}}{8}$

$\cos 2x = \dfrac{-3+\sqrt{73}}{8}$