31-17-19-32
(128.6)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 10

Место проведения Санкт-Петербург
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Гомзова Владимира Витальевна
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«25» марта 2026 года

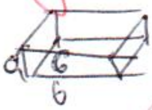
Подпись участника

 50 (пятьдесят)

31-17-19-32
(128.6)

Черновик

№1



$abc + 2ab + 2bc + 2ac + 4(a+b+c) = 2026$

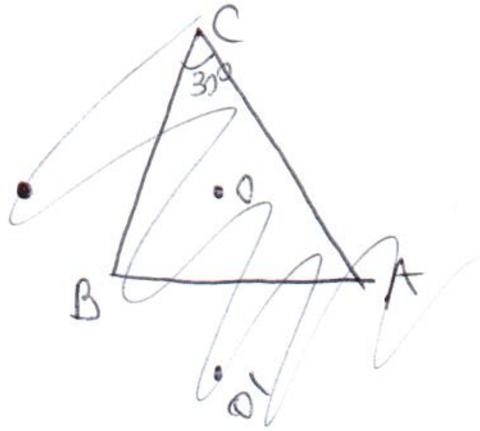
$(a+2)(b+2)(c+2) = 2026+8 = 2034 = 2\cdot 1017 =$

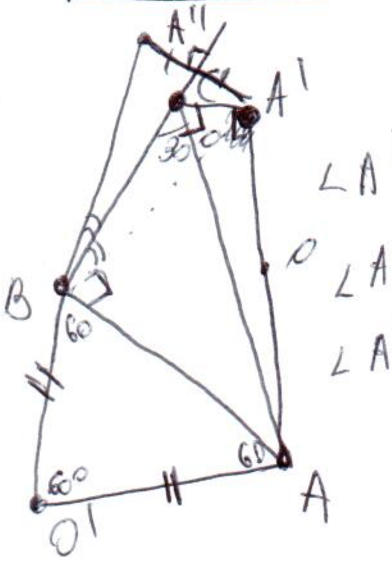
$= 2\cdot 9\cdot 113$

~~$2\cdot 8\cdot 113$~~

$6\cdot 3\cdot 113$ ∀ число делим 3 мо

$\boxed{4\cdot 1\cdot 111 = 444}$





$\angle A'CA = 90^\circ$

$\angle A'BA = 90^\circ$

$\angle A'BC = \angle A''BC$

$\angle A''BC = \dfrac{180-60-90}{2} = 15^\circ$

$\angle B = 105^\circ$

№4

$$\frac{a^{2x} - 3a^{x+1} + 2a^2}{\log_2 a} \geq 0$$

$a^{\log_a b} = b$

$2^{\log_2 a} = a$

$a<1 \quad a^{2x} - 3a^{x+1} + 2a^2 \geq 0$

Черновик

$tg\,x\,tg\,y\,tg\,z = A$

$tg\,\pi - x - y \cdot tg\,y \cdot tg\,x$

$ctg - x - y \cdot tg\,y \cdot tg\,x$

$- ctg\,x+y \cdot tg\,y \cdot tg\,x$

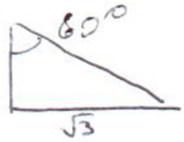
$\frac{\cos x}{\sin x}$ $\frac{\cos - x}{\sin - x}$

$x = y = z$ то $A = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

пусть $x \neq y$ то ~~зап~~ посмотрим:

$tg^2 \frac{x+y}{2} \vee tg\,x \cdot tg\,y$

$\left(\frac{tg\,x + tg\,y}{1 - tg\,x\,tg\,y}\right)^2 \vee tg\,x\,tg\,y$



$\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}$ $\frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{3}} = \sqrt{3}$

$\frac{2\sqrt{3}}{-\frac{2}{3}}$

$\cancel{\frac{1 - tg\,x\,tg\,y}{tg\,x + tg\,y}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{\sqrt{3}}}$ $\frac{tg\,x + tg\,y}{tg\,x\,tg\,y - 1}$ $\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{-\frac{2}{3}}$

$tg^2 x + tg^2 y + 2 tg\,x\,tg\,y \vee \cancel{tg\,x\,tg\,y} + tg^3 x\,tg^3 y - 2 tg^2 x\,tg^2 y$

$\frac{4\cancel{tg\,x\,tg\,y}}{(1 - tg\,x\,tg\,y)^2} \vee \cancel{tg\,x\,tg\,y}$

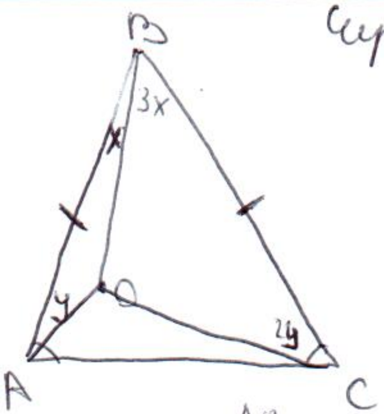
$4 \vee (1 - tg\,x\,tg\,y)^2$

$\frac{\sin x+y}{\cos x+y} = \frac{\sin x \cos y + \sin y \cos x}{\cos x \cos y - \sin y \sin x} =$

$= \cos y$

31-17-19-32
(128.6)

Черновик



$$x = \frac{180-64}{4} = 45-16 = 29^0$$

$$\frac{AB}{\sin\angle BOA} = \frac{BO}{\sin y} \qquad \frac{BO}{2\sin y\cos y} = \frac{AB}{\sin\angle BOC}$$

$$2\cos y = \frac{\sin\angle BOC}{\sin\angle BOA} = \frac{\sin 3x+2y}{\sin x+y} = \frac{\sin 3x\cos 2y + \sin 2y\ldots}{\sin x\cos x + \cos y\sin\ldots}$$

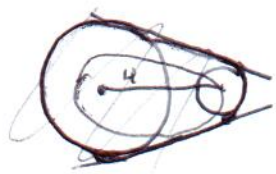
$$2\cos y = \frac{\sin 2(x+y) + \cancel{x}}{\sin x+y} = \frac{\sin 2(x+y)\cdot\cos x + \sin x\cdot\cos 2(x+y)}{\sin 2x+y} =$$

$$2\cos y = 2\cos x+y\cdot\cos x + \frac{\sin x(\cos^2 x+y - \sin^2 x+y)}{\sin x+y}$$

$$\angle AOC = 3y+180-64 = 3y+116$$

~~32 32 116~~

$$\cancel{\frac{AO}{\sin 32-2y} = \frac{OC}{\sin 32-y}} \qquad \frac{AO}{\sin x} = \frac{BO}{\sin y}$$



$$\frac{a^{2x}-3a^{x+1}+2a^2}{\log_2 a} \geq 0$$

$$a>1 \Leftrightarrow a^{2x}-3a^{x+1}+2a^2 \geq 0$$

$$a^2(a^{2x-2}-3a^{x-1}+2) \geq 0$$

$$a^{x-1} = t$$

$$t^2-3t+2 \geq 0$$

$$(t-2)(t-1) \geq 0$$

$$t \in (-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$$

не отрезок

$a<1$, $a \neq 0$, ОДЗ $a>0$

~~$a^2(a^{2x-2} - 3$~~

$t \in [1; 2]$ то $a^{x-1} \in [1; 2]$

$a^{n-1} = 1$ то $n=1$

$a^{2026} = 2 \quad a = \sqrt[2026]{2}$

черновик

$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z$

$\operatorname{tg}^2\frac{x+y}{2} \vee \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y$

$\cancel{\cos\frac{x+y}{}}$ $\dfrac{\sin^2\frac{x+y}{2}}{\cos^2\frac{x+y}{2}} \vee \dfrac{\sin x \sin y}{\cos y \cos x}$

$\sin^2\frac{x+y}{2} = \left(\sin\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2} + \cos\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\right)^2 \geq 4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\cos\frac{y}{2}$

$\cos^2\frac{x+y}{2} = \left(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2} - \sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\right)^2 \vee \cancel{4}$

$\sin^2\frac{x}{2}$ c

$\cancel{\sin^2\frac{x}{2} - \cos^2\frac{x}{2}}$ $\left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)\left(\sin\frac{y}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)$

КБШ ? Л.Ч

$= \sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}$

$\cancel{\cos^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{y}{2}} + \cancel{\sin^2\frac{x}{2}\sin^2\frac{y}{2}} - 2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}\sin\frac{y}{2} \vee$

$\vee \cancel{\sin^2\frac{x}{2}\sin^2\frac{y}{2}} + \cancel{\cos^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{y}{2}} - \cos^2\frac{x}{2}\sin^2\frac{y}{2} - \cos^2\frac{y}{2}\sin^2\frac{x}{2}$

$\frac{\pi}{3}$ $\frac{\pi}{6}$

П.Ч $\leq$ 2 Л.Ч

$\cancel{2\cos}$ Л.Ч $\leq$ П.Ч

30° и 60°

$-$Л.Ч $\geq -$П.Ч

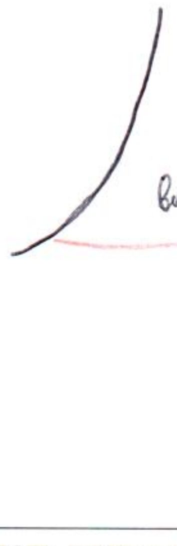
co

$\cos^2 45^\circ \vee \cos 60 \cdot \cos 30$

$\frac{1}{2} \vee \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

$\frac{1}{2} > \frac{\sqrt{3}}{4}$

$f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \geq f(x) + f(y) + f(z)$



выпуклая функция

Чистовик

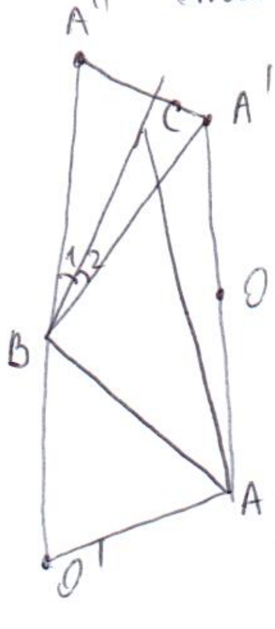
Задача N 1

обозначим длину ширину и высоту как a, b, c
без ограничения общности $a \geq b > c$
то $abc + 2(ab+bc+ac) + 4(a+b+c) + 8 = 2026+8$
(из условия)

то $(a+2)(b+2)(c+2) = 2034 = 2 \cdot 9 \cdot 113$

т.к 113 простое и $\forall$ из множителей $a+2$, $b+2$, $c+2$ больше 2 то $a+2=113$, $b+2=6$, $c+2=3$
то $abc = 111 \cdot 4 \cdot 1 = 444$

Ответ: Наименьший объем 444



Задача N3

A' – диаметрально противоположная A
т.к AA' диаметр $\angle ABA' = 90^\circ$
$\angle 1 = \angle 2$ т.к A'' симметрична A' относительно BC
т.к O центр опис окр ΔABC то $\angle BOA = 2\angle BCA$
то $\angle BOA = 60^\circ$ то $\angle BO'A = 60^\circ$
т.к $BO = AO$ (радиусы) то $BO' = AO'$
то $\Delta BAO'$ равносторонний $\Rightarrow \angle O'BA = 60^\circ$
т.к $A''BO'$ прямая то $\angle O'BA'' = 180^\circ$
то $\angle 1 = \dfrac{180-60-90}{2} = 15^\circ$ то $\angle CBA = 15^\circ + 90^\circ =$
$= 105^\circ$ Ответ 105°

Задача N4

$\dfrac{a^2(a^{2x-2}+3a^{x-1}+2)}{\log_2 a} \geq 0$, заметим $a>0$ и $a \neq 1$

рассмотрим случай $a>1$ то пусть $a^{x-1} = t$, нер-во $\Leftrightarrow$
$t^2+3t-2 \geq 0$ $\quad t \in [-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$ то множество решений не отрезок.

пусть $a<1$ то нер-во $\Leftrightarrow$ $t^2+3t-2 \leq 0 \Leftrightarrow t \in [1; 2]$
$a^{x-1} \in [1; 2]$ т.к $a \neq 1$ ~~наименьший~~ и a^{x-1} возрастающая функция
то наименьший x входящий в множество решений это $x=1$
т.к только $a^0 = 1$, то т.к длина отрезка 2026 то $a^{2027-1} = 2$
$a = \sqrt[2026]{2}$ $\quad$ Ответ $\sqrt[2026]{2}$

Черновик

$$\operatorname{tg}\frac{x+y}{2} = \cancel{\operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{tg}} \frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{tg}\frac{y}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{y}{2}} \vee \operatorname{tg}x\operatorname{tg}y$$

$$\sqrt{3} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$\operatorname{tg}x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cancel{\sin}\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$\operatorname{ctg}x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cancel{\cos\frac{x}{2}}} - \frac{\sin^2\frac{x}{2}}{2\cancel{\sin\frac{x}{2}}\cos\frac{x}{2}}$$

$$\operatorname{ctg}x = \frac{\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}{2} - \frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{2}$$

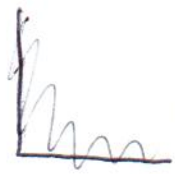
$$\operatorname{ctg}x = \frac{1}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}} - \operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{1-2\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$$

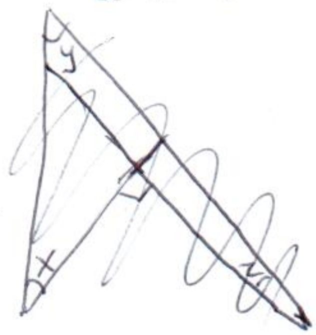
$$\operatorname{tg}x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-2\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$$

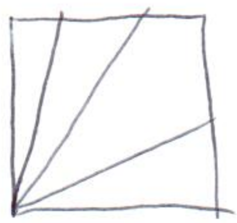
$$\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{tg}\frac{y}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{y}{2}} \vee \frac{4\operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{y}{2}}{(1-2\operatorname{tg}^2\frac{x}{2})(1-2\operatorname{tg}^2\frac{y}{2})}$$

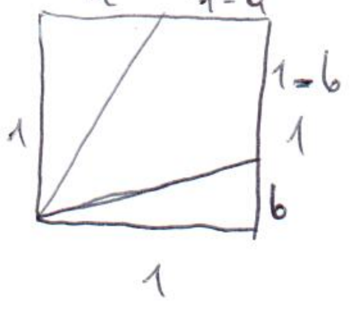
SS

нужно



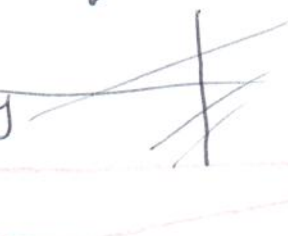






ab

$\operatorname{ctg}x+y \quad \operatorname{tg}x\operatorname{tg}y$



Черновик

вырезка определяется тремя точками

2 из них ~~...~~ на границе и одна внутри

1) сторона — $\frac{1}{4}$ 4 вар 2) ~~88~~ C^2_{99} двух точки

3) длина 99 вариантов

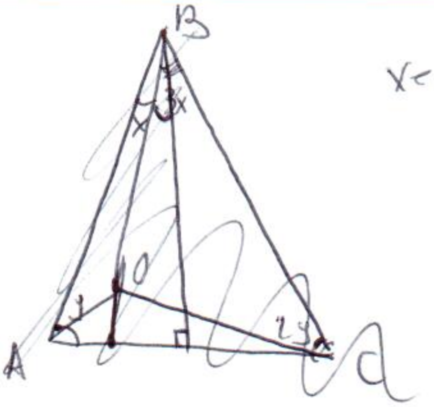
всего $\frac{4\cdot 99!}{\cancel{97}!\cdot 2!}\cdot 99 = \frac{\cancel{4}^{2}\cdot 98\cdot 99^2}{2} =$

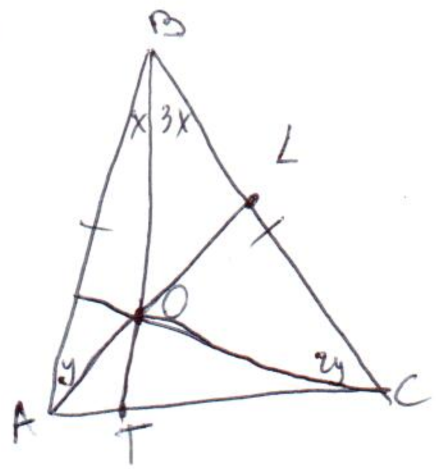
$2\cdot 98\cdot 99^2$

~~$\times 88$~~ $(100-1)^2 = 10000+1-200 = 9801\cdot 196$

$\times 9801$
196
40806
87209
9801
1892996

$\underline{1892996}$



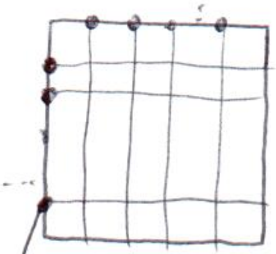


$\frac{\sin\angle BOA}{\sin\angle y} = \frac{BO}{AB}$

$\frac{AT}{\sin x} = \frac{TO}{\sin 3x}$ $\frac{\sin 3x}{\sin x} = \frac{TC}{AC}$

Чистовик

Задача №2



~~для того чтобы однозначно определить конат~~

для начала выберем сторону – 4 варианта далее выберем на стороне 2 точки-узла отличные от вершин квадрата – C_{99}^2 вариантов расстояние между выбранными точками будем называть шириной, теперь осталось выбрать длину, не противоречащую условиям это можно сделать 99 способами, т.о. очевидно выбрав сторону, две точки и длину прямоугольника-вырезка однозначно определяет, также все такие вырезки не противоречат условиям задачи ⇒ всего вариантов тогда:

$C_{99}^2 \cdot 4 \cdot 99 = 1892996$

Осталось док-ть что все возможные варианты учтены, это очевидно т.к $\forall$ вырезка – прямоугольник одна сторона которого полностью лежит на границе квадрата а остальные расположены внутри него.

№5

Пример: если $x=y=z=\frac{\pi}{6}$ то $tg x\, tg y\, tg z = 3\sqrt{3}$

Предположим что $x \neq y$ то сравним $tg^2\frac{x+y}{2}$ и $tg x\, tg y$

это ⇔ $\left(\frac{tg\frac{x}{2}+tg\frac{y}{2}}{tg\frac{x}{2}tg\frac{y}{2}-1}\right)^2 \vee \frac{4tg\frac{x}{2}tg\frac{y}{2}}{(1-2tg^2\frac{x}{2})(1-2tg^2\frac{y}{2})} = B$

по н-ву коши $\Lambda.4 \geq \frac{4tg\frac{x}{2}tg\frac{y}{2}}{\left(tg\frac{x}{2}\cdot tg\frac{y}{2}-1\right)^2}$, ~~распишем~~

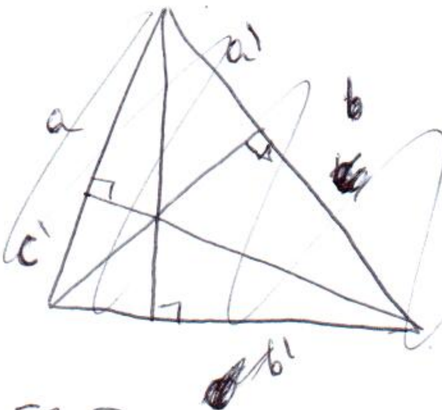
~~и~~ сравним $\frac{4tg\frac{x}{2}tg\frac{y}{2}}{\left(tg\frac{x}{2}\cdot tg\frac{y}{2}-1\right)^2} \vee B \Leftrightarrow 3tg^2\frac{x}{2}tg^2\frac{y}{2}+2tg\frac{x}{2}tg\frac{y}{2}-2tg^2\frac{x}{2}-2tg^2\frac{y}{2} \vee 0$, заменим $tg\frac{x}{2}$ на a $tg\frac{y}{2}$ на b

тогда сравнение ⇔ $3a^2b^2+2ab-2a^2-2b^2 \vee 0$

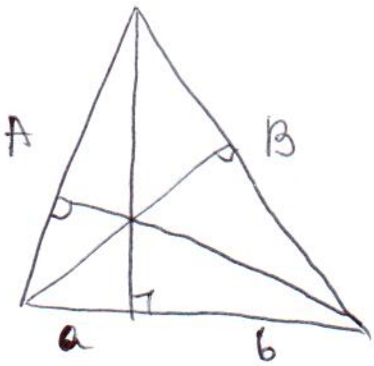
~~н-во КБШ $3a^2b^2+2ab \leq \sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2} \leq \sqrt{3ab^2+4}$~~

Очевидно что для $\forall a,b>0$ н-во верно ⇒ если $x \neq y$ то $tg x\, tg y\, tg z$ не максимально ⇒ аналогично для других пар ⇒ в пределе $x=y=z$ ⇒ $tg^3\frac{\pi}{6}$. максимальное значение

Черновик



$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z =$



$$\frac{a}{\sqrt{A^2-a^2}} \cdot b \cdot$$

$\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$ $3\sqrt{3}$ $\frac{1}{2} \cdot$

$\operatorname{ctg} x+y \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y$ $\frac{1-3}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{-2}{3}$

$\operatorname{ctg} x+y = \frac{1-\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y} \cdot \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y$ $\frac{1-3}{2\sqrt{3}} = -\frac{2}{2\sqrt{3}}$

$\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} \frac{\pi}{6}$

$$\frac{\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y - 1}{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y} \cdot \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y$$

$$\frac{ab-1}{a+b} \cdot ab \qquad \frac{a^2b^2-ab}{a+b}$$

$x = \operatorname{arcctg} \frac{t}{\operatorname{tg} y \operatorname{tg} z}$

$$\operatorname{tg} \frac{x+y}{2} = \left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \operatorname{tg}\frac{y}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{y}{2} - 1}\right)^2 \vee \frac{4\operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{y}{2}}{(1-2\operatorname{tg}\frac{x}{2}^2)(1-2\operatorname{tg}\frac{y}{2}^2)}$$

$$\left(1-2\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)\left(1-2\operatorname{tg}^2\frac{y}{2}\right) \vee \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\operatorname{tg}^2\frac{y}{2} + 1 - 2\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y$$

$$3\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\operatorname{tg}^2\frac{y}{2} + 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{y}{2} - 2\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} - 2\operatorname{tg}^2\frac{y}{2}$$

$3a^2b^2 + 2ab - a^2 - b^2$

$a = -b \pm \sqrt{b^2 + 3b^4 + b^2}$

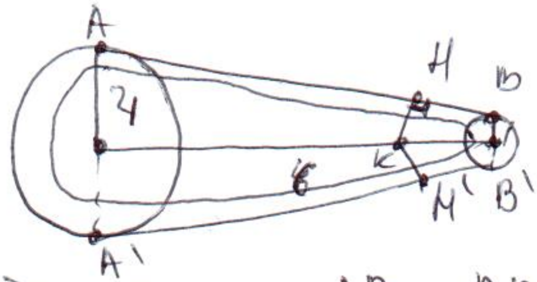
$(3b^2-1)a^2 + 2ba - b^2$

$3a^2b^2 + 2ab \leq \sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{3a^2b^2+4}$

$a; b; 3ab \quad b; a; 2$

Чистовик

Задача №7



Найдем длину AB, $AB = \sqrt{6^2+(4-1)^2} = 3\sqrt{5}$

$A'B' = AB$ найдем длину всей кривой L ,

$L = 6\sqrt{5} + 4H + H = 6\sqrt{5} + 5H$

Найдем такую точку H что $HK = 1{,}5$, $HK \perp AB$ то кусок кривой $H'AH$ будет подобен куску кривой длину которой нам надо найти