0 222607 640001

22-26-07-64
(123.6)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 10 класс

Место проведения Москва
город

13:34 – 13:39

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Гончарук Мирославы Евгеньевны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«29» марта 2026 года

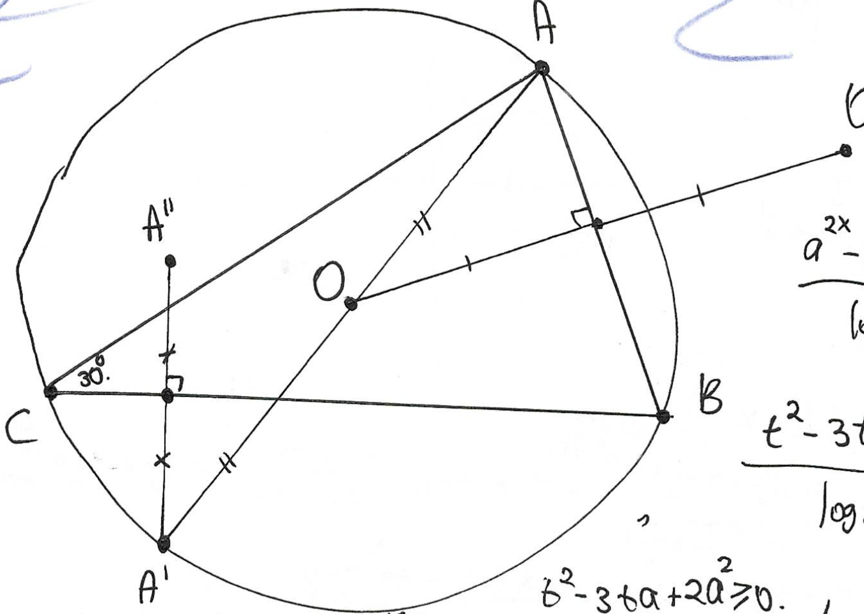
Подпись участника

80 (Восемьдесят)

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

22-26-07-64
(123.6)

ЧЕРНОВИК.



$a \neq 1$. $a > 0$. $a \geq 0$.

$t = a^x$

$$\frac{a^{2x} - 3a^{x+1} + 2a^2}{\log_2 a} \geq 0$$

$$\frac{t^2 - 3ta + 2a^2}{\log_2 a} \geq 0.$$

$t^2 - 3ta + 2a^2 \geq 0$.

$(t - 1{,}5a)^2 \geq 0{,}25a^2$

$\log_2 a > 0 . \log_2 1$

$a > 1$

$t - 1{,}5a \geq 0{,}5a$

$t \geq 2a$

$t \leq -2a$.

$a > 1$.

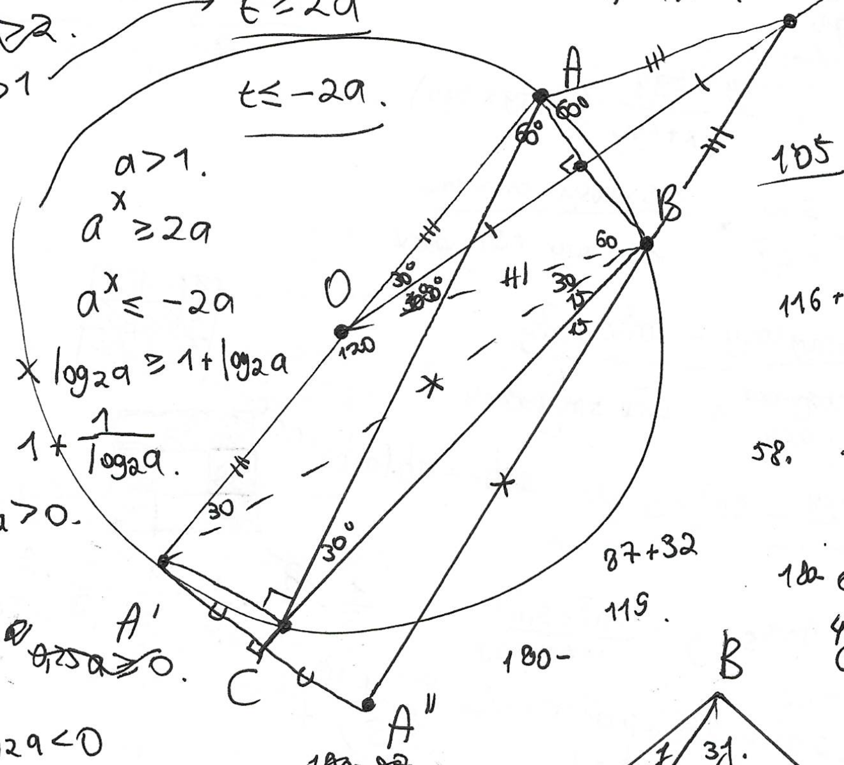
$a^x \geq 2a$

$a^x \leq -2a$

$x \log_2 a \geq 1 + \log_2 a$

$x \geq 1 + \frac{1}{\log_2 a}$.

$\log_2 a > 0$.



148 + 32

105.

87 + 32

119 + 29 + 32

116 + 3α

149.

32 + 29

61.

58.

3 · 29 · 4

116

180 − 64 = 116.

$4y = 116$.

$y = 29$.

3 · 87

87 + 32

119.

180 −

$0{,}25a \geq 0$.

$\log_2 a < 0$

$t^2 - 3ta + 2a^2 \leq 0$

$(t - 1{,}5a)^2 \leq 0{,}25a$

$-0{,}5a \leq t - 1{,}5a \leq 0{,}5a$

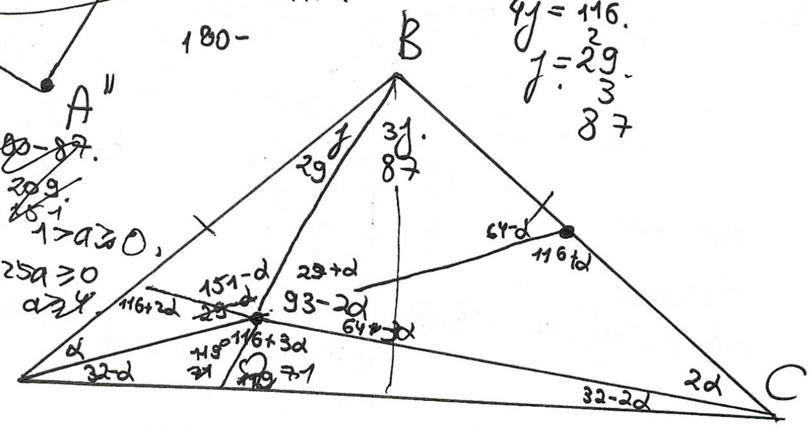
$a \leq a^x \leq 2a$

180 − 87. 209. 151

$1 > a \geq 0$,

$0{,}25a \geq 0$

$a \geq 4$



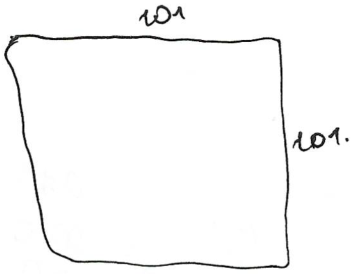
$x \log_2 a \leq 1 + \log_2 a$

$1 \geq x \geq 1 + \frac{1}{\log_2 a}$

$x \log_2 a \geq \log_2 a$

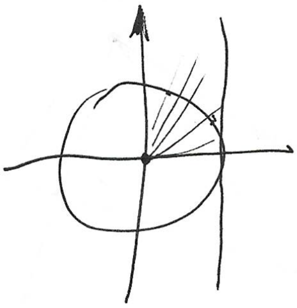
$x \leq 1$.

черновик.



$a \cancel{<} 101$

$b \cancel{<} 101.$



$x+y+z=\frac{\pi}{2}$

$0<x,y,z<\frac{\pi}{2}.$

$\cancel{tg^2x}$

$tg x\, tg y\, tg z.$

$tg x\, tg y\, tg\left(\frac{\pi}{2}-x-y\right)$ $\frac{\cos(x+y)}{\sin(x+y)}$

$tg x\, tg y \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x-y\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x-y\right)} = tg x\, tg y \frac{\cos(x+y)}{\sin(x+y)} = tg x\, tg y \cdot \frac{\cos x\cos y - \sin x \sin y}{\sin x\cos y + \sin y\cos x}$

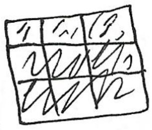
$tg x\, tg y \cdot \frac{1-tg x\, tg y}{tg x + tg y.} = \frac{tg x\, tg y - tg^2 x\, tg^2 y}{tg x + tg y.}$

$\frac{-(tg x\, tg y - 0{,}5)^2 + 0{,}25}{\cancel{2g}\ tg x + tg y}$

$\cancel{tg}$ $\frac{\cancel{tg x\, tg y}}{}$

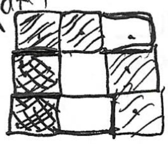
$\frac{tg x\, tg y}{tg(x+y)}$ $\frac{tg x\, tg y}{tg x + tg y}(1-tg x\, tg y)$

$\frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{\cos x \cos y - \sin x \sin y}{\sin x \cos y + \sin y \cos x}$



$\frac{\sin x\cos x \cdot \sin y\cos y - \sin^2 x \sin^2 y}{\cancel{\cos x \sin x \cos y \cos} \quad \cos^2 y \sin x \cos x + \cos^2 x \sin y \cancel{\cos y}}$

$3abc + ab(a+b) + ac(a+c)$



$\cancel{\frac{\sin 2x \sin 2y}{4} - \sin^2 x \sin^2 y}$

$\frac{1}{3} \cdot \frac{\cancel{1}}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\cancel{1}}{2}$

abc $\frac{1}{\sin x\, y} \cdot \left(\sin x \sin y - \frac{\sin^2 x \sin^4 y}{\cos x \cos y}\right.$

$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac = (a+b+c)^2$ $\left(\frac{1}{3}\right)^6 +$

$a+b+c\ (ab+ac+bc)$

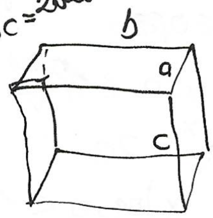
$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$

abc min.

$\cancel{a^2b + abc}$

$a^2b + a^2c + abc + b^2a + abc + b^2c$

$abc + (a+b+c) \cdot 4 + 2ab + 2ac + 2bc = 2026$



$abc + 4(a+b+c) + 2ab + 2ac + 2bc = 2026$

22-26-07-64
(123.6)

ЧЕРНОВИК.

$\sin 3\alpha = \sin 2\alpha\cos\alpha + \cos 2\alpha\sin\alpha$

$2\sin\alpha\cos^2\alpha + (1-2\sin^2\alpha)\sin$

$3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

$\frac{S_a}{S_B} = \frac{a}{b} =$

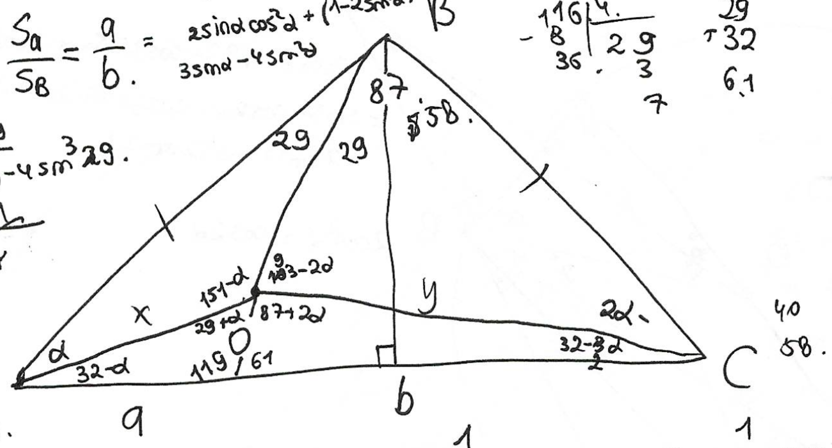
180-64.

116 | 4. — 8 | 29; 36 . 3; 7

29 × 32; 6.1

$\frac{\sin 29}{3\sin 29 - 4\sin^3 29}.$

$\frac{a}{b} \sim \frac{1}{861}$



sin

$\frac{a}{b} = \frac{1}{3-4\sin^2 29} = \frac{1}{\cancel{\cos^2 29 - 3\sin^2 29 - 1}} = \frac{1}{4\cos 58 - 1} = \frac{1}{2\cos 58 + 1}$

$\cancel{(\cos 58 + 1)a = b}$

$\cancel{(2\cos 58 + 1)a = b}$

$\cancel{\frac{a}{b}}$ $\frac{x\sin\alpha}{y\sin 2\alpha} = \frac{\sin 29}{\sin 87} = \frac{1}{2\cos 58 + 1}$

$\frac{y}{\ }$ $\frac{x}{2y\cos\alpha} = \frac{1}{2\cos 58 + 1}$ $\frac{y}{x} = \frac{2\cos 58 + 1}{2\cos\alpha}$

$\frac{a}{b} = \frac{a\,x\sin(32-\alpha)}{b\,y\sin(32-2\alpha)}$

$\cancel{x}$ $\frac{y}{x} = \frac{\sin(32-\alpha)}{\sin(32-2\alpha)} = \frac{2\cos 58 + 1}{2\cos\alpha}$

$\frac{\sin 32\cos\alpha - \cos 32\sin\alpha}{\sin 32\cos 2\alpha - \cos 32\sin 2\alpha} = \frac{2\cos 58 + 1}{2\cos\alpha} = \frac{2\sin 32 + 1}{2\cos\alpha}$

$\cos 58\cos\alpha - \alpha$

$2\cos^2\alpha\sin 32 - \cancel{2\sin 2\alpha\cos 32} = 2\sin^2 32\cos 2\alpha + \sin 32\cos 2\alpha - 2\sin 32\cdot$
$\cdot\cos 32\sin 2\alpha - \cancel{\cos 32\sin 2\alpha}$

$\cancel{2\cos^2\alpha}\,\cancel{\sin 32} = 2\sin^{\cancel{2}} 32\cos 2\alpha + \overset{2\cos^2\alpha - 1}{\cancel{\sin 32}}\cos 2\alpha - 2\cancel{\sin 3}2\cdot\cos 32\sin 2\alpha$

$1 = 2\sin 32\cos 2\alpha - 2\cos 32\sin 2\alpha$

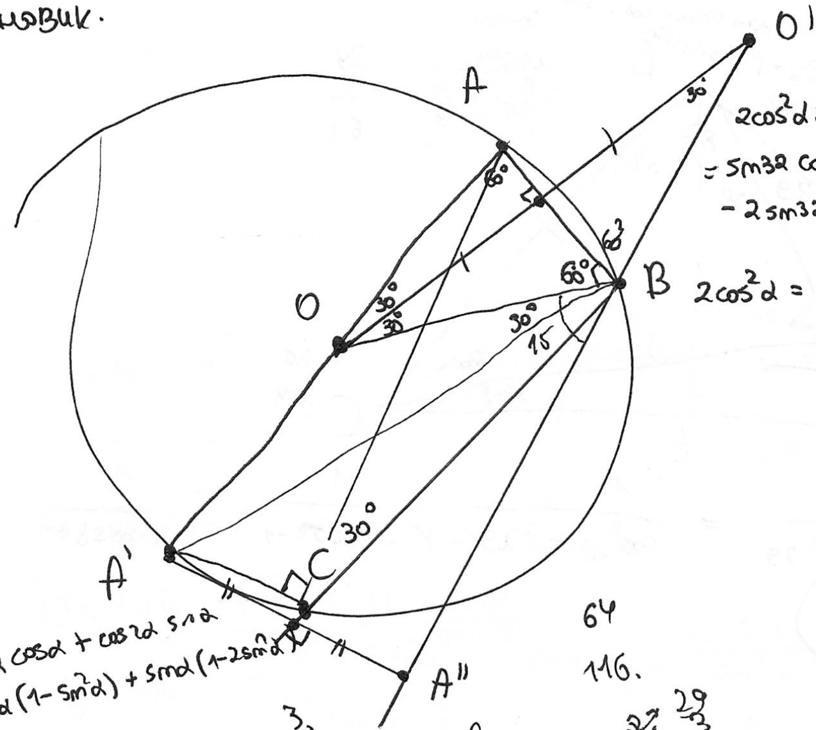
$\alpha < 32$

$\frac{1}{2} = \sin(32-2\alpha)$

$32 - 2\alpha = \frac{\pi}{6}.$ $32 - 30 = 2\alpha.$

$\alpha = 1°$

черновик.



$2\cos^2\alpha \sin 32 - \cos 32 \cancel{\sin\alpha}\cdot 2\cos\alpha =$

$= \sin 32 \cos 2\alpha - \cancel{\cos 32} \sin 2\alpha + 2\sin^2 32 \cos 2\alpha$

$- 2\sin 32 \cos 32 \sin 2\alpha$

$2\cos^2\alpha = \cos 2\alpha$

$\sin 2\alpha \cos\alpha + \cos 2\alpha \sin\alpha$

$2\sin\alpha(1-\sin^2\alpha) + \sin\alpha(1-2\sin^2\alpha)$

64

116.

29 · 3 = 87

$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

29 + 32 = 61.

119 + 32 = 151

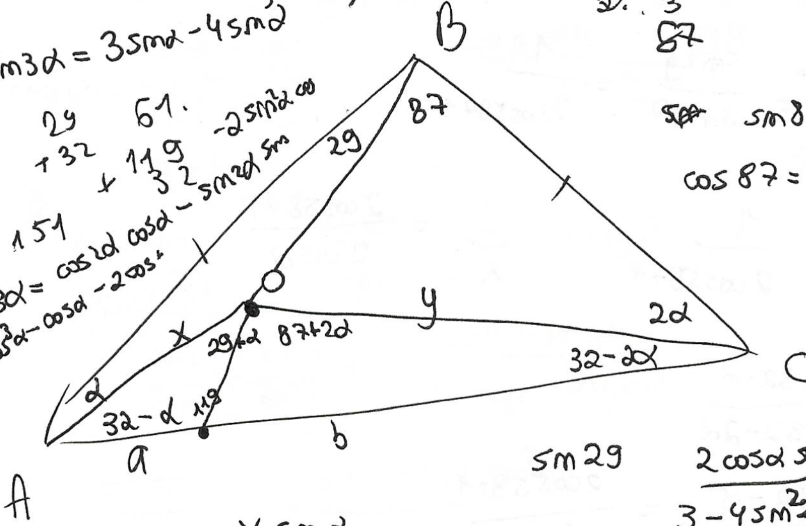
$-2\sin^2\alpha\cos$

$\cos 3\alpha = \cos 2\alpha \cos\alpha - \sin 2\alpha \sin$

$2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2\cos$

$\sin 87 = 3\sin\alpha - 4\sin^2 29$

$\cos 87 = 4\cos^3 29 - 3\cos 29$



$\sin 29$

$\frac{2\cos\alpha \sin}{3-4\sin^2 29} = \frac{\sin 32-2\alpha}{\sin 32-\alpha}$

$\frac{\sin 29}{\sin 87} = \frac{x\sin\alpha}{y\sin 2\alpha}$

$\cancel{\frac{x}{y} = \frac{2\cos\alpha}{3-4\sin^2}}$

$\frac{x}{y} = \frac{2\cos\alpha\sin 29}{\sin 87}$

$\frac{2\cos\alpha}{1+2\frac{\sin 32}{\cos 58}} = \frac{\sin 32\cos 2\alpha - \cos 32 \sin 2\alpha}{\sin 32\cos\alpha - \cos 32\sin\alpha}$

$\frac{a}{b} = \frac{\sin 29}{\sin 87} = \frac{a\, x\sin 32-\alpha}{b\, y\sin 32-2\alpha}.$

$\frac{x\sin 29+\alpha}{y\sin 87+2\alpha} = \frac{a}{b} = \frac{\sin 29}{\sin 87} = \frac{x\sin\alpha}{y\sin 2\alpha}$

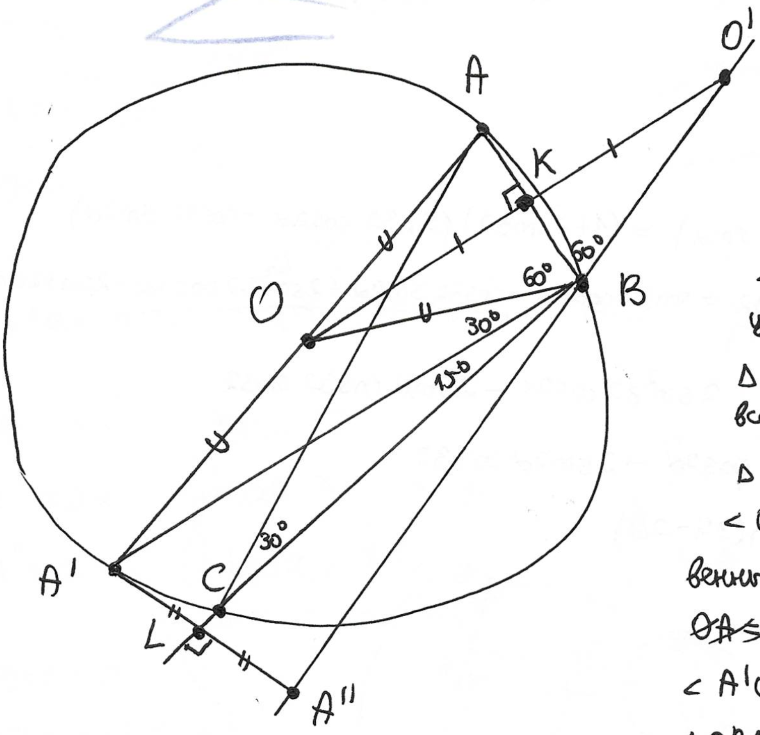
$\frac{\sin 29+\alpha}{\sin 87+2\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha}$ $\frac{1}{2\cos\alpha} = \frac{\sin 29\cos\alpha + \cos 29 \sin\alpha}{\sin 87\cos 2\alpha + \cos 87\sin 2\alpha}$

sm

22-26-07-64
(123.6)

Чистовик

№3.



$\angle ACA' = 90°$, т.к опирается на диаметр

$\angle BCA' = 90°+30° = 120°$

$\angle BAA' = 180° - 120° = 60°$ по св-ву вписанного четырехугольн.

$\angle AOB = 2\angle ACB = 60°$ как центральный угол.

ΔABO – равносторонний, т.к. все его углы $= 60°$.

$\Delta OKB = \Delta O'KB$ по 2 катетам

$\angle OBK = \angle O'BK = 60°$ соответственные углы.

~~OA = OA'~~ т.к $OA = OA' = OB$

$\angle A'OB = 180° - 60° = 120°$ смежные углы

$\angle OBA' = \frac{180° - 120°}{2} = 30°$ по св-ву равноб. треуг.

$\angle A'BA'' = 180° - 60° - 60° - 30° = 30°$ – смежные углы

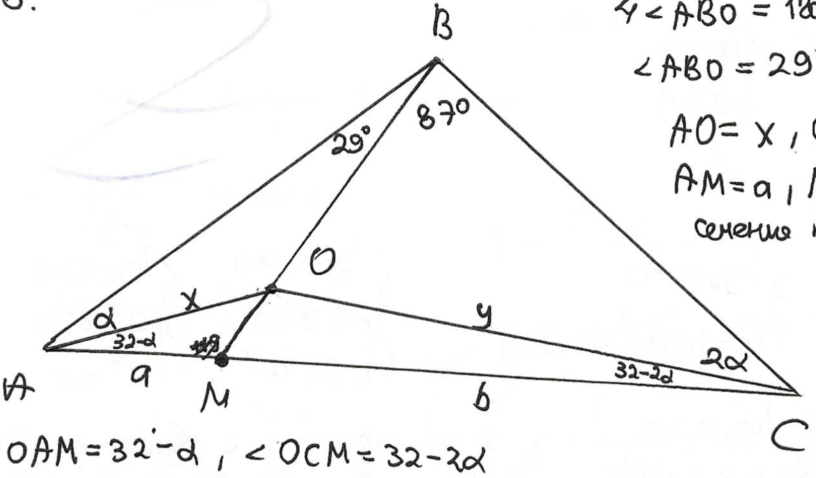
$\Delta A'BL = \Delta A''BL$ по 2 катетам

$\angle A'BL = \angle A''BL = \frac{30°}{2} = 15°$ – как соответств. эл-ты равных треуг.

$\angle B = 60° + 30° + 15° = 105°$.

Ответ: $105°$.

№6.



$4\angle ABO = 180° - 64°$

$\angle ABO = 29° \Rightarrow \angle CBO = 3\angle ABO = 87°$

$AO = x$, $OC = y$

$AM = a$, $MC = b$, где M точка пересечения прямых BO и AC.

$\angle OAM = 32 - \alpha$, $\angle OCM = 32 - 2\alpha$

~~$\angle AMB = 180 - 29 - 32 = 119$~~

$AB = BC$ т.к ΔABC равноб.

$$\frac{S_{ABO}}{S_{CBO}} = \frac{\sin 29}{\sin 87} = \frac{x \cdot \sin\alpha}{y \sin 2\alpha} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{\sin 29 \sin 2\alpha}{\sin 87 \sin\alpha} = \frac{2\cos\alpha \sin 29}{3\sin 29 - 4\sin^3 29} =$$

$$= \frac{2\cos\alpha}{3 - 4\sin^2 29} = \frac{2\cos\alpha}{1 + 2\cos 58} = \frac{2\cos\alpha}{1 + 2\sin 32}$$

чистовик

продолжение задачи №6.

$$\frac{S_{DAOM}}{S_{DCOM}} = \frac{a}{b} = \frac{a \times \sin(32-\alpha)}{by \sin(32-2\alpha)} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{\sin(32-2\alpha)}{\sin(32-\alpha)}$$

$$\frac{2\cos\alpha}{1+2\sin 32} = \frac{\sin(32-2\alpha)}{\sin(32-\alpha)}$$

$$2\cos\alpha(\sin 32\cos\alpha - \cos 32 \sin\alpha) = (1+2\sin 32)(\sin 32 \cos 2\alpha - \cos 32 \sin 2\alpha)$$

$$2\cos^2\alpha \sin 32 - \underline{2\cos\alpha \sin\alpha \cos 32} = \sin 32 \cdot \cos 2\alpha - \underline{\cos 32 \sin 2\alpha} + \underline{2\sin^2 32 \cos 2\alpha} - 2\sin 32 \cos 32 \sin 2\alpha$$

$$2\cos^2\alpha \sin 32 = \sin 32 \cos 2\alpha + 2\sin^2 32 \cos 2\alpha - 2\sin 2\alpha \cos 32 \sin 32$$

$$2\cos^2\alpha = \cos 2\alpha + 2\sin 32 \cos 2\alpha - 2\sin 2\alpha \cos 32$$

$$2\cos^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 + 2\cdot\sin(32-2\alpha)$$

$$\frac{1}{2} = \sin(32-2\alpha)$$

Т.к $\alpha < 32^\circ$.

$30 = 32 - 2\alpha$

$\alpha = 1^\circ$.

$\angle BAO = \alpha = 1^\circ$

$\angle BOA = 180^\circ - 29^\circ - 1^\circ = 150^\circ$

$$\frac{\angle BOA}{\angle BAO} = 150$$

Ответ: 150.

№4

$$\frac{a^{2x} - 3a^{x+1} + 2a^2}{\log_2 a} \geqslant 0 \qquad \begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$$

$t = a^x$

1) $\begin{cases} \log_2 a > 0 \\ t^2 - 3ta + 2a^2 \geqslant 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \log_2 a > 0 \\ (t - 1{,}5a)^2 \geqslant 0{,}25a^2 \end{cases}$ $\begin{cases} \log_2 a > 0 \\ \left[\begin{array}{l} t \geqslant 2a \\ t \leqslant a \end{array}\right. \end{cases}$ $\begin{cases} \log_2 a > 0 \\ \left[\begin{array}{l} a^x \geqslant 2a \\ a^x \leqslant a \end{array}\right. \end{cases}$

$\begin{cases} \log_2 a > 0 \\ \left[\begin{array}{l} \log_2 a \cdot x \geqslant 1 + \log_2 a \\ \log_2 a \cdot x \leqslant \log_2 a \end{array}\right. \end{cases}$ $\begin{cases} \log_2 a > 0 \\ \left[\begin{array}{l} x \geqslant 1 + \frac{1}{\log_2 a} \\ x \leqslant 1 \end{array}\right. \end{cases}$

x не ограничен с двух сторон $\Rightarrow$ множество решений не будет ограничено черновик

$$\frac{a^{2x}-3a^{x+1}+2a^2}{\log_2 a} \geq 0.$$

$a>0$

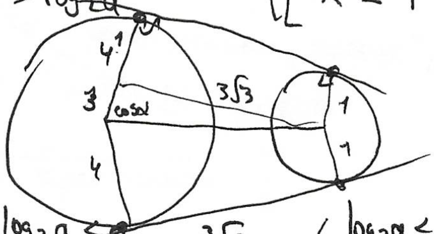
$a \neq 1$

$t=a^x$

$$\frac{t^2-3ta+2a^2}{\log_2 a} \geq 0$$

$\begin{cases} \log_2 a>0 \\ t^2-3ta+2a^2 \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \log_2 a>0 \\ (t-\cancel{1{,}5}\,1{,}5a)^2 \geq 0{,}25a^2 \end{cases}$ $\begin{cases} \log_2 a>0 \\ \left[\begin{array}{l} t \geq 2a \\ t \leq a \end{array}\right. \end{cases}$

$\begin{cases} \log_2 a>0 \\ \left[\begin{array}{l} a^x \geq 2a \\ a^x \leq a \end{array}\right. \end{cases}$ $\begin{cases} \log_2 a>0 \\ \left[\begin{array}{l} \log_2 a \cdot x \geq 1+\log_2 a \\ \log_2 a\, x \leq \log_2 a \end{array}\right. \end{cases}$ $\begin{cases} \log_2 a>0 \\ \left[\begin{array}{l} x \geq 1+\frac{1}{\log_2 a} \\ x \leq 1 \end{array}\right. \end{cases}$



$\begin{cases} \log_2 a<0 \\ -0{,}5a \leq t-1{,}5a \leq 0{,}5a \end{cases}$

$\log_2 a \leq 0$

$\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$

$\alpha = 60.$

$120.$

$$\frac{2\pi \cdot 2{,}5 \cdot 120}{\text{ТЗ}}$$

$\log_2 a<0$

$a \leq t \leq 2a$

$\leq$ $a \leq a^x \leq 2a$

$a \leq b \leq \frac{2a}{0{,}5a}$

$\begin{cases} \log_2 a<0 \\ \cancel{x \leq \frac{1}{\log_2 a}+1} \\ \cancel{x \geq 1} \end{cases}$

$0 \ldots \frac{1}{\log_2 a}$

$\cancel{\frac{1}{\log_2 a} = 2026}$

$\cancel{\frac{1}{2026} = \log_2 a}$

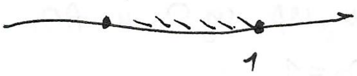
x

$\log_2 a\, x \leq 1+\log_2 a$

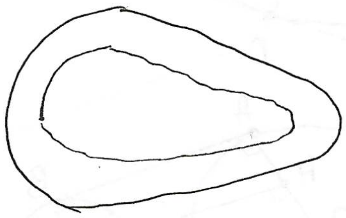
$\log_2 a\, x \geq \log_2 a$

$x \geq 1+\frac{1}{\log_2 a}$

$x \leq 1.$

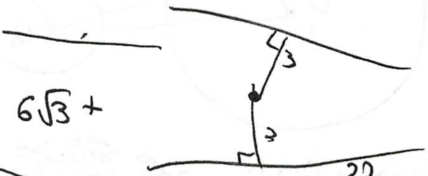


$2\pi R$



$$-\frac{1}{\log_2 a} = 2026$$

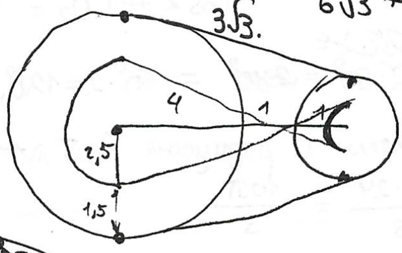
$\cancel{a^{2}\ 2^{-\frac{1}{2026}}}$

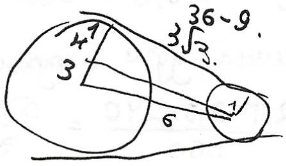


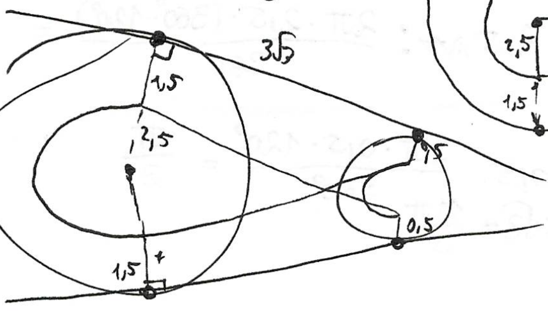
$$\log_2 a = -\frac{1}{2026}.$$

$$\frac{2\pi R \cdot \alpha}{360}$$

$6\sqrt{3}+$







чистовик

продолжение задачи №4.

2) $\begin{cases}\log_2 a<0\\ t^2-3ta+2a^2\le 0\end{cases}$ $\begin{cases}\log_2 a<0\\ (t-1{,}5a)^2\le 0{,}25a^2\end{cases}$ $\begin{cases}\log_2 a<0\\ t\le 2a\\ t\ge a\end{cases}$ $\begin{cases}\log_2 a<0\\ a\le a^x\le 2a\end{cases}$

$\begin{cases}\log_2 a\le \log_2 a\cdot x\le 1+\log_2 a\\ \log_2 a<0\end{cases}$ $\begin{cases}1+\frac{1}{\log_2 a}\le x\le 1\\ \log_2 a<0.\end{cases}$

Чтобы ~~их~~ множество x представляло собой отрезок длиной 2026.

$1-\left(1+\frac{1}{\log_2 a}\right)=2026.$

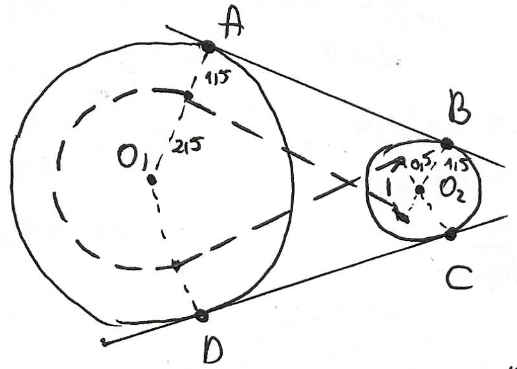
$-\frac{1}{\log_2 a}=2026$

$\log_2 a=-\frac{1}{2026}$

$a=2^{-\frac{1}{2026}}$

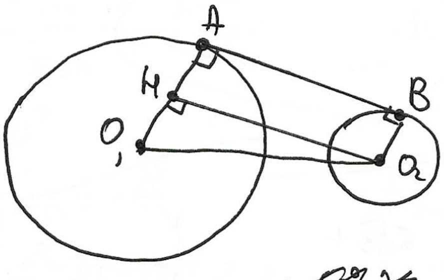
Ответ: $2^{-\frac{1}{2026}}$

№7.



$AB=DC$ – отрезки касательных к окружностям

Дорожка из травы будет состоять из дуги окружности с радиусом 2,5, дуги окружности с радиусом 0,5 и двух отрезков касательных (2AB)



Опустим перпендикуляр из O_2 на AO_1

$O_1O_2=6$, $AH=BO_2=1$

$O_1H=O_1A-AH=3$

$AB=O_2H=\sqrt{36-9}=3\sqrt{3}$ по теореме Пифагора

$\cos\angle AO_1O_2=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}\Rightarrow \angle AO_1O_2=60^\circ.$

Тогда $\angle AO_1D=\cancel{360-2\cdot 60^\circ=240^\circ}=60^\circ\cdot 2=120^\circ, =\angle BO_2D$

Длина дуги окружности с радиусом 2,5: $\frac{2\pi\cdot 2{,}5\cdot(360^\circ-120^\circ)}{360^\circ}=$

$=\frac{2\pi\cdot 2{,}5\cdot 240}{360}=\frac{5\pi\cdot 24}{36}=\frac{10\pi}{3}$

Длина дуги окружности с радиусом 0,5: $\frac{2\pi\cdot 0{,}5\cdot 120^\circ}{360^\circ}=\frac{\pi}{3}$

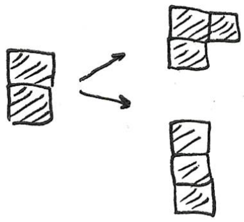
Длина дорожки: $3\sqrt{3}\cdot 2+\frac{10\pi}{3}+\frac{\pi}{3}=6\sqrt{3}+\frac{11\pi}{3}$

Ответ: $6\sqrt{3}+\frac{11\pi}{3}$

Чистовик

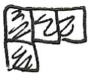
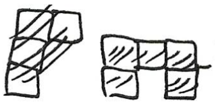
№8.

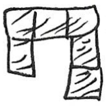
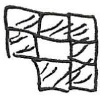
2 квадратик, который Робот закрасит неважен, т.к. случаи симметричны



Дальше 2 ~~[illegible]~~ случая.

1) если робот повернул направо (или налево), вероятность $\frac{2}{3}$

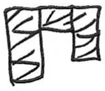
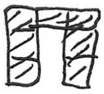
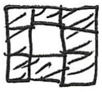
Дальше он должен идти прямо:  – $\frac{1}{3}$, потом направо  – $\frac{1}{3}$,

потом прямо:  – $\frac{1}{3}$, потом ~~направо~~ направо  – $\frac{1}{3}$. И дальше

Заметим, что дальше прийти в расположение „кольца“, чтобы потом превратить его в квадрат невозможно. Случай не подходит

2) если робот пошел прямо; вероятность $\frac{1}{3}$.

Дальше направо или налево:  – $\frac{2}{3}$, дальше прямо  – $\frac{1}{3}$,

направо  – $\frac{1}{3}$, прямо  – $\frac{1}{3}$, направо  – $\frac{1}{3}$ ~~и~~ и направо – вероятность $\frac{1}{2}$.

$\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}$.