0 630944 490003

63-09-44-49
(123.5)

# МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
## имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 10 класс  13:13 – 13:15

Место проведения Москва
город

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Горшкова Егора Андреевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«29» марта 2026 года

Подпись участника

 65 (Шестьдесят пять)

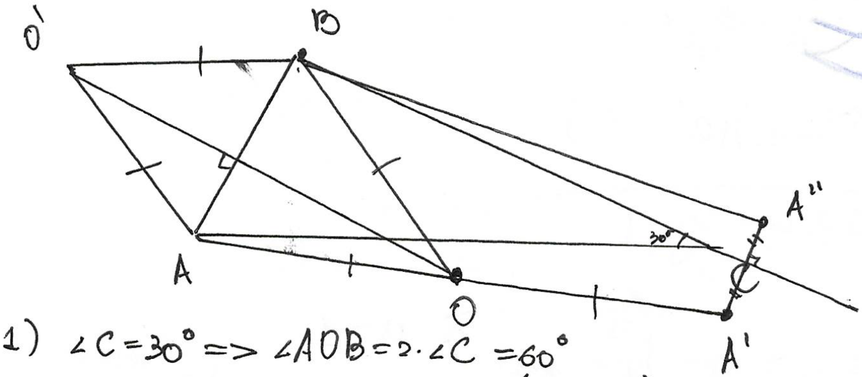
63-09-44-49 (123.5)

Чистовик.

Задача 3.

I Рассмотрим случай когда $\angle B > 90^\circ$

Пусть $\angle B = \beta$




1) $\angle C = 30^\circ \Rightarrow \angle AOB = 2 \cdot \angle C = 60^\circ$ (центр.)

2) $O'$ симм. $O$ отн. $AB \Rightarrow OO' \perp AB$, $OA' = AO = R$, $OB' = BO = R$

3) Из п. 1,2 $\Rightarrow \triangle AOB$ и $AO'B$ – равност. $\Rightarrow \angle ABO = 60^\circ$, $\angle O'BO = 120^\circ$

4) $A'$–диам. прот. $A \Rightarrow AO = OA'$, $A' \in OA \Rightarrow \angle ABA' = 90^\circ \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle OBA' = 30^\circ$

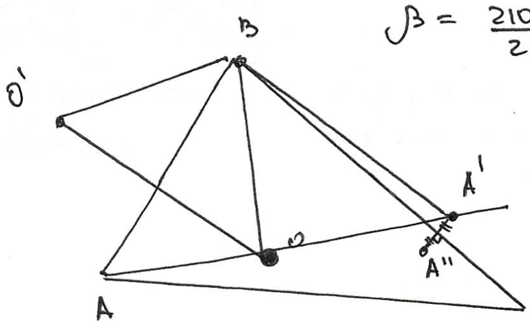
5) $\angle A'BC = \angle B - \angle A'BA = \beta - 90^\circ = \angle CBA''$, т.к. $A''$ симм. $A'$ отн. $BC$

6) $O' - B - A'' \Rightarrow \angle O'BA'' = 180^\circ = \angle OBO' + O'BA'' =$
$= 120^\circ + \angle OBA' + 2 \cdot \angle A'BC = 120^\circ + 30^\circ + 2 \cdot (\beta - 90^\circ)$

$2\beta - 180^\circ + = 30^\circ$

$\beta = \frac{210^\circ}{2} = 105^\circ$

II $\beta \leq 90^\circ$




Аналогично случаю I $\angle OBO' = 120^\circ$; $\angle ABA' = 90^\circ$
$\angle O'BA = 60^\circ$

$\angle O'BA'' < \angle OBA' = \cancel{60} \angle O'BA + \angle ABA' = 150^\circ \Rightarrow \angle O'BA'' \neq 180^\circ$

Ответ: $\angle B = 105^\circ$

Задача 4. чистовик.

ОДЗ: $a>0$, $a\neq 1$

$$\frac{a^{2x}-3a^{x+1}+2a^2}{\log_2 a}\geq 0 \quad \Big| : a^2>0$$

$$\frac{a^{2x-2}-3a^{x-1}+2\geq 0}{\log_2 a-\log_2 1}$$

$$\frac{(a^{x-1}-1)(a^{x-1}-2)}{\log_2 a-\log_2 1}\geq 0$$

I $0<a<1$

$$(a^{x-1}-1)(a^{x-1}-2)\leq 0 \qquad t=a^{x-1}$$

$$(t-1)(t-2)\leq 0$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l} t\leq 1\\ t\geq 2\end{array}\right.\\ 0<a<1\end{cases}$$

$$\begin{cases}1\leq t\leq 2\\ 0<a<1\end{cases} \qquad \begin{cases}a^0\leq a^{x-1}\leq 2\\ 0<a<1\end{cases}$$

Пусть $y=x-1$

Если решение отн. $y$ – отрезок длинной 2026, то отн. $x$ тоже и наоборот.

$$\begin{cases}a^0\leq a^y\leq a^{\log_a 2}\\ 0<a<1\end{cases}$$

$$0\geq y\geq \log_a 2$$

$\log_a 2$ ... $0$ ... $y$

Т.к. длина отрезка по условию 2026, то $\log_a 2=-2026$

$$\log_a 2=-2026$$

$$\log_2 a=-\frac{1}{2026}=\log_2 2^{-\frac{1}{2026}}$$

$$a=2^{-\frac{1}{2026}}=\frac{1}{2^{\frac{1}{2026}}}=\frac{1}{\sqrt[2026]{2}}$$ – подходит под усл. и ОДЗ

II $a>1$

$$t=a^{x-1}$$

$$(a^{x-1}-1)(a^{x-1}-2)\geq 0$$

$$(t-1)(t-2)\geq 0$$

$1$ ... $2$ ... $t$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l} t\leq 1\\ t\geq 2\end{array}\right.\\ a>1\end{cases} \qquad \begin{cases}\left[\begin{array}{l} a^{x-1}\leq 1\\ a^{x-2}\geq 2\end{array}\right.\\ a>1\end{cases}$$

Пусть $y<x-1$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>1\\ a^{y}\leq 1\end{cases}\\ \begin{cases}a>1\\ a^y\geq 2\end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} y=0\\ \begin{cases}a>1\\ a^y\geq 2\end{cases} \text{ – луч}\end{array}\right. \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ отрезка быть не может.

Ответ: $a=\frac{1}{\sqrt[2026]{2}}$

63-09-44-49 (123.5)

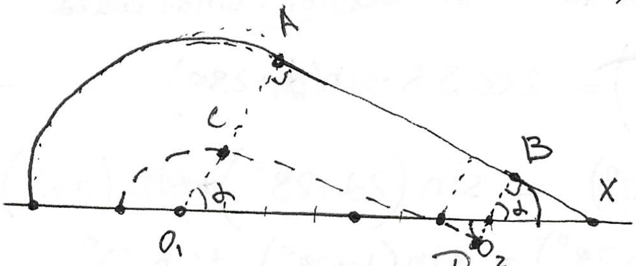
чистовик

Задача 7.

Т.к. ~~В~~ линия пути симметрична относительно линии центров, то рассмотрим только верхнюю "половину" а потом умножим результат на 2. $O_1$ - центр большей окр-ти; $O_2$ - меньшей

A - точка касания большей, B - меньшей

$AC = 1,5$; $BD = 1,5$;

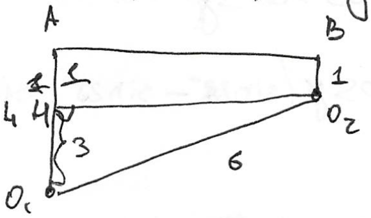


Т.к. прямая касается окр-тей $\Rightarrow$ $O_1A \perp AX$

$O_2B \perp AX$

Рассмотрим прямоуг. трап. $ABO_2O_1$; $O_1O_2 = 6$; $O_1A = r_1 = 4$

$O_2B = r_2 = 1$



$O_2H \perp O_1A \Rightarrow BO_2 = AH = 1 \Rightarrow O_1H = 3$

$\cos\angle HO_1O_2 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle HO_1O_2 = \frac{\pi}{3}$

$HO_2 = AB = CD$

$HO_2 = O_1O_2 \cdot \sin\frac{\pi}{3} = \frac{6\cdot\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$

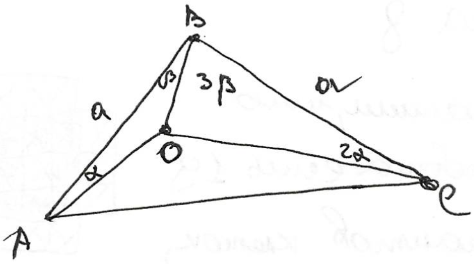
Заметим, что длина половины дорожки состоит из дуги рад. $4 - 1,5 = 2,5$; и угла $\frac{2\pi}{3}$; Отрезка $CD = 3\sqrt{3}$; и дуги рад. $1,5 - 1 = 0,5$ и углом $\frac{\pi}{3}$.

Тогда $\frac{d}{2} = 2,5\cdot\frac{2\pi}{3} + 3\sqrt{3} + \frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{5}{2}\cdot\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6} + 3\sqrt{3} = \frac{11\pi}{6} + 3\sqrt{3}$

$d = \frac{11\pi}{3} + 6\sqrt{3}$

Ответ: $\frac{11\pi}{3} + 6\sqrt{3}$

Задача 6.



Из условия $\Rightarrow$

$\angle BAO = \alpha$

$\angle BCO = 2\alpha$

$\angle ABO = \beta$

$\angle OBC = 3\beta$ $\quad \angle B = 180^\circ - 2\cdot 32^\circ = 180^\circ - 64^\circ = 116^\circ = 4\beta$

$\beta = 29^\circ$.

$\angle A = \angle C = 32^\circ \Rightarrow$ $AB = BC = a$

По т. синусов. $\frac{BO}{\sin\alpha} = \frac{a}{\sin(180^\circ - \alpha - \beta)}$; $BO = a\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha + 29^\circ)}$

По т. синусов. $\frac{BO}{\sin 2\alpha} = \frac{a}{\sin(180^\circ - 3\beta - 2\alpha)}$; $BO = a\cdot\frac{\sin 2\alpha}{\sin(87^\circ + 2\alpha)}$

чистовик

Задача 6 (Продолжение)

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+29^\circ)} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin(2\alpha+87^\circ)}, \quad 2\alpha<32^\circ \Rightarrow \alpha<16^\circ$$

$$\cancel{\frac{\sin\alpha \quad 1}{\sin\alpha\cos 29^\circ+\cos\alpha\sin 29^\circ} = \frac{2\cos\alpha}{\sin 2\alpha\cos 87^\circ+\sin 87^\circ\cos 2\alpha}}$$

$$\sin(2\alpha+87^\circ) = 2\cos\alpha\cdot\sin(\alpha+29^\circ)$$

$\gamma = 2\alpha$

$$\sin(2\alpha+87^\circ) = \sin(2\alpha+29^\circ)+\sin(29^\circ)$$

$$\sin(\gamma+3\cdot 29^\circ) = \sin(\gamma+29^\circ)+\sin 29^\circ$$

$$\sin\gamma\cos(3\cdot 29^\circ)+\cos\gamma\cdot\cos(29^\circ\cdot 3) = \sin\gamma\cos 29^\circ + \cos 29^\circ\cos\gamma + \sin 29^\circ$$

$$\sin\gamma\left(\cos(3\cdot 29^\circ)-\cos 29^\circ\right)+\cos\gamma\left(\sin 29^\circ-\sin 29^\circ\right)=\sin 29^\circ$$

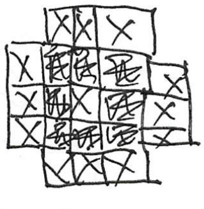
Задача 5.

$$\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y\cdot\operatorname{tg}z = \operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x-y\right) =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y}{\operatorname{tg}(x+y)} = \frac{\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y}{\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y}} = \frac{(\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y)(1-\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y)}{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}$$

Задача 8

Заметим, что у робота есть 19 вариантов клеток,



которые он может покрасить, значит, вероятность $\frac{1}{19}$

Ответ: $\frac{1}{19}$.

63-09-44-49
(123.5)

Задача 2

Чистовик

$100 \cdot 101 \cdot 4 = 40400$

кол-во вар-тов ширины

4 из-за симметрии

кол-во вар-тов высоты

Ответ: 40400 способами

Черновик

$$tg(x+y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{\cos x \cdot \sin y + \sin x \cos y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y}$$

$\sin x = a$

$\cos x = b$

$\sin y = c$

$\cos y = d$

$$\frac{ac+bd}{ab-cd}$$

$$\frac{tg x + tg y}{1 - tg x\, tg y}$$

$$\frac{cb+ad}{bd-cd}$$

180-3

170-26

$$\frac{ac}{ab-cd} =$$

151

170-

$$\frac{180-2\beta-\alpha}{\alpha}$$

$$\frac{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}}{}$$

23

$$\frac{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}}{}$$

$$163-16 = \frac{151-\alpha}{\alpha}$$

$$\frac{151}{\alpha} - 1 \quad \frac{ad+bc}{bd} \quad \frac{1}{2}$$

$$13^9 = 1 - \frac{cd}{bd}$$

a b

$$\frac{\frac{tg x + tg y}{tg x + tg y}}{1 - tg x\, tg y}$$

90+α

$\alpha = 151 - \alpha$

$\alpha = \frac{151}{2}$

$93 - 2\alpha$

$$\frac{151}{\alpha} - 1$$

$2\alpha = 151$

$93 - 2\alpha = -57$

$\alpha < 32$

$93 - 2\alpha < 0$

$2\alpha > \frac{93}{2}$

$\cos(\alpha+\beta) = \cancel{\sin\alpha\cos\beta}\ \cos\alpha$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

$\sin\alpha\cos\beta$

$$\frac{ab\cdot(1-ab)}{a+b}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right) =$$

$$\frac{a^2\cdot(1-a^2)}{2a} =$$

$$\frac{ab-a^2b^2}{a+b}$$

$$0 < x+y < \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}$$

$$\frac{a\cdot(1-a^2)}{2}$$

$$\frac{\sin 151}{\sin\alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin(93-2\alpha)}$$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(151-\alpha)}$$

$\alpha =$

$$\frac{151}{\alpha} - 1 = tg x \cdot tg y \cdot ctg(x+y)$$

$$\frac{ab(1-ab)}{a+b}$$

$90 - \alpha$

$$\frac{\sin(90-\alpha)\cdot\sin(151-\alpha)}{\sin(93-2\alpha)} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\sin 62}{\sin 31}$$

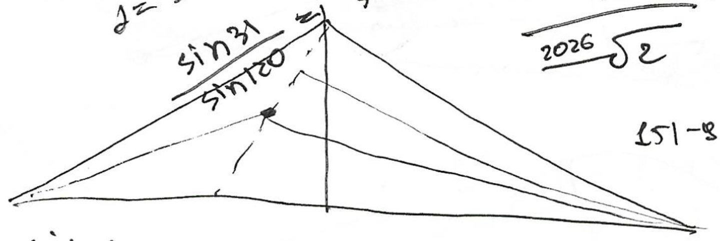
$\alpha = 31$

$$\frac{\sin 31}{\sin 120} =$$

$$\frac{}{2026\sqrt{2}}$$

1, .. 0,1

$20\sqrt{2} > 1 = \sqrt{1}$



$151 - 93 =$

$151 - 100 + 7 = 57$

$$\frac{1}{\beta}$$

$180 - 90 + \beta$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(180-2\beta-\alpha)} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin(93-2\alpha)}$$

151

$$\frac{\sin(90-\alpha)\cdot\sin(151-\alpha)}{\sin(93-2)}$$

$93 - 2\alpha =$

$= 151 - \alpha$

$180 - \beta$

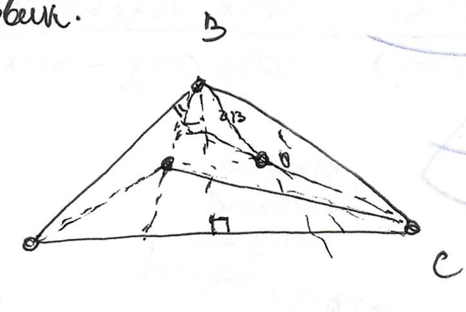
$180 - \beta - 2\alpha$

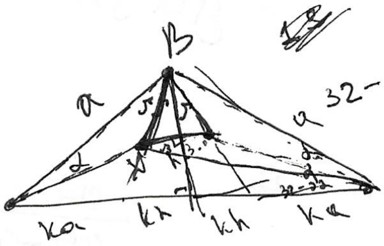
$$\frac{1}{\sin(151-\alpha)} = \frac{2\cos\alpha}{\sin(93^\circ-2\alpha)}$$

$$\frac{2\cos\alpha\cdot\sin(151-\alpha)}{\sin(93^\circ-2\alpha)} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\sin(90-\alpha)\cdot\sin(151-\alpha)}{\sin(93-2\alpha)} = \frac{1}{2}$$

Черновик.




$32-2\alpha+30-\beta$

$180-30+3$

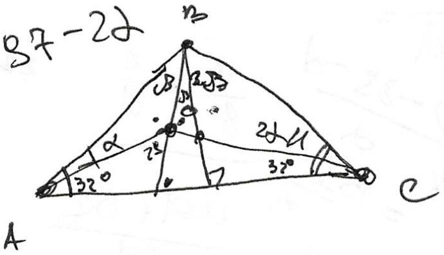
$180-64=120-4=116$

$\angle B=116^\circ$

$32-2\alpha=29$

$2\alpha=$

$87-2\alpha$




$32-\alpha$

$\beta=25+4=29^\circ$

302

$3\cdot 29=90^\circ-3$
$=87$

$\dfrac{180-29^\circ-\alpha}{\alpha}$ ? $83-2\alpha$

$\dfrac{151-\alpha}{\alpha}=\dfrac{151}{\alpha}-1$

$180^\circ-(32-\alpha+32-2\alpha)$

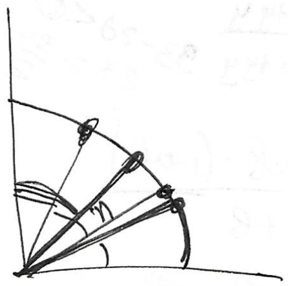
$180^\circ-(60^\circ-3\alpha)=3\alpha+116$

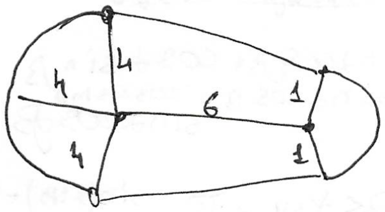
$90-29=61$

$\cancel{32-\alpha+\alpha+\beta}$

$32-\alpha+\alpha+\beta$

$1$ $\quad \frac{\pi}{3}$ $\quad \frac{1}{\sqrt3}$ $\quad \frac{1}{\sqrt7}$ $\quad \frac{1}{3\sqrt5}$



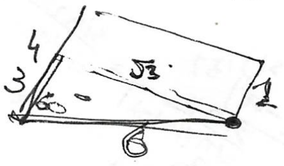



$\dfrac{6}{x}=\dfrac{\sqrt3}{2}$

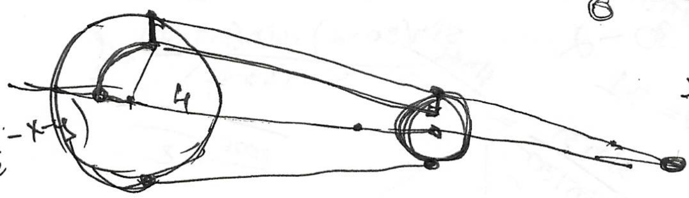
$12=x\sqrt3$

$x=\dfrac{12}{\sqrt3}$

$\dfrac{a+b+c}{3}\le abc$



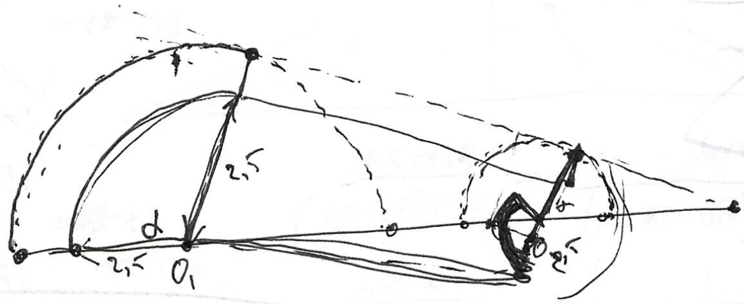

$tg(x$




$tg\left(\frac{\pi}{2}\right.$

$tg\,x\cdot tg\,y\cdot tg\left(\frac{\pi}{2}-x-y\right)$

$\dfrac{tg\,x+tg\,y}{tg(x+y)}$



Черновик.

$$\frac{a^{2x}-3a^{x+1}+2a^2}{\log_2 a-\log_2 1}\geq 0$$

$t=a^x$

$1.\ a>0$

$a^{2x}-\ (a^x)^2+3a\cdot a^x+2a^2$

$t^2+3$

$(a^{x-1}-1)$

$a^{2x-2}+3a^{x-1}+2$

$1\leq a^y\leq 2$

$a^0$

$\sin(180-2\gamma-\alpha)$

$a^0\leq a^y\leq a^{\log_2 a}$

$\sin\alpha\cdot\sin\alpha$ $101\cdot 100\cdot 4$

$101\cdot 101\cdot 4$

$\frac{Bx}{\sin\alpha}=\frac{a}{\sin\gamma}\leq\ 0\geq y\geq\log_2 a$

$\log_2 a=-2026$

$Bx=a\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}=a\cdot\frac{\sin(2\alpha)}{\sin\Delta}$

$a=2^{-2026}=\frac{1}{2^{2026}}$

$abh+2ab+2bh+2ah+4a+4b+4h=2026$

$3^{\log_3 9}=9$

$2ab+2a+2b=2(ab+b+a)=2(a(b+1)+b)=$

$2bh+2b+2h$

$=2((b+1)(a+1)-1)$

$2^{\log_2 a}=a$

$2ah+2a+2h$

$a^{\log_a 2}$

$abh+2(b+1)(a+1)+2(b+1)(h+1)+2(h+1)(a+1)-6=2026$

$90-29=61$

$\log_a 2=-2026$

~~$32-2\alpha+61=83-2\alpha$~~

$\cos\alpha$

$\cos(2\alpha-3^\circ)$

$\frac{\sin 2\alpha}{}$

$\frac{\sin 29^\circ}{\sin 58}$

$23^\circ$

$\cos$

$a=2026$

$2\sin\alpha\cos\alpha$

$23+13=42$

$xyz$

$(x-1)(y-1)(z-1)+$

$2(xy$

$13$

$2xy+2yz+$

$\frac{1}{2}^0\leq\frac{1}{2}^5\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$

$90-3\alpha+8xy=2032$

$\frac{\sin 2\alpha}{\sin(2\alpha+58^\circ+2\alpha)}$

$abh=2032-2(xy+yz+zx)$

$0\geq y\geq -1$

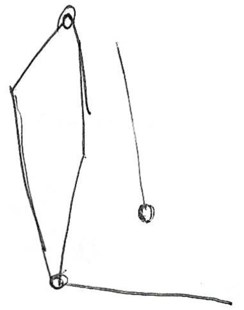
$\frac{abh}{2}=$

$\cos$

$\frac{\sin 116}{\sin}$

$\sin 87^\circ+2\alpha$

Черновик



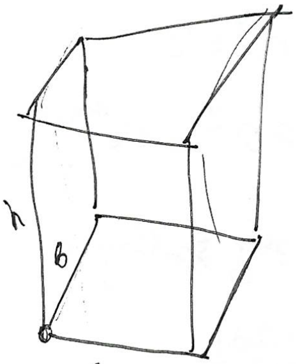
$a, b, h$

$V = abh$

$1013 \cdot 2$

$abh + 2ab + 4bh + 4a + 4b + 4h = 2026$

$ab(h+2) +$



$2ab + 4bh$

$4(bh + a + b + h)$

$b(h+1)$

$4(a+b+h)$

$2(ab+2a+2b)$

$100 \cdot 100 \cdot 4$

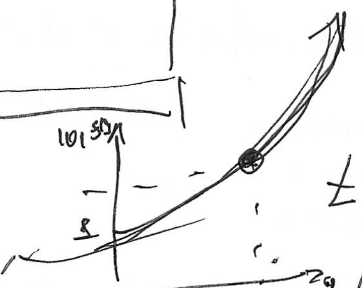
$y=0$

$101$

$\begin{cases} a>1 \\ a^y \leq 2 \end{cases}$

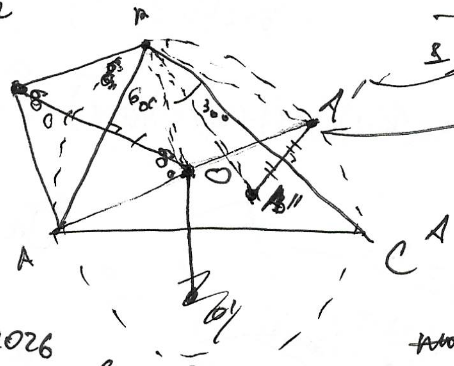
$\begin{cases} a>1 \\ a^y \geq 2 \end{cases}$

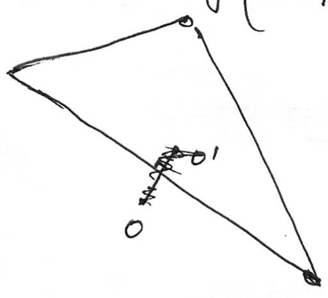
$0,$



$t^2 - 3t + 2$

$(t-1)(t-2)$





$\log_a 2 = -2026$

$= \log_a a^{-2026}$

$a<1$

$OBA' = 60°$

$\angle O'BA'' = 120°$

$2 = a^{-2026}$

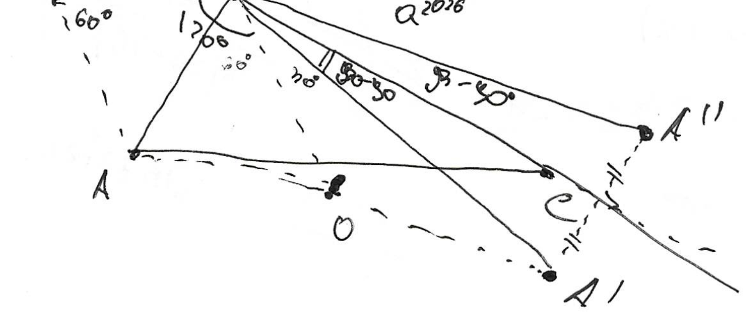
$2 = \frac{1}{a^{2026}}$

$\begin{cases} 1 \leq a^y \leq 2 \\ 0 < a < 1 \end{cases}$

$\angle OBA'' = 60°$

$1^y \leq a^y \leq$

$<$



$30 + 2\beta - 120° = 60°$

$2\beta = 180° + 60° - 30°$

$2\beta =$