0 882251 530006

88-22-51-53
(124.24)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11 класс 7

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Гремицкого Льва Вячеславовича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«29» 03 2026 года

Подпись участника

88-22-51-53
(124.24)

90 (Девяносто) [signature]

Чистовик

№1

$\sqrt{3(1-ctg^2x)} = 2\sqrt{2}\cos x \Rightarrow \begin{cases} 3\left(\cancel{\frac{\cos^2 x \sin^2 x}{\cos^2 x}}\ \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x}\right) = 8\cos x^2 \\ \cos x \geq 0 \\ 1 - ctg^2 x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow -\frac{3\cos 2x}{\sin^2 x} = 8\cos x^2 \Rightarrow -3\cos(2x) = 8(\cos x \sin x)^2 \Rightarrow -3\cos(2x) = \frac{8\sin^2 2x}{4} =$

$\Rightarrow -3\cos(2x) = 2\sin^2(2x) \Rightarrow -3\cos(2x) = 2(1-\cos^2(2x)) \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\cos^2(2x) - 3\cos(2x) - 2 = 0 \Rightarrow$ по т. Виета $\left[\begin{array}{l} \cos(2x) = 2 - \text{н.к.} \\ \cos(2x) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \frac{2}{3}\pi + 2\pi n \\ 2x = -\frac{2}{3}\pi + 2\pi n \end{array}\right. \Rightarrow \end{array}\right.$

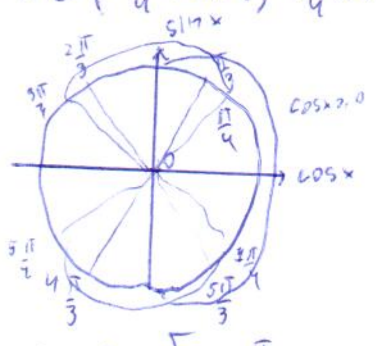
$\Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + \pi n \\ x = -\frac{\pi}{3} + \pi n \end{array}\right. \\ \cos x \geq 0 \\ \cancel{\frac{-\cos(2x)}{\sin^2 x} \geq 0} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + \pi n \\ x = -\frac{\pi}{3} + \pi n \\ x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ +\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) \end{array}$

$\cancel{\Rightarrow -\cos(2x) \geq 0 \Rightarrow 2x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ 1\frac{1}{2}\pi + 2\pi n\right) \Rightarrow}$ $(|\cos x| \leq |\sin x|)$

$\sin^2 x \geq 0$

$\cancel{\Rightarrow x \in}$ $1 - ctg^2 x \geq 0 \Rightarrow 1 \geq ctg^2 x \Rightarrow -1 \leq ctg\, x \leq 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n;\ \frac{3\pi}{4} + 2\pi n\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4} + 2\pi n;\ \frac{7}{4}\pi + 2\pi n\right)$



Ответ: $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n \end{array}\right.$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Чистовик

№2

Пусть число $\overline{abc} = 100a + 10b + c$: $\frac{100a+10b+c}{a+b+c} \equiv_9 0$

Пусть $\overline{a+b+c} \not\vdots 9$, тогда $\frac{100a+10b+c}{a+b+c} \not\vdots 9 \Rightarrow$ противоречие

Пусть степень вхождения 3 в $\overline{abc}$ равна 2, тогда $100a+10b+c = 9p$, где $p \not\vdots 3$

тогда $a+b+c = 9q$ по признаку делимости, тогда $\frac{100a+10b+c}{a+b+c} = \frac{9p}{9q} = \frac{p}{q} \not\vdots 9$, тогда ~~p⋮9~~ p должно делиться на 9 т.е. $\overline{abc} \vdots 81$

Заметим, что все 3х значные числа $\vdots 81$ подходят т.к. у $a+b+c$ степень вхождения 3ки меньше равна двум, кроме числа 999 то $999 \not\vdots 81$ ($a+b+c = 9+9+9 = 27$)

тогда $\frac{100a+10b+c}{a+b+c} \equiv_9 0$ (степень 2,4; степень ≤2)

Числа: 162, 243, 324, 405, 486, 567, 648, 729, 810, 891, 972

243 + 486 + ~~97~~891 = 1620

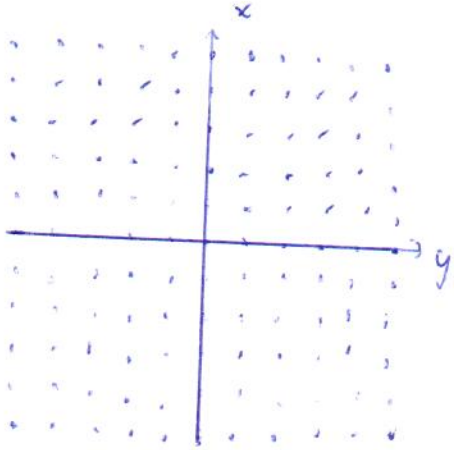
Ответ: 162, 243, 324, 405, 486, 567, 648, 729, 810, 891, 972 ~~(все кратные 81, кроме 999)~~

1620 сумма

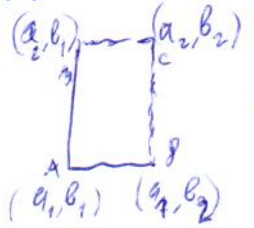
88-22-51-53
(124.24)

Чистовик

№3



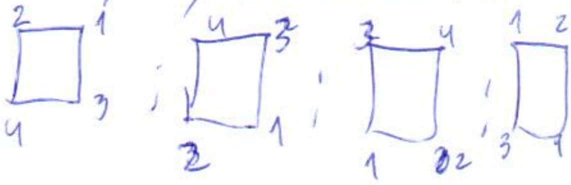
Заметим, что если 3 вершины прямоугольника содержатся в F, то и 4 содержится в F если его стороны параллельны осям



т.к. $|a_2| \le 5$, $|b_2| \le 5$, то $C \in F$

Посчитаем кол-во прямоугольников входящих в F:

Кол-во способов выбрать 1 вершину: $11 \times 11 = 121$, т.к. мы выбрали 1 вершину, то 2ую нужно выбирать на этом же ряду т.е. вариантов 10, 3ю вершину то же самое на этом же столбце 10 вар, а 4 строится сама, тогда всего вар 12100, ~~но т.к. порядок выбора вершин не важен, то всего~~ $\cancel{\frac{12100}{4\cdot3\cdot2\cdot1} = \frac{12100}{24}}$ но



Изначально указан порядок выбора вершин, тогда каждый прямоугольник мы посчитали 4 раза т.е. всего прямоугольников $\frac{12100}{4}$, но каждый прямоугольник содержит 4 прямоугольных Δ и очевидно никакой Δ не содержится в двух прямоугольниках сразу, тогда всего Δ - 12100

~~Ответ: 12100~~

12100 Δ параллельных (x,y) осям с одной координатой по z, тогда всего Δ параллельных осям (x,y): $12100 \cdot 11 = 133100$

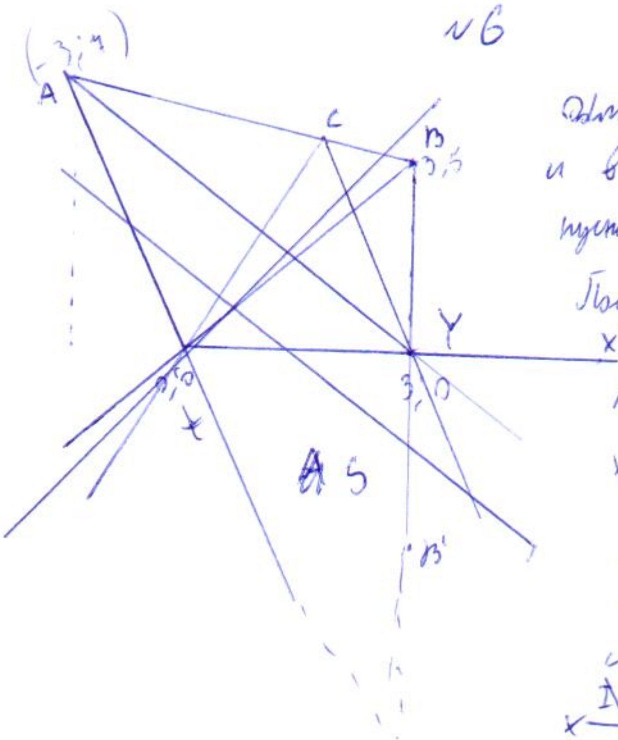
Тогда Δ параллельных (x,z); (y,z) аналогично 133100

Тогда всего Δ - $133100 \cdot 3 = 399300$

Ответ: 399300

Чистовик

№6



Область A^S затемнена в конечной и в начальной позициях

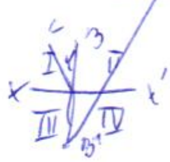
пусть $X(0;0)$ $Y(3;0)$

Посмотрим на точку поворота C

B' – на продолжении BY за Y

X' – на продолжении XY за Y

BB', XX' – делят плоскость на 4 квадрантов S полностью находится в III плоскости



А отрезок CY находится в I, т.е. его продолжение в IV плоскости и он освещён. Из чего следует от него

Значит в III плоскость его свет (который находится справа от CY не попадёт.

Аналогичные суждения для CX, тогда S это та область которая нам нужна.

$$\begin{cases} 7 = -3k_1 + b_1 \\ 0 = 0 + b_1 \end{cases} \Rightarrow b_1 = 0 \Rightarrow k_1 = -\frac{7}{3} \Rightarrow \text{прямая через AX: } y = -\frac{7}{3}x$$

$$\begin{cases} 0 = 3k + b_2 \\ 5 = 3k + b_2 \end{cases} \Rightarrow x = 3 \text{ прямая через BY, тогда пересечение: } \begin{matrix} x = 3 \\ y = -\frac{7}{3}x \end{matrix} \quad Z(3;-7)$$

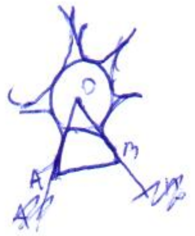
$ZY = 7$; $XY = 3$; $\triangle ZXY$ – прям $\Rightarrow S = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 7 = 10,5$

Ответ: ~~10,5~~

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Чистовик

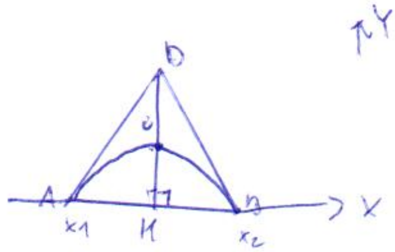
№5



Т.к. параболы касаются, то можно провести общую кас. в этой точке т.к. фигура симметрична отн. центра (O) то кас. проходит через центр.

Пусть AO, OB - кас. (A, B - точки касания), тогда $\angle AOB = \frac{360}{6} = 60^\circ$ т.к. правильный шестиугольник и $\angle OAB = \angle OBA$ из симметрии

$\frac{180-60}{2} = 60^\circ$, тогда $\triangle AOB$ - равностор. $AB = 1 \Rightarrow OA = OB = 1$



пусть $A(x_1)$, $B(x_2)$

OA касается Cx^2 в точке x_1, тогда

$f'(x_1) = 2Cx_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ т.к. $\sin\angle OAB = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ($=60^\circ$)

OB кас. Cx^2 в точке x_2: $f'(x_2) = 2Cx_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

т.к. по условию $\begin{cases} (x_2 - x_1) = 1 \\ 2Cx_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 2Cx_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow -\sqrt{3} = 2C(x_2 - x_1) \Rightarrow C = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Пусть C - вершина параболы, тогда т.к. $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x \Rightarrow C(0;0)$

A, B - симметричны отн. OC, тогда $\begin{cases} x_2 - x_1 = 1 \\ |x_2| = |x_1| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 0,5 \\ x_1 = -0,5 \end{cases}$

$f(0,5) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{8}$

H - высота из O: $H = OB \cdot \sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

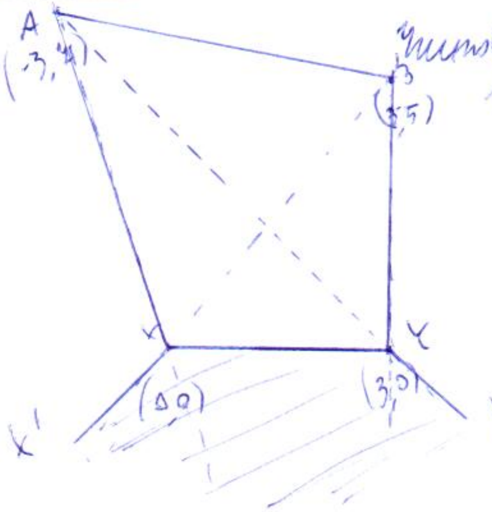
$CH = |f(0,5)| = \frac{\sqrt{3}}{8}$ т.к. у H и B одинаковый y, тогда

$CO = OH - CH = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{8} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$

C - вершина и т.к. картинка симметрична то C - касания окр (парабола симметрична отн. своей вершины)

значит OC - радиус

Ответ: $\frac{3\sqrt{3}}{8}$



Чистовик №6

$X(0,0)$; $Y(3,0)$

X' лежит на BX за X

Y' лежит на AY за Y

Всё что лежит сверху (на рисунке) от XY очевидно всегда освещено.

В плоскости угла ABX: 

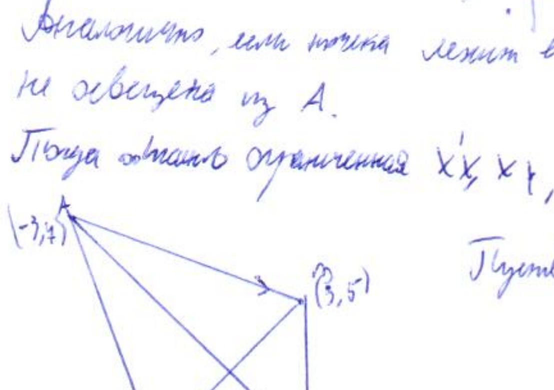
из любой точки видно полностью отрезок AB, а значит плоскость этого угла освещена всегда.

Аналогично с углом BAY.

Заметим, что если точка лежит в XBY ниже XY, то она не освещена в точке B: 

Аналогично, если точка лежит в XAY ниже XY, то она не освещена из A.

Тогда область ограниченная $X'X$, XY, YY' подходит, а остальные нет.



Пусть (α - плоскость земли) $E = \alpha \cap AX$

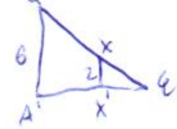
$D = \alpha \cap BY$

$C = \alpha \cap BX$

$F = \alpha \cap AY$

Тогда т.к. A', X' - проекция A, X на α

$AA' = 6$, $XX' = 2$, то:



из подобия: $\frac{AA'}{XX'} = \frac{AE}{XE} = 3$

$\Rightarrow AX : XE = 2$

аналогично $AY : YF = BY : YD = BX : XC = 2$

светлячок движется непрерывно, линейно из AB, тогда и F и D движутся линейно, и E и C движутся линейно

Тогда площадь заштрихованной части это площадь $CXYFE$

D - лежит на BY, где $B(3;5)$, $Y(3;0)$ => прямая $x=3$

$BY = 5-0 = 5 \Rightarrow YD = 2{,}5 \Rightarrow D = (3, -2{,}5)$

C симметрична D отн. начала координат, с коэффициентом $-2 \Rightarrow C(-1{,}5; -2{,}5)$

$S_{XYDC} = \frac{XY+CD}{2} \cdot h_1 = \frac{3+1{,}5}{2} \cdot 2{,}5 = \frac{4{,}5}{2} \cdot 2{,}5 = \frac{15}{4} \cdot \frac{5}{2} = \frac{75}{8}$

$A(-3;7)$; $Y(3;0)$ по x: $AY=6$; по y: $AY=7$ $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{по } x: YF = \frac{6}{2} = 3 \\ \text{по } y: YF = \frac{7}{2} = 3{,}5 \end{array}\right. \Rightarrow F(3+3;\ 0-3{,}5) \Rightarrow F(6; -3{,}5)$

$AX : XE = AY : YF \Rightarrow \Delta AXY \sim \Delta AEF \Rightarrow XY = \frac{2}{3}EF \Rightarrow EF = 4{,}5$

$XY \parallel EF$ ~~$XY \parallel EF$~~

Аналогично $\left[\begin{array}{l} CD \parallel XY \\ XY \parallel EF \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} CD \parallel EF \\ CD = 4{,}5 = EF \end{array}\right. \Rightarrow CDEF$ - пар-м

$h_2 = |D \text{ по } y - F \text{ по } y| = (-2{,}5 - (-3{,}5)) = 1$

$S_{CDFE} = EF \cdot h_2 = 4{,}5$

Y' проекция Y на EF, тогда $Y'(3; -3{,}5)$ т.к. $Y' \in EF$, $EF \parallel XY$ - ось координат

$\Delta YY'F$ - прям $\Rightarrow S_{YY'F} = \frac{1}{2} \cdot YY' \cdot Y'F = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot 3 = \frac{21}{4}$

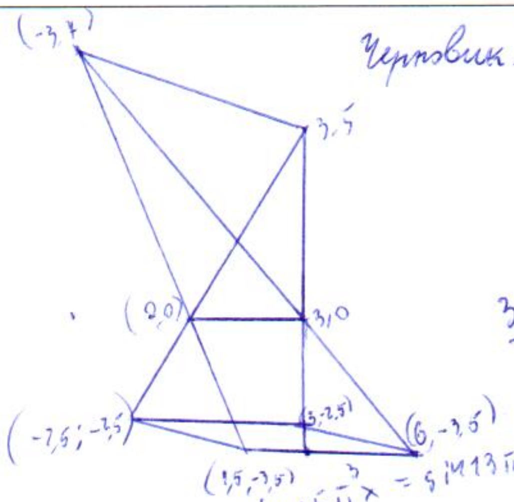
$\Delta Y'DF$ - прям $\Rightarrow S_{Y'DF} = \frac{1}{2} \cdot Y'D \cdot Y'F = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 = \frac{6}{4}$

$S_{\Delta YDF} = S_{\Delta YY'F} - S_{\Delta Y'DF} = \frac{21}{4} - \frac{6}{4} = \frac{15}{4}$

$S_{CXYFE} = \frac{75}{8} + \frac{9}{2} + \frac{15}{4} = \frac{75+36+30}{8} = \frac{141}{8} = 17\frac{5}{8}$

Ответ: ~~$17\frac{5}{8}$~~ $17\frac{5}{8}$

Черновик.



$\frac{3+4,5}{2}\cdot 2,5$ $\frac{7,5}{2}\cdot 2,5$

$\frac{15}{4}\cdot\frac{5}{2}=\frac{75}{8}+\frac{21}{4}+\frac{15}{4}$

4,5

$\sin 15\pi x=\sin 13\pi x \Rightarrow$

$\frac{1}{2}\cdot 3\cdot\frac{7}{2}$ $\frac{21}{4}$

$28\pi x=2\pi n+\pi$

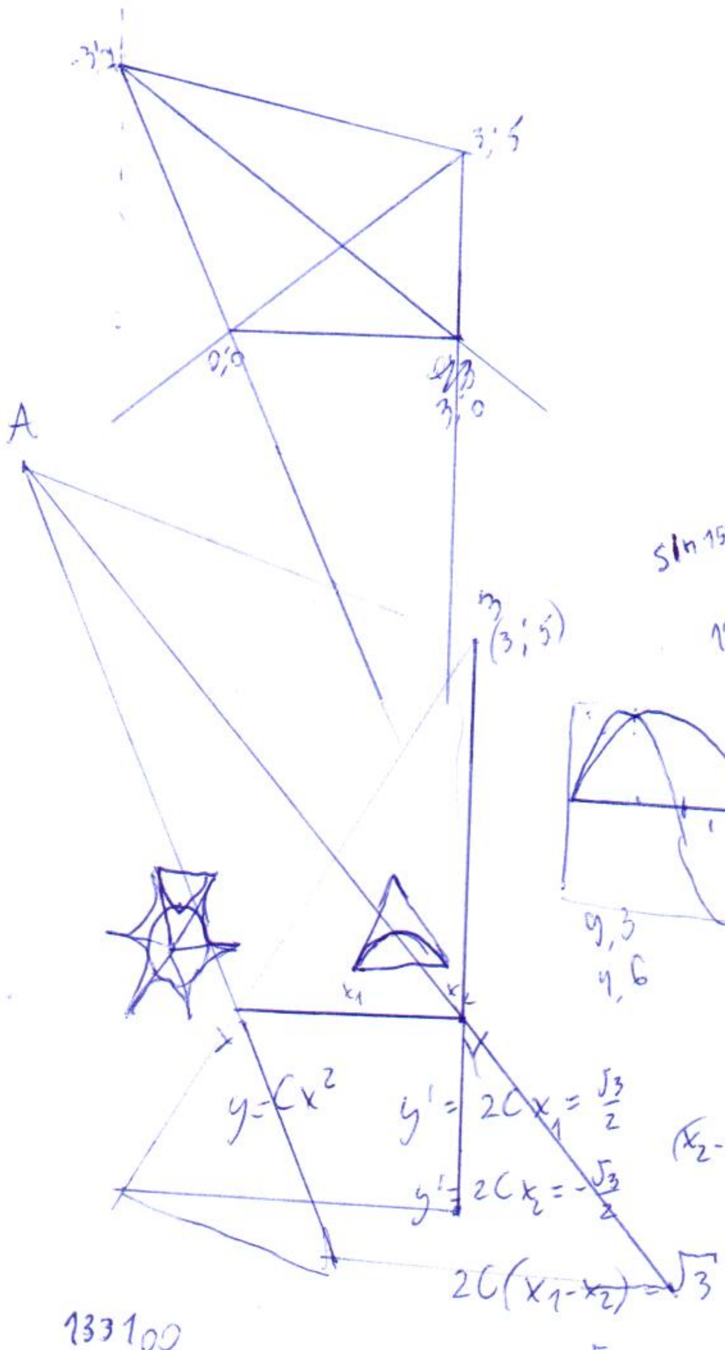
1·3 1,5 $\frac{15}{4}=3,75$

$\frac{75}{8}+\frac{36}{8}+\frac{30}{8}$

66
+75
$\frac{141}{8}$ 66 56

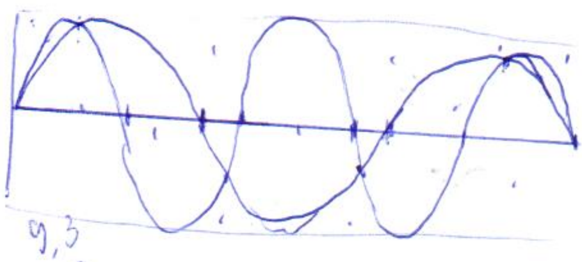
$\frac{175}{8}$

Черновик



$\sin 15\pi x = \sin 13\pi x$

$15\pi x - 13\pi x =$



9,3

4,6

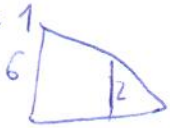
4 19

$y = Cx^2$ $y' = 2Cx_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$y' = 2Cx_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$2C(x_1 - x_2) = \sqrt{3}$

$(x_2 - x_1) = 1$



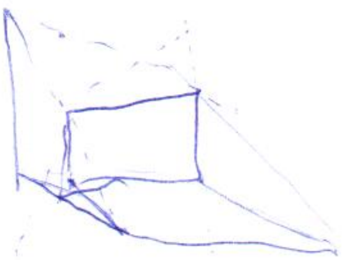
133100

$C = \frac{\sqrt{3}}{(x_1 - x_2)}$ $C = -\sqrt{3}$

$-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 2,5 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

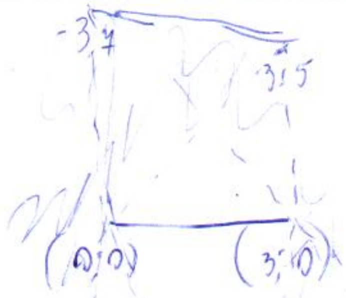
$\times 66$ / 15 / 141

$-\sqrt{3}x$ $-\frac{\sqrt{3}}{8}$ $\frac{\sqrt{3}}{8}$



$3 + \cancel{5} + 11$ 20

Черновик



$\overline{abc}$

$\frac{100a+10b+c}{a+b+c} = 9n$

$1 + \frac{99a+9b}{a+b+c} = 9n$

$\frac{99a+9b}{a+b+c} = 9n-1$

$\equiv 8$
9

$11a + b \equiv 8$
9

16

102 : 3
34

105 : 3
35

108 : 3
36 : 9

117 : 3
39

126 : 3
42

135 : 3
45 : 9

144 : 3
48 : 3

153 : 3
51

162 : 3
54 : 9

81

162 : 9
18 : 9

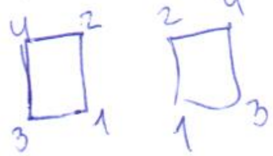
3

1+4+1

9

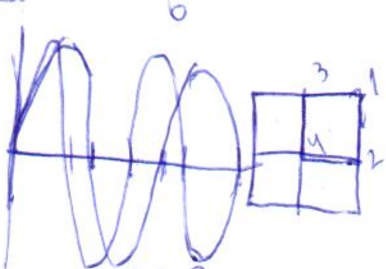
6

6+4+2+2+1
18



-1,5 -1

2 -0,5



9 · 2 · 2

$\frac{36}{44} = \frac{9}{11}$

243
+486
891
1620

1620

810

891
81
972

$1 - ctg^2 x \geq 0$

$1 \geq ctg^2 x$

$|ctg x| \leq 1$

$\sqrt{12100}$

24

5

$\left|\frac{\cos x}{\sin x}\right| \leq 1$

12100 : 44