0 577216 540007

57-72-16-54
(123.3)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 10 класс

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Гуреевой Вероники Константиновной
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Подпись участника

Дата

«29» марта 2026 года

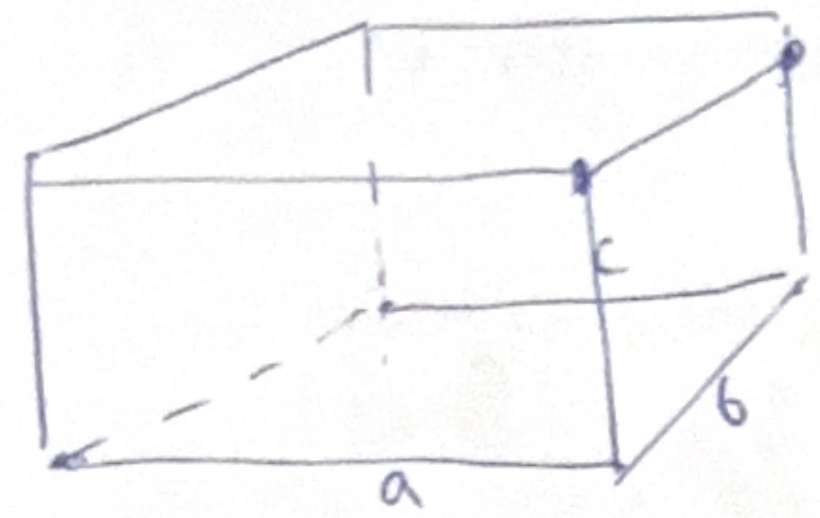
Гур

57-72-16-54 (123.3)

№1 Черновик

$a; b; c$ $\quad V + S + L = 2026$ $\quad V_{min} - ?$

$(a+b)(b+c)(c+a) = 2026$ $\quad abc \ min - ?$



$V = abc$

$S = ab \cdot 2 + bc \cdot 4$

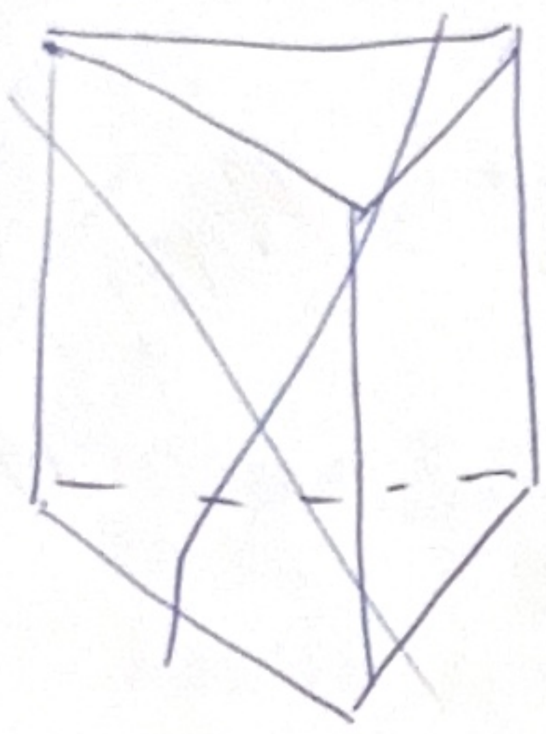
$L = 4c + 2a + 2b$

$\cancel{abc + ab + 4c + 4a + 4b = 2026}$

$\cancel{4(a+b+c) + ab + abc = 2026}$

$\cancel{S = \frac{V}{c}}$

$\cancel{L = (a+b+c) \cdot 4}$



$2026 = abc + 2ab + 2bc + 2ac + 4(a+b+c)$

$= abc + 2(ab + bc + ac) + 4(a+b+c)$

$abc - min \quad a; b; c \in N$ (казахсткие)

$abc = q$

$ab + bc + ac = -r$ $\quad$ если $a; b; c$ - корни уравнения

$a + b + c = t$

$q - r + t$ сумма коэф привед. куб. ур-ния

$\cancel{x^3 + abc x (a+b+c) x^2 + (ab+bc+ac) x + abc} =$

abc - свобод. член

$ab + bc + ac \geq 11 \cdot 2 = 22$

$abc \geq 3$

$a + b + c \geq 6 \cdot 4 = 24$

$\cancel{(a+b+c)^2} = a^2 + b^2 + c^2 +$

$6(a+c) + ac$

min всего $= 49$

$2026 \,|\, 2$, 1013

задача 5

$$\begin{cases} tg x \cdot tg y \cdot tg z - ? \\ x + y + z = \frac{\pi}{2} \end{cases} \qquad z = \frac{\pi}{2} - (x+y)$$

$$tg x \cdot tg y \cdot \underbrace{tg\left(\frac{\pi}{2} - (x+y)\right)}_{ctg(x+y)}$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\sin y}{\cos y} \cdot \frac{\cos(x+y)}{\sin(x+y)} = \frac{\sin x \cdot \sin y}{\cos x \cdot \cos y} \cdot \frac{\cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y}{\sin x \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos x}$$

$abc + 2ab + 2bc + 2ac + 4(a + 4b + 4c$

$\cancel{ab(c+2)}$ $\quad 2c(a+b) + 4(a+b) + 2c($

$(a+b)(2c+4)$

$(a+b)(b+c)(c+a) = (ab + ac + b^2 + bc)(c+a)$

$\cancel{(a+b)(b+c)}($

$abc + a^2b + ac^2 + a^2c + b^2c + b^2a + bc^2 + abc$

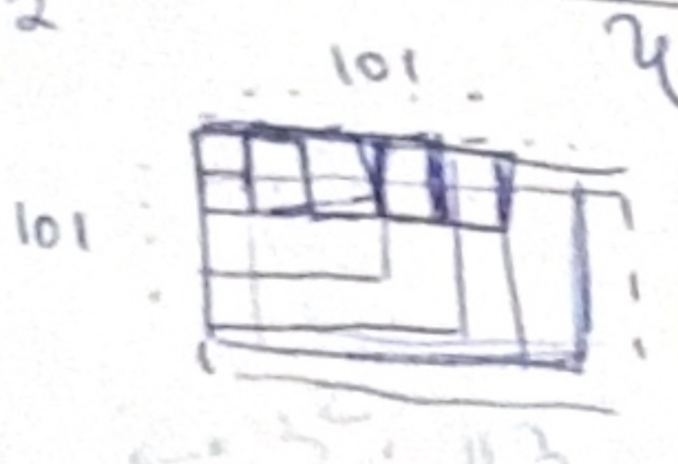
$ab(2+c) + 2c(a+b)$

$(2+c)(2+b)(2+a) = (2b + 2c + 4 + cb)(2+a) =$

$= 4b + 4c + 8 + 2cb + 2ab + 2ac + 4a + acb$

 Черновик

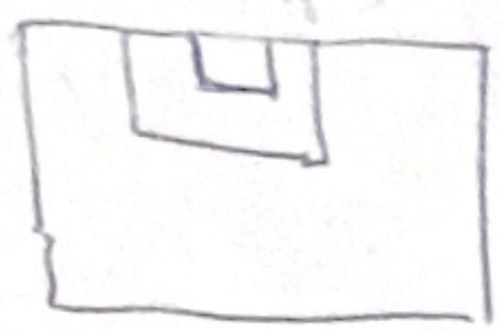
№2



Черновик

~~можно начать с 4 разных углов~~

~~Рассмотрим~~



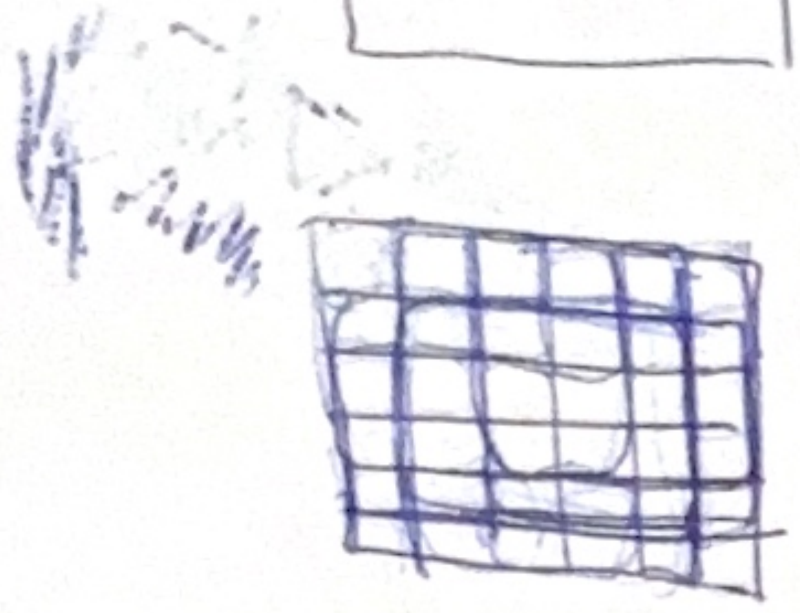
1x1 ~~max~~: по краям ~~101·2+1000·2~~ 101·2 + 99·2

2x2: (101 − 1)·2 + (101 − 3)·2

и т.д. max: квадрат 100ст → 4шт

99 → 9шт

98 →



~~3(n−1)·2 + (n−3)·2~~

3·2 + 3 = 9

max длина 100

min 1

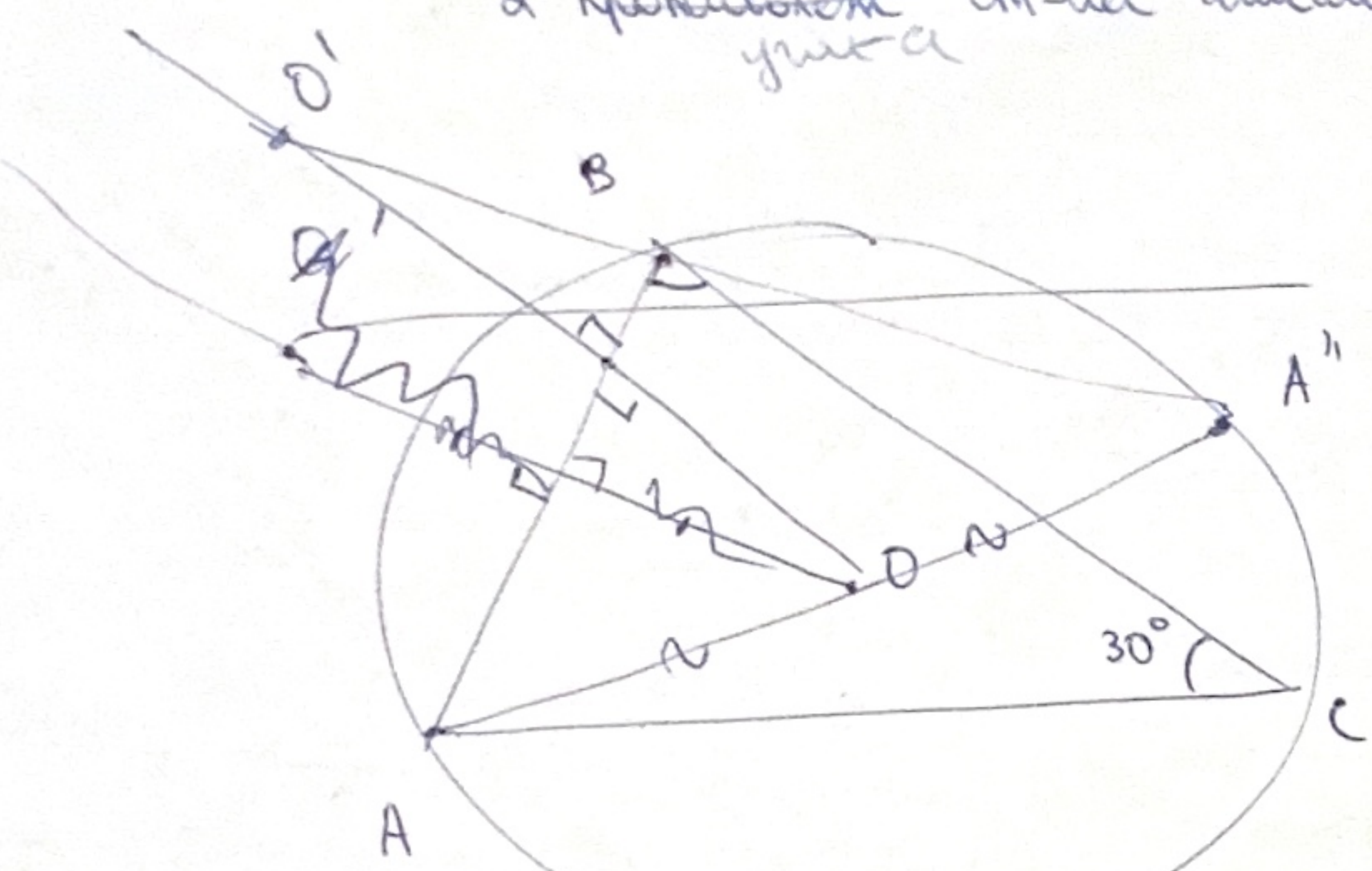
$\frac{24}{36} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

С 1 угла ~~ст-на~~ ширина 100·100 способ

100·100·4

~~3,4,2 ст-на см-что~~

2 ~~противоп~~ ст-на аналогично угла



2018 : 2 = 1009

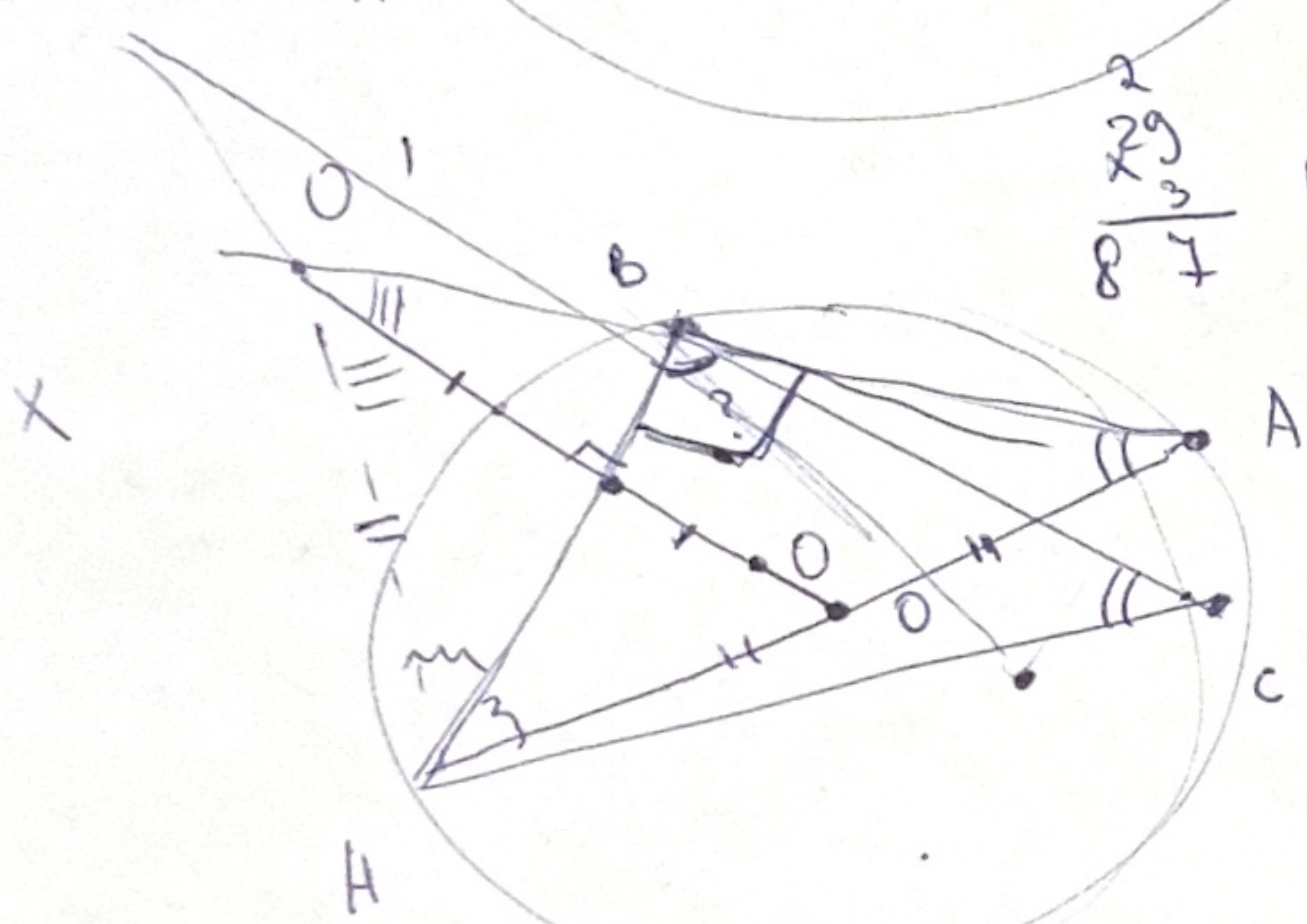
1009 : 13 → 7 (−91), 99

13 · 8 = 104

13 · 7 = 91

1009

$tg\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = tg\left(\frac{\pi}{3}\right)$



29 · 3 = 87

180° − 75 = 105°

113 · 9 = 1017

113 · 3 = 339

1017 · 2 = 2034

151 + 29

1 + 2 +

~~b + b +~~

a + a+b + a+b+b + a+b+b+b

$S = \frac{a_1 + a_2}{2} \cdot n$

$\frac{a + a+b+b+b}{2} \cdot n$

4a + 6b

116 : 4 = 29 (−8, 36)

360 − 267 = 93

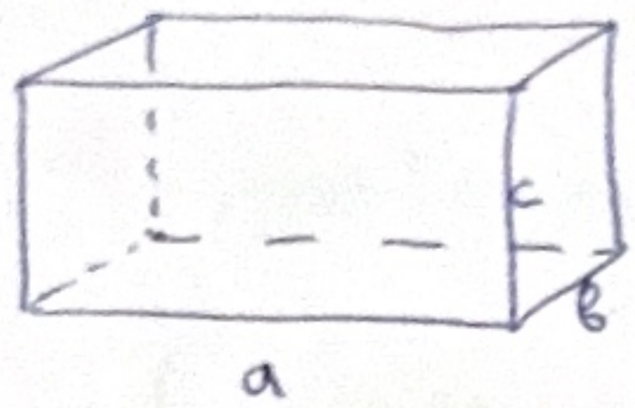
$\log_2 a = 4$

$a^4 = 2$

180 − 64 = 116

Чистовик

№1



$V + S + L = 2026$

$S = 2(ab + bc + ac)$

$L = 4(a + b + c)$

$V = a \cdot b \cdot c$

$abc + 4(a+b+c) + 2(ab+bc+ac) = 2026$

$(2+c)(2+b)(2+a) - 8 = 2026$

$(2+c)(2+b)(2+a) = 20\cancel{18}34$

$20\cancel{18}34 = 2 \cdot 3^2 \cdot 113$

$20\cancel{18}34 = 6 \cdot 3 \cdot 113$

$20\cancel{18}34 = 2 \cdot 9 \cdot 113$

$2034 = 2 \cdot 3 \cdot 339$

$2 + c \geq 3$

$2 + b \geq 3$

$2 + a \geq 3$

1) $2034 = 2 \cdot 6 \cdot 113$, $2034 = 2 \cdot 9 \cdot 113$, $2034 = 2 \cdot 3 \cdot 339$ } не удовл ус-вию $2+b \geq 3$

$2034 = 6 \cdot 3 \cdot 113$

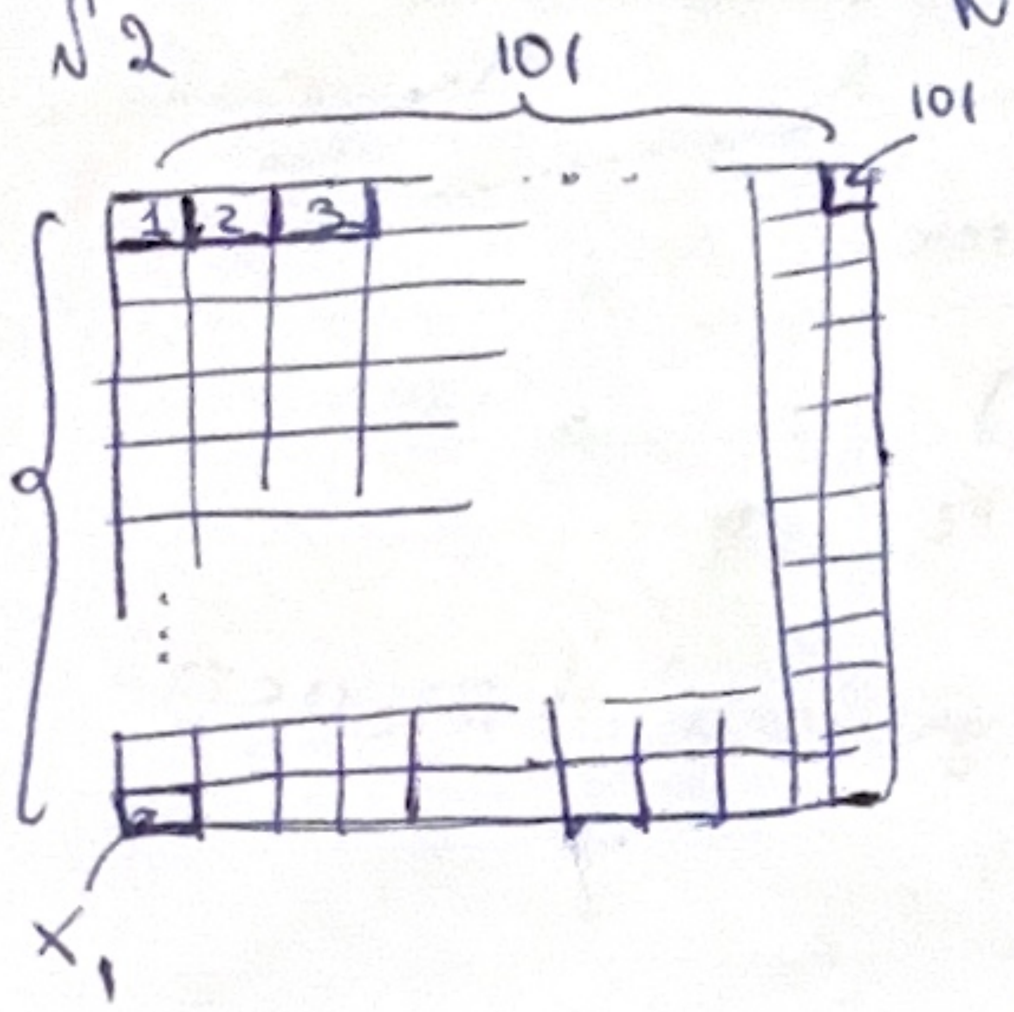
$c = 4$; $b = 1$; $a = 111$ (или $a;b;c$ могут меняться местами)

$V = abc = 444$

Ответ: 444

№2

N всего − ?



1) для крайнего углового квадрата
$N_1 = 100 \cdot 100$

2) для второго:
$N = 99 \cdot 100$

3) для третьего:
$N = 98 \cdot 100$

} т.к. ост. прямоугол. уже учтены в предыдущ

...

101) для 101-го:
$N = 1 \cdot 100$

x) для x_1:
$N = 100 \cdot 100$ ... аналогично до $x_{101} \to N = 100 \cdot 1$

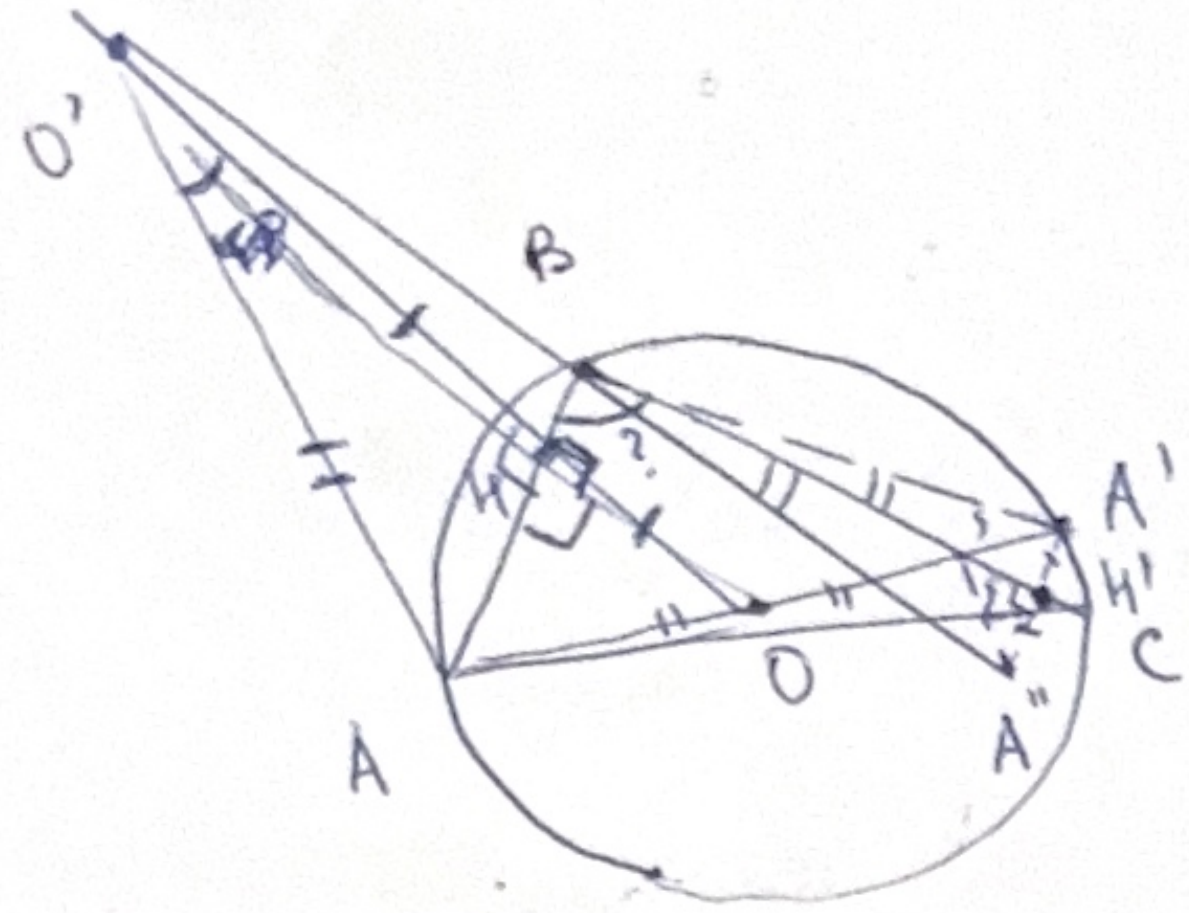
$N_{всего} = 2 \cdot 100(1 + 2 + \ldots + 99) = 2 \cdot 100 \cdot \underbrace{\frac{(1+99)}{2} \cdot 99}_{\text{сумма ар-ой прогрессии}} =$

$= 100 \cdot 100 \cdot 99 = 990000$

Ответ: $N_{всего} = \cancel{99 \cdot 10}\ 990000$

№3

Чистовик



$\angle B - ?$

$\angle BCA = \angle BA'A$ (опора на 1 дугу $\smile AB$)

$HO \perp AB$; $HO = HO'$

$\angle ABA' = 90^\circ$ (опир. на диаметр)

$\left.\begin{array}{l}\angle A'H'B = \angle A''H'B = 90^\circ \\ H'A' = H'A'\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle A''BH' = \triangle H'BA' \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle A''BH' = \angle H'BA'$ $\quad \angle B = 90^\circ - \angle H'BA' = 90^\circ - \angle A''BH'$ (+, если тупоугол $\triangle A$)

$\left.\begin{array}{l}\angle AHO = \angle AO'HO' = 90^\circ \\ HO' = HO\end{array}\right\} \triangle AOH = \triangle AO'H \Rightarrow AO = AO'$

$\angle OAB = \angle OA'H$ $\quad \angle AO'H = \angle AHO$

$\angle O'BA + \angle ABA'' = 180^\circ$

$\angle A''BH' = \angle H'BA' = 90^\circ - \angle H'A''B = 90^\circ - \angle BA'A''$

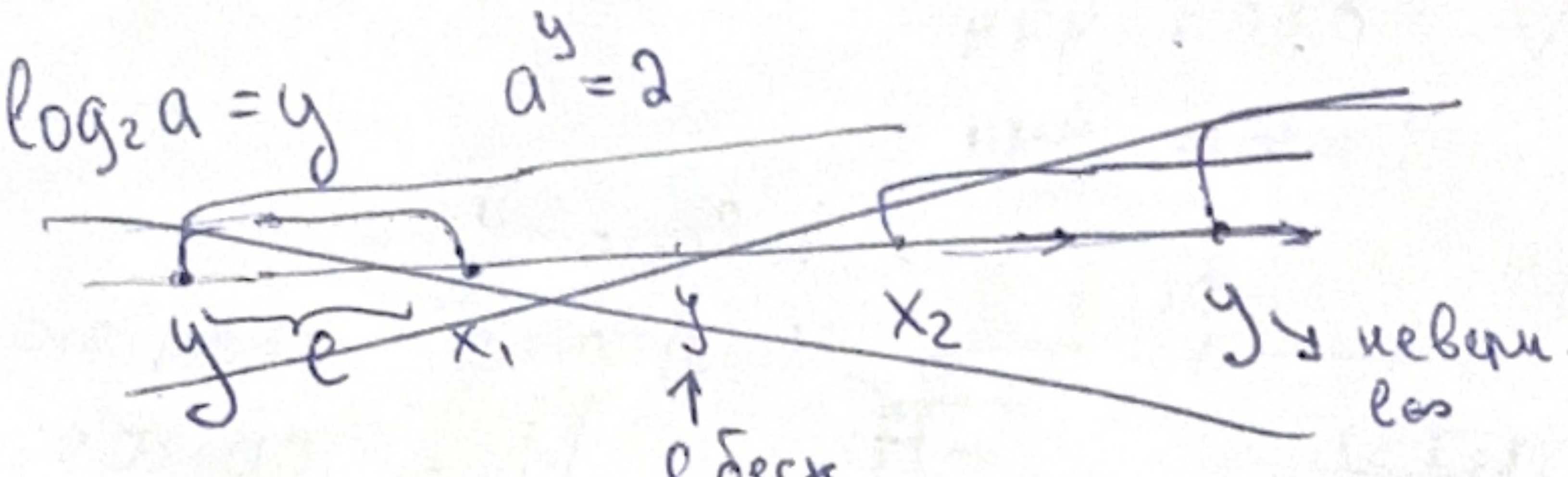
$\angle B = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$ $\quad$ Ответ: 105°

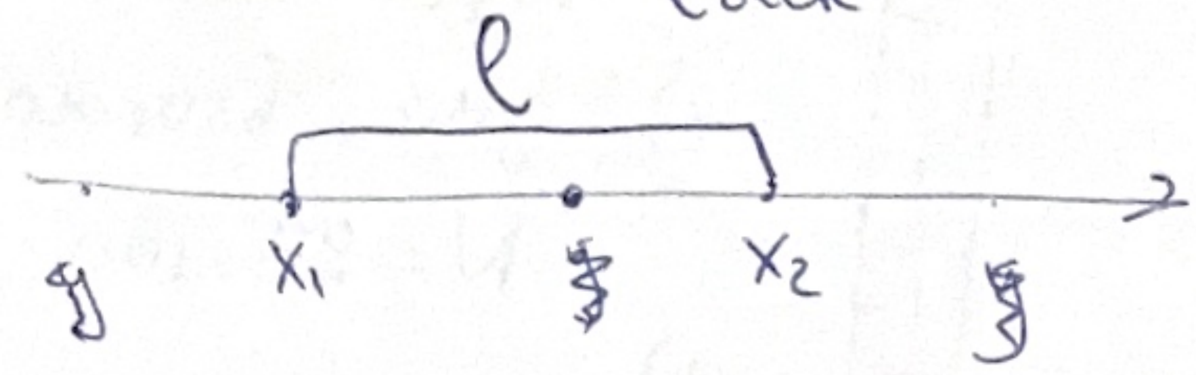
№4

$$\frac{a^{2x} - 3a^{x+1} + 2a^2}{\log_2 a} \geq 0 \qquad l = 2026$$

1) $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\log_2 a > 0 \\ a^{2x} - 3a^{x+1} + 2a^2 \geq 0\end{cases} \\ \begin{cases}\log_2 a < 0 \\ a^{2x} - 3a^{x+1} + 2a^2 \leq 0\end{cases}\end{array}\right.$

$\log_2 a = y$ $\quad a^y = 2$





$\log_2 a > 0 \Rightarrow \begin{cases} a^y = 2 \\ y > 0 \end{cases}$ ~~Нет реш.~~ $\quad \uparrow$ с учетом $\log_2 a < 0$

Ответ: $a = \frac{1}{2}$

№5

Чистовик

$$\begin{cases} x+y+z=\frac{\pi}{2} \\ tgx\cdot tgy\cdot tgz \text{ - ?(max)} \end{cases}$$

$0 < x; y; z \leq \frac{\pi}{2}$

$tg(x;y;z) \in [0;1]$

$tg(x+y+z)=0$

$z=\frac{\pi}{2}-(x+y)$

$\Rightarrow tgx\cdot tgy\cdot tgz = tgx\cdot tgy\cdot (tg(x+y)) = \frac{\sin x\cdot \sin y}{\cos x\cdot \cos y}\cdot \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} =$

$= \frac{\sin x\cdot \sin y\cdot (\sin x\cdot \sin y+\cos x\cdot \cos y)}{\cos x\cdot \cos y\, (\sin x\cdot \cos y+\sin y\cdot \cos x)}$ *

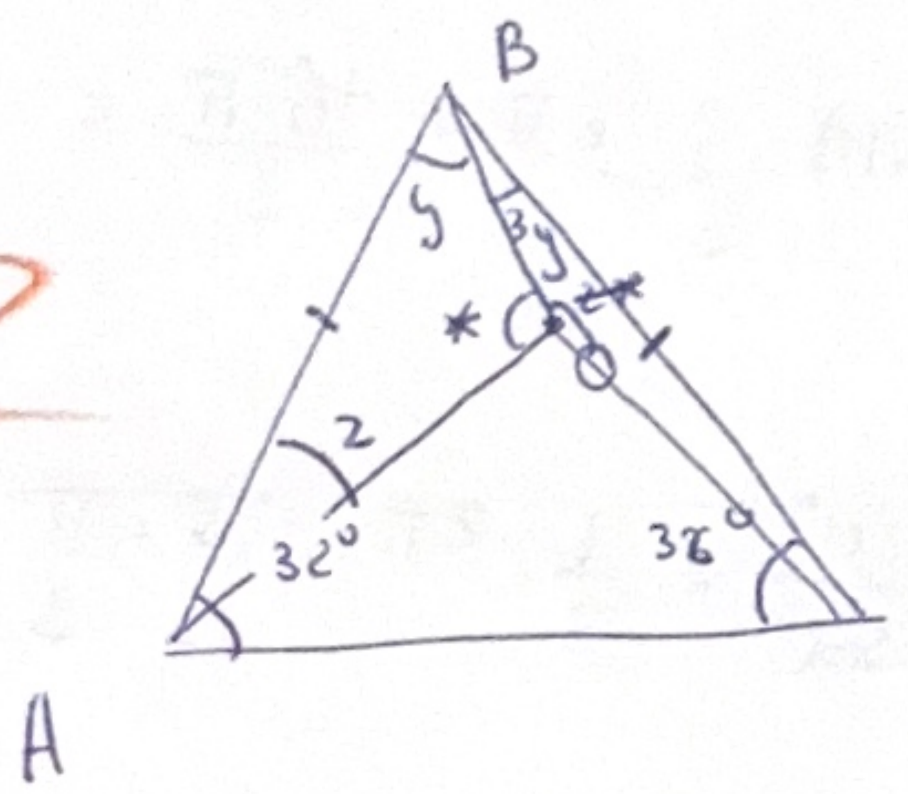
* По н-ву Коши max значение достигнется, когда $tgx=tgy=tgz$

т.к $x+y+z=\frac{\pi}{2} \Rightarrow x=y=z=30^\circ \Rightarrow tgx\cdot tgy\cdot tgz = tg\left(\frac{\pi}{6}\right)^3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 =$

$= \frac{1}{\sqrt{3}^3} = \frac{\sqrt{3}}{9}$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{9}$

№6



$\frac{\angle BOA}{\angle BAO}$ - ? $\frac{\angle BOA}{\angle BAO}=\frac{x}{z}=\frac{151-z}{z}$

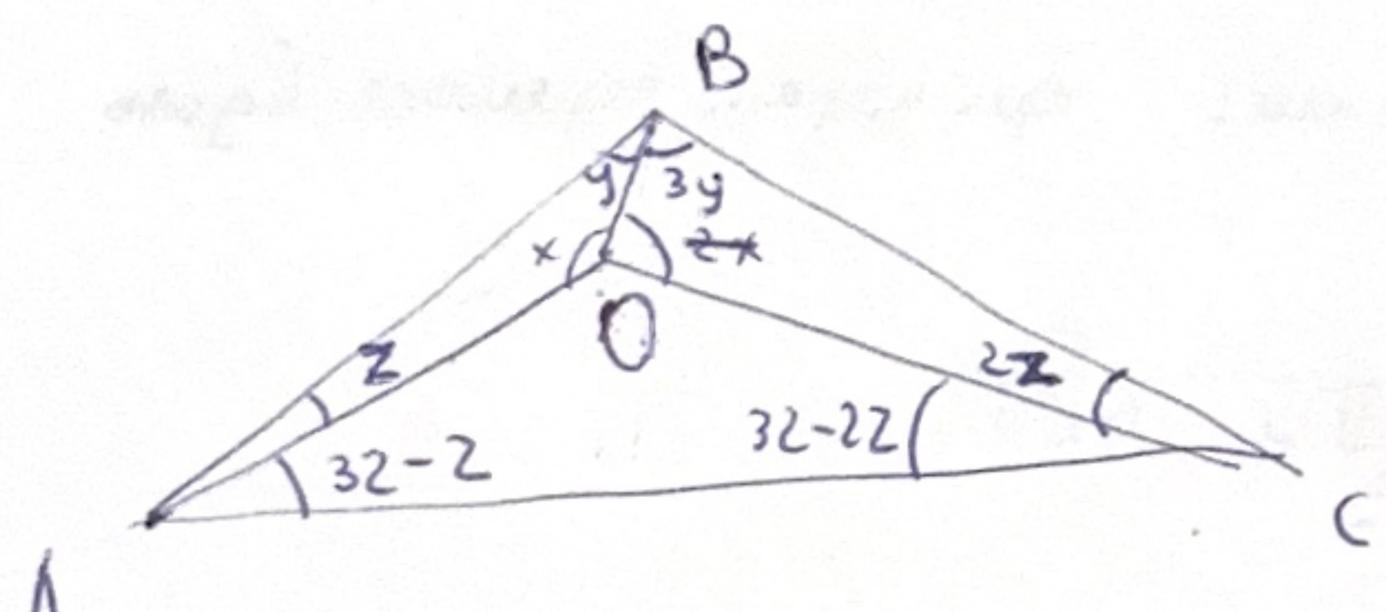
$\angle B=180-64=116^\circ$

$3y+y=116^\circ$

$4y=116^\circ$

$y=29^\circ \Rightarrow \angle ABO=29^\circ$

$\angle OBC=3\cdot 29^\circ=87^\circ$



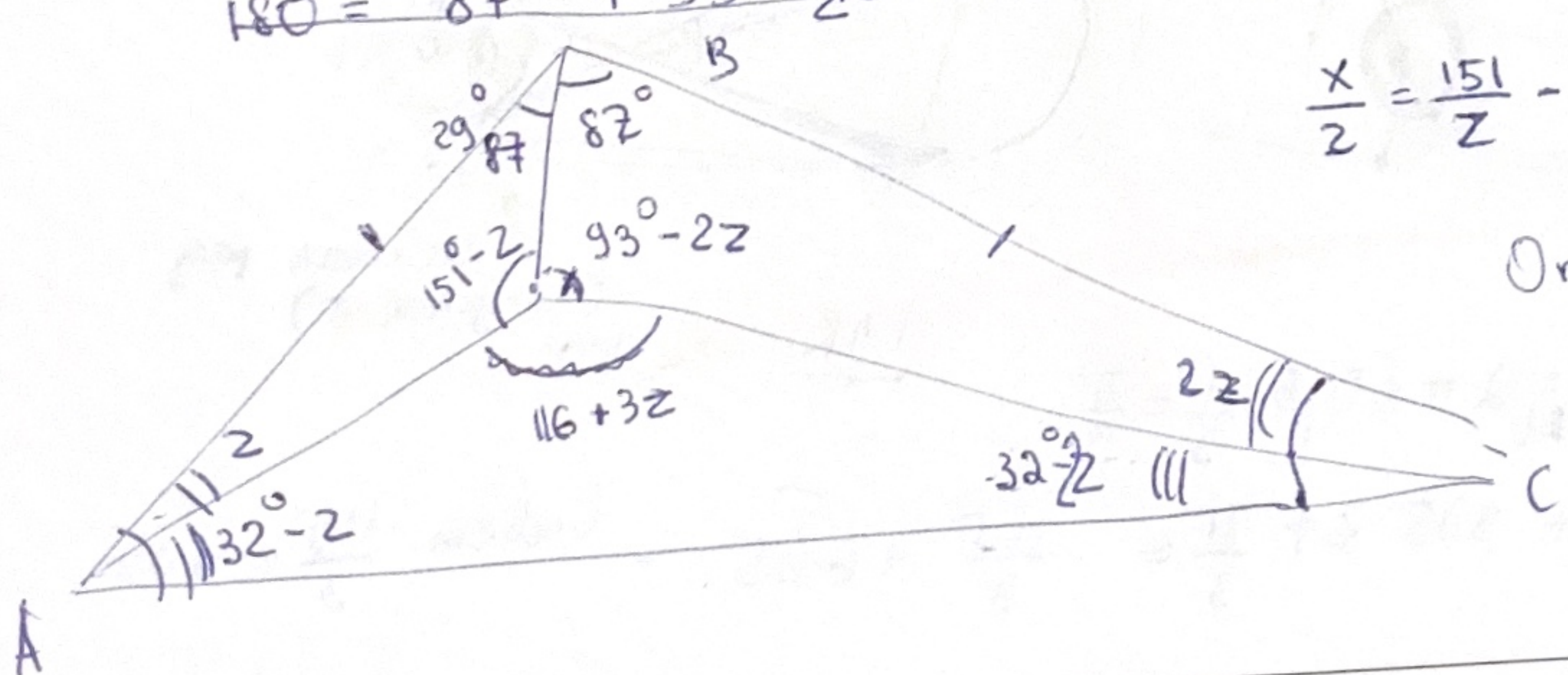
$x=180-z-y=180-29^\circ-z=$

$=151^\circ-z$

$\angle AOC = 180^\circ-64+3z = ~~180~~\ 116+3z$

$\angle BOC = 360-116^\circ-3z-151^\circ+z = 93^\circ-2z$

~~$180^\circ = 87^\circ+93^\circ-2z+2z \Rightarrow 2z=$~~



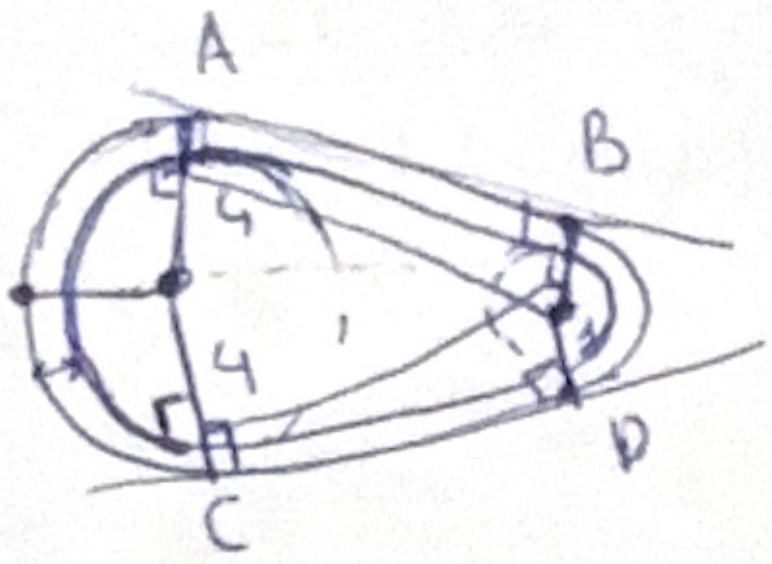
$\frac{x}{z}=\frac{151}{z}-1$

Ответ. 4

 Чистовик

№7

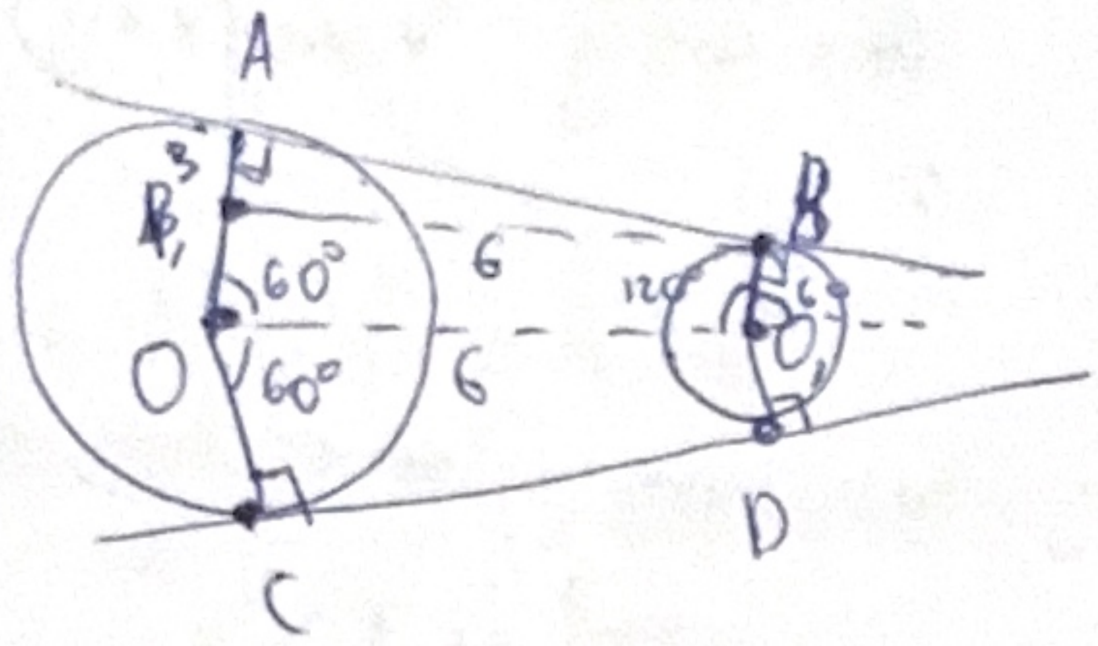
$R=4;\ r=1$



Так как косилка сбрасывает траву перпендикулярно движению -> образ~~ую~~овавшая линия параллельна трассе. (кроме мал круга)

По св-ву кас-ой к окр -> $r, R \perp AB$

$r, R \perp CD$



$B_1B \parallel OO_1$

$B_1B = OO_1 = 6$

$\angle OAB = 90°$

$B_1A = R - r = \cancel{6}\ 4-1 = 3$

$AB = \sqrt{36+9} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

$CD = AB$

Длины дуг окр-ей:

$l_{\text{к всей}} = 2\pi R$ $\quad B_1A = \frac{1}{2} B_1B \Rightarrow \angle ABB_1 = 30° \Rightarrow$

$l_{r\text{ вся}} = 2\pi r$ $\quad \Rightarrow \angle ABB = \angle AOO_1 = 60° \quad \angle OO_1B = 120°$

$(B_1B \parallel OO_1)$

$\angle AOC = 120°$ Сс внутр. сторон

включ. в трассу: $L_{AC} = 2\pi(R - 1{,}5) \cdot \frac{360-120}{360} = \frac{240}{360} \cdot 2\pi \cdot \cancel{(4-1)}\ \cancel{\frac{2}{3} \cdot 8\pi = \frac{16\pi}{3}} =$

$= \frac{2}{3} \cdot 2\pi \cdot 2{,}5 = \frac{10\pi}{3}$

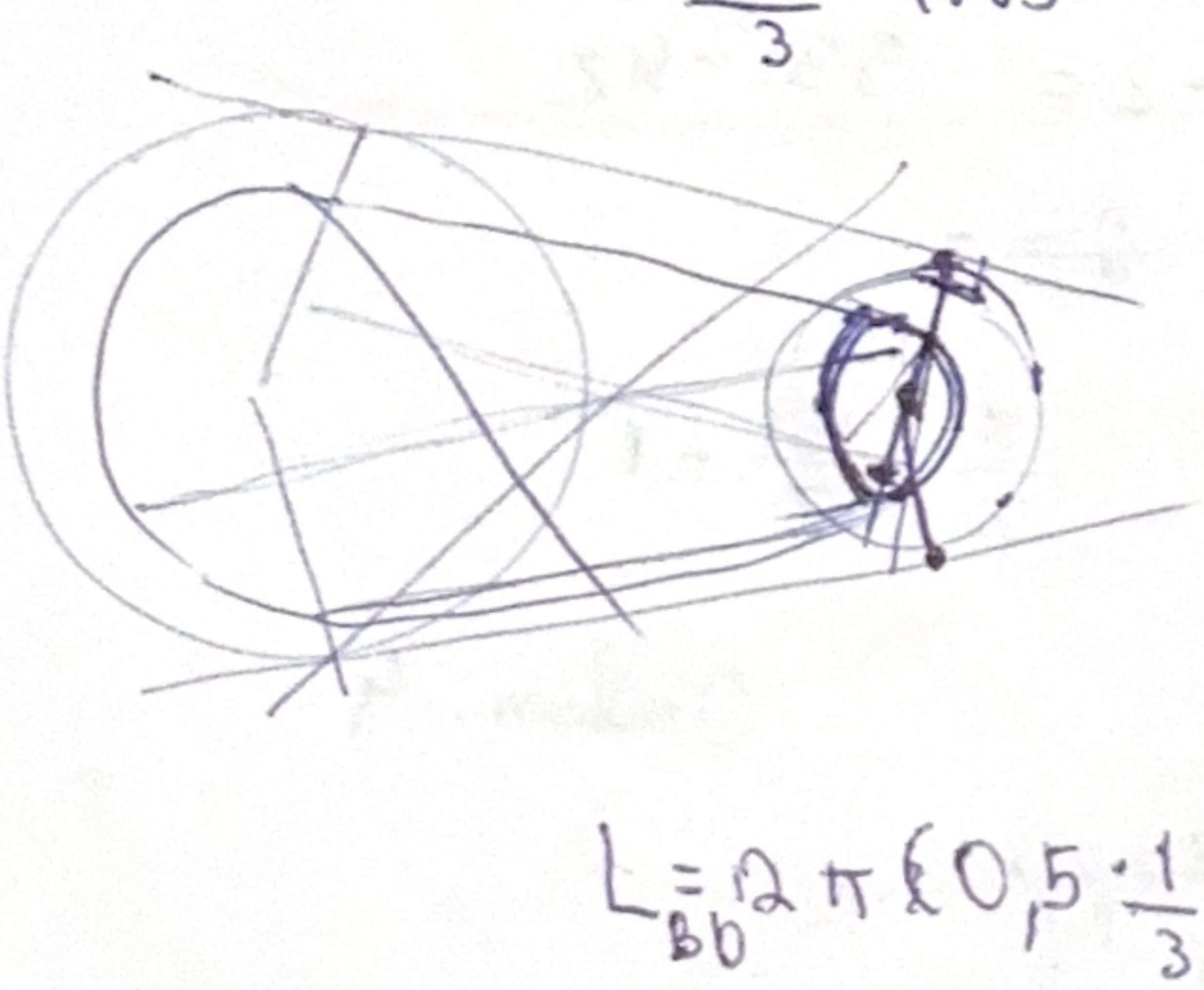
включ в трассу ~~$L_{BD} = 2\pi(r - 1{,}5) \cdot \frac{360°}{}$~~ $\frac{120°}{360°} = \frac{1}{3} \cdot 2\pi \cdot 0{,}5 = \frac{\pi}{3}$

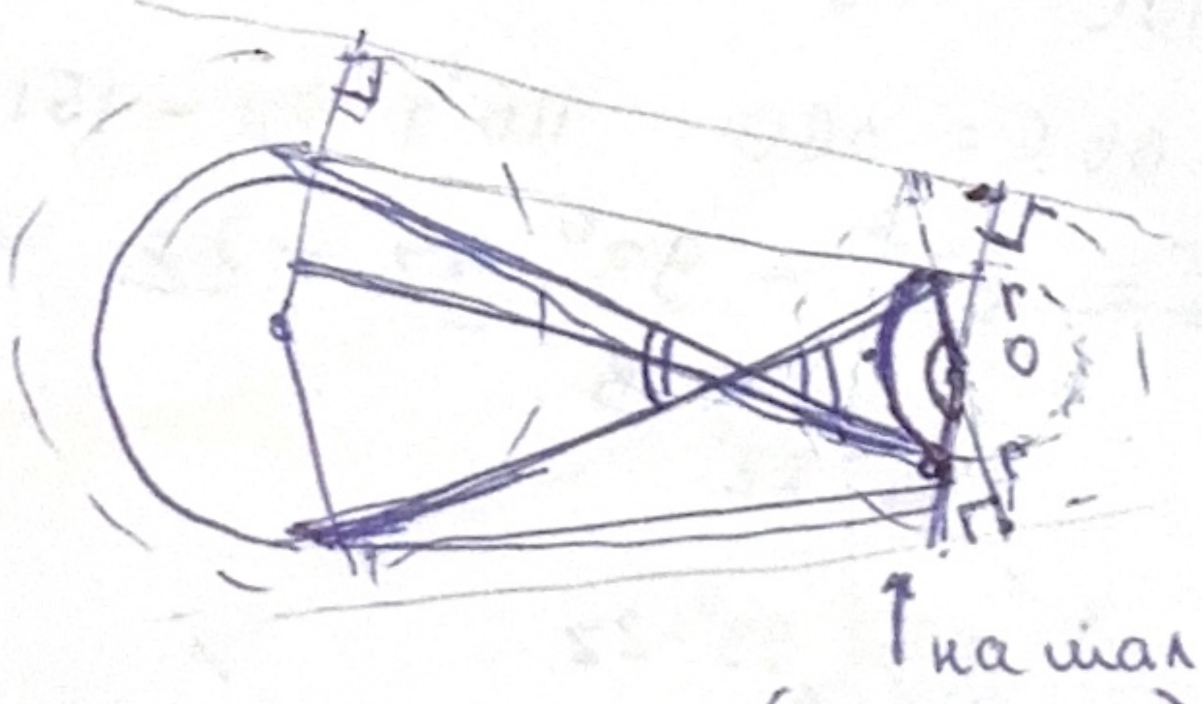
$1{,}5 > r$

Длины AB и CD - не изменились при парал. переносе вдоль радиусов $\perp$ лин.

~~$L = \frac{10\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + 3\sqrt{5} \cdot 2 = \frac{11\pi}{3} + 6\sqrt{5}$~~

~~Ответ: $L = \frac{11\pi}{3} + 6\sqrt{5}$~~



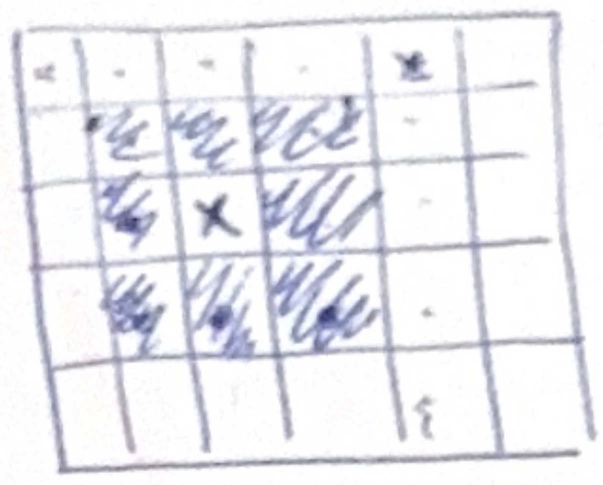


$r \parallel R \Rightarrow \angle 120°$

$L_{BD} = 2\pi \cdot 0{,}5 \cdot \frac{1}{3} = \frac{\pi}{3}$

$L = \frac{10\pi}{3} + 3\sqrt{5} \cdot 2 + \frac{\pi}{3} = \frac{11\pi}{3} + 6\sqrt{5}$. Ответ: $\frac{11\pi}{3} + 6\sqrt{5}$

№8



– P (закрасит клетку x) – ?

Если у Казимира уже есть нарисованное кольцо, он может закрасить 12 клеток по периметру и 1 в центре

$P = \frac{1}{13}$; 13 – все исходы

1 – подходит

(Если нужно учесть вероятность построения самого кольца:

1) после закрашивания 1 клетки $P = \frac{1}{2}$, далее $P = \frac{1}{3}$,

$P = \frac{1}{3}$; $P = \frac{1}{3}$; ~~P =~~ .... $P = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^6$

Ответ: (если учитывая вероятность пол-ия кольца: $P = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^6 \cdot \frac{1}{13}$