0 629933 890009

62-99-33-89
(124.25)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 1

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Гусева Андрея Алексеевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата «29» марта 2026 года

Подпись участника

62-99-33-89
(124.25)

Чистовик.
№1

Решить уравнения: Ограничение: $\cos x \neq 0$

$$\sqrt{6(1-tg^2x)} = 4\sin x \Leftrightarrow \begin{cases} 6(1-tg^2x) = 16\sin^2 x \ (1) \\ 4\sin x \geq 0 \end{cases} (*)$$

$$(1)\ 6 - 6tg^2x = 16\sin^2 x \,\Big|\cdot \cos^2 x$$

$$6(\cos^2 x - \sin^2 x) = 16\sin^2 x\cos^2 x = \cancel{4\sin^2} 4(2\sin x\cos x)^2$$

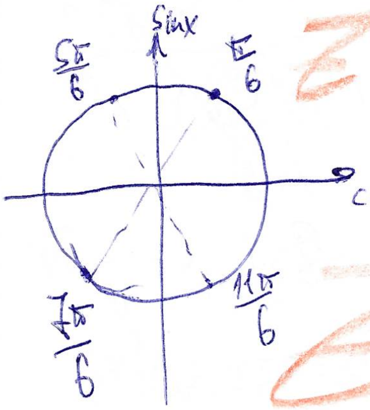
$$\Updownarrow$$

$$6\cos 2x = 4\sin^2 2x = 4(1-\cos^2 2x) \Leftrightarrow 4\cos^2 2x + 6\cos 2x - 4 = 0$$

$$D = 36 + 4\cdot 4\cdot 4 = 100 \quad \left[\begin{array}{l} \cos 2x = \frac{-6+10}{8} \\ \cos 2x = \frac{-6-10}{8} = -2 \text{ (не удовл.)} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k\in\mathbb{Z}$$

Отметим подходящие корни на единичной окр-сти:



вспомним, что в (*) $4\sin x \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin x \geq 0 \Rightarrow$ нам подходят корни:

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \end{array}\right.,\ k\in\mathbb{Z}$$

~~По условию~~ по Под ограничение $\cos x \neq 0$ эти корни тоже подходят, т.к. $\cos\left(\frac{\pi}{6}+2\pi k\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, а $\cos\left(\frac{5\pi}{6}+2\pi k\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{6}+2\pi k;\ \frac{5\pi}{6}+2\pi k\right\},\ k\in\mathbb{Z}$

Чистовик. №2

$A=\{n\in\mathbb{N} \mid \frac{n}{S(n)} \vdots 9\}$, где $S(n)$ - сумма цифр числа $n\in\mathbb{N}$

Оценка:

Заметим, что $S(n) \underset{9}{\equiv} n$ (1) Пусть $k=\frac{n}{S(n)}$, $k\in\mathbb{N}$.

Так как $k \vdots 9$, то и $n \vdots 9$, но тогда из (1) следует, что и $S(n) \vdots 9$ (т.к. $S(n)\underset{9}{\equiv} n$). Значит, если $\begin{cases} n \vdots 9 \\ S(n) \vdots 9 \\ \frac{n}{S(n)} = k \vdots 9 \end{cases}$ $\Rightarrow$ то $\boxed{\frac{n}{S(n)} \vdots 81}$ - чтобы сохранилась делимость к на 9.

Переберём все трёхзначные числа, делящиеся на 81 и удовлетворяющие условиям задачи:

1) $n=162$ $S(n)=9$ $\frac{n}{S(n)}=18 \vdots 9$

2) $n=243$ $S(n)=9$ $\frac{n}{S(n)}=27 \vdots 9$ 3) $n=324$; $S(n)=9$ $\frac{n}{S(n)}=36 \vdots 9$

4) $n=405$ $S(n)=9$ $\frac{n}{S(n)}=45$ 5) $n=486$ $S(n)=18$ $\frac{n}{S(n)}=$ $=27 \vdots 9$ 6) $n=567$ $S(n)=18$ $\cancel{\frac{n}{S(n)}}$ $n \not\vdots S(n)$, т.к $n \underset{2}{\equiv} 1$, а $S(n)\underset{2}{\equiv} 0$

7) $n=648$ $S(n)=18$ $\frac{n}{S(n)}=36 \vdots 9$

8) $n=729$ $S(n)=18$ $n \not\vdots S(n)$, т.к. $n\underset{2}{\equiv}1$, а $S(n)\underset{2}{\equiv}0$

9) $n=810$ $S(n)=9$ $\frac{n}{S(n)}=90 \vdots 9$ 10) $n=891$; $S(n)=18$ $n \not\vdots S(n)$, т.к. $n\underset{2}{\equiv}1$, а $S(n)\underset{2}{\equiv}0$ 11) $n=972$; $S(n)=18$ $\frac{n}{S(n)}=54 \vdots 9$

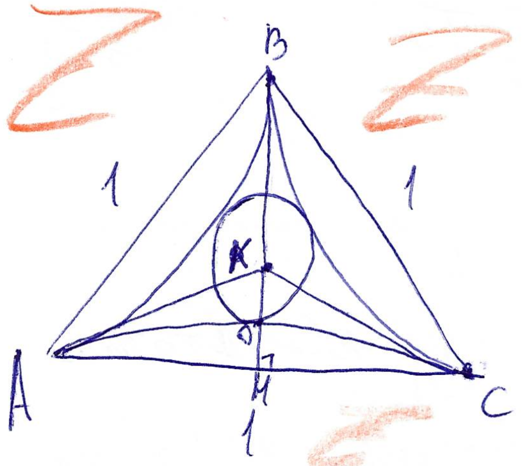
$A=\{162; \overset{2}{243}; 324; 405; \overset{5}{486}; 648; 810; 972\}$

Сумма 2-го; 5-го и предпоследнего равна:

$243+486+810=1539$ Ответ: ~~1539~~ 1539

Чистовик. №5

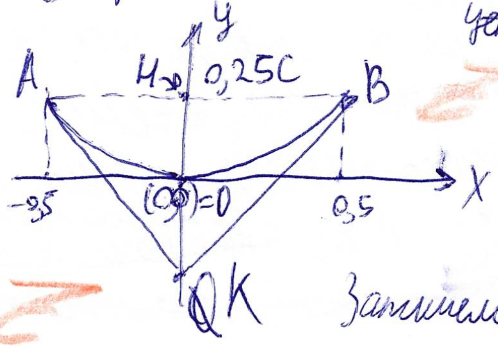
Заметим, что т. к. треугольник симметричный, то и весь рисунок тоже симметричен относительно центра маленькой окружности $\Rightarrow$ центр окружности является точкой пересечения общих касательных смежных парабол, а отрезки касательных – радиусами окружности, описанной вокруг "большого" треугольника со сторонами 1.



Радиус описанной окр-сти ΔABC равен: $R_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{3} = |KB| = |KC| = |KA|$

Выразим длину R_{ABC} с другой стороны, т. е. как отрезки касательных к параболам, проведённых из т. K.

Изобразим ΔKAB на коорд. пл-сти XOy так, что ~~центр~~ вершина параболы находится в т. $(0;0)$



KB – это касательная к параболе $f(x) = Cx^2$ в точке $x = 0,5$. Запишем её уравнение:

$$y = f'(0,5)(x-0,5) + f(0,5) = 2C\cdot 0,5(x-0,5) + 0,25C =$$
$$= Cx - 0,5C + 0,25C = Cx - 0,25C$$ $\Rightarrow$ координата т. K равна: $K(0; -0,25C)$. Найдём длину KB с помощью координат: $|KB| = \sqrt{(0,25-(-0,25C))^2 + (0,5-0)^2} = \sqrt{0,5^2C^2 + 0,5^2} =$
$= 0,5\sqrt{C^2+1}$, и т. к. $|OB| = R_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, то получим: $\longrightarrow$

Чистовик (№5 продолжение)

$KB = 0,5\sqrt{c^2+1} = \frac{\sqrt{3}}{3}c \Rightarrow \frac{c^2+1}{4} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow c^2 = \frac{1}{3}$

Без ограничения общности будем считать, что $c = \frac{\sqrt{3}}{3}$

KH равен длине радиуса вписанной окр-сти в $\Delta ABC \Rightarrow$

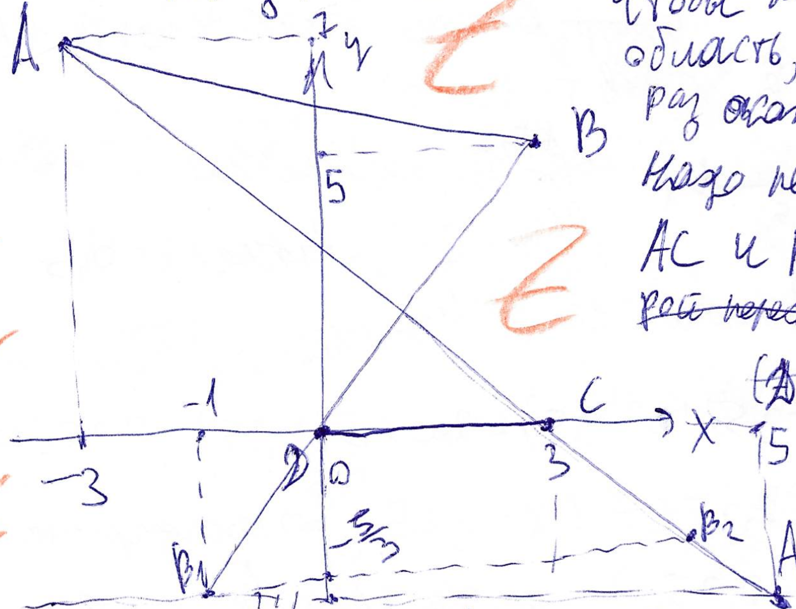
$\Rightarrow KH = \frac{\sqrt{3}}{6}$; $OH = \frac{1}{4}c = \frac{\sqrt{3}}{12}$ (из координат в xOy), а нам надо найти

OK $\Rightarrow$ $OK = KH - OH = \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{12}$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{12}$

Чистовик. №6

Пусть точка с координатами $(3;0)$ — точка C, а точка с координатами $(0;0)$ — точка D. Изобразим рисунок на плоскости XDY:



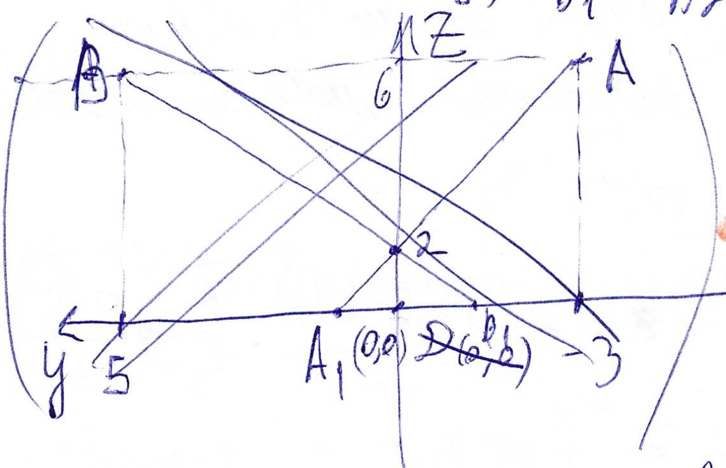
Чтобы получить нужную область, которая хоть бы раз окажется в тени, надо пересечь прямые AC и BD ~~с прямой, по которой пересекаются плоскость (ABC) и плоскость XDY~~ с плоскостью (XDY)

~~Пусть (ABC) = α. Заметим, что DC ⊂ α.~~ т.к. CD∥(XDY) (т.к. CD∈Ox) ~~и CD⊂α, то l = α∩(XDY) — эта прямая l∥CD (свойство плоскости, проходящей через прямую, которая параллельна другой плоскости). На прямой ось Dz ⊥ (XDY). Тогда в~~

62-99-33-89 (124.25)

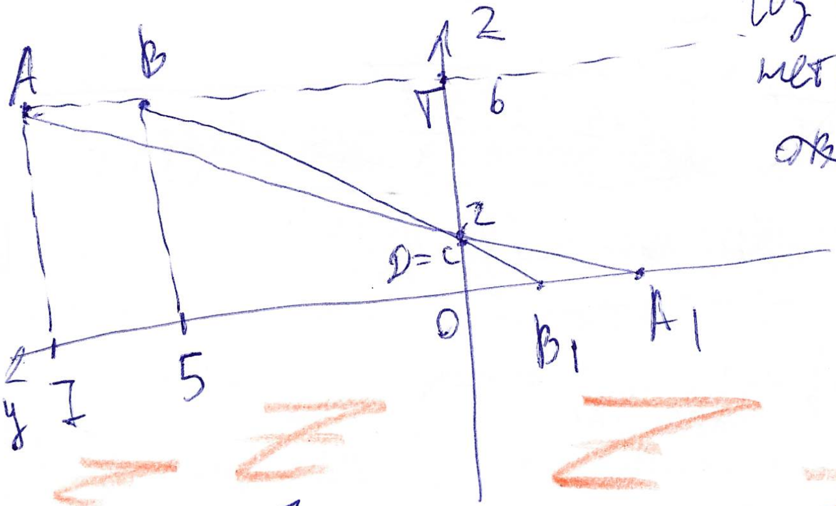
Чистовик № 6 (продолжение)

~~плоскости~~ Направим ось $Dz \perp (xDy)$. Спроецируем наш ~~ри~~ рисунок на пл-сть (yDz) и найдём координаты точек $A_1 = AC \cap (XDy)$; $B_1 = BP \cap (XPy)$ по оси Dy:



~~Из подобия ATD и~~

Из подобия треугольников нетрудно видеть, что ~~$OB_1 = \frac{7}{2}$~~



$|OB_1| = \frac{5}{3}$, а

$|OA_1| = \frac{7}{3}$ $\Longrightarrow$

$\Rightarrow y_{A_1} = -\frac{7}{3}$; $y_{B_1} = -\frac{5}{3}$

Заметим, что в пл-сти XDY прямая DB задаётся уравнением $y = \frac{5}{3}x$, а прямая AC — $y = -\frac{7}{6}x + \frac{7}{2}$

Задача свелась к тому, что надо найти площадь четырёхугольника DCA_1B_1, зная координаты всех его вершин.

$\cancel{x_{B_1} = \left(y_{B_1} - \frac{7}{2}\right)\left(-\frac{6}{7}\right) = \left(-\frac{5}{3} - \frac{7}{2}\right)\left(-\frac{6}{7}\right) = \frac{-11}{6} \cdot \frac{7}{6} = \frac{77}{36}}$

$\cancel{= \left(\frac{-10-21}{6}\right)\left(-\frac{6}{7}\right)}$ $x_{B_1} = \frac{3}{5} y_{B_1} = \frac{3}{5}\left(-\frac{5}{3}\right) = -1$

Чистовик. №6 (продолжение)

$y_{A_1} = \left(y_{A_1} - \frac{7}{2}\right)\cdot\left(-\frac{6}{7}\right) = \left(-\frac{7}{3}-\frac{7}{2}\right)\left(-\frac{6}{7}\right) = 6\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right) = 5$

Нахождение $[B_1DCA_1]$ – площади четырехугр. B_1DCA_1

① Проведём через т. B_1 горизонтальную прямую до пересечения с CA_1. Назовём эту точку B_2.

② $[B_1DCB_2] = \frac{|DC|+|B_1B_2|}{2}\cdot h = \frac{3+(5-(-1))}{2}\cdot\frac{5}{3} = \frac{9\cdot 5}{2\cdot 3} = \frac{15}{2} = \frac{7}{2}$, т.к. B_1DCB_2 – трапеция

③ $|B_1A_1| = \sqrt{6^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{36+\frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{328}{9}} = \sqrt{(5-(-1))^2+\left(-\frac{7}{3}-\left(-\frac{5}{3}\right)\right)^2} = \sqrt{(x_{A_1}-x_{B_1})^2+(y_{A_1}-y_{B_1})^2}$

④ $|B_2A_1| = \sqrt{(x_{B_2}-x_{A_1})^2+(y_{B_2}-y_{A_1})^2} =$

$x_{B_2} = \left(y_{B_2}-\frac{7}{2}\right)\left(-\frac{6}{7}\right) = \left(-\frac{5}{3}-\frac{7}{2}\right)\left(-\frac{6}{7}\right) = \frac{10+21}{6}\cdot\frac{6}{7} = \frac{31}{7}$

$= \sqrt{\left(\frac{31}{7}-5\right)^2+\left(\frac{7}{3}-\frac{5}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{49}+\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{144+196}}{21} = \frac{\sqrt{340}}{21}$

⑤ по ф. Герона в $\Delta B_1B_2A_1$, где ~~$B_1A_1 = 5$~~, $|B_1A_1| = \frac{\sqrt{328}}{3}$; $|B_1B_2| = 6$; $|B_2A_1| = \frac{\sqrt{340}}{21}$. $p = \frac{\frac{\sqrt{328}}{3}+6+\frac{\sqrt{340}}{21}}{2}$

$[B_1B_2A_1] = \sqrt{p\,(p-|B_1B_2|)(p-|B_1A_1|)(p-|B_2A_1|)} =$

$$=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{82}}{3}+3+\frac{\sqrt{85}}{21}\right)\left(\frac{\sqrt{82}}{3}+3+\frac{\sqrt{85}}{21}-\frac{\sqrt{328}}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{82}}{3}+3+\frac{\sqrt{85}}{21}-6\right)}\cdot$$

$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{82}}{3}+3+\frac{\sqrt{85}}{21}-\frac{\sqrt{340}}{21}\right)}$$

Чистовик №6 (продолжение)

$$[B_1DCA_1]=[B_1DCB_2]+[B_1B_2A_1]=\frac{7}{2}+$$

$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{82}}{3}+3+\frac{\sqrt{85}}{21}\right)\left(3+\frac{\sqrt{85}}{21}-\frac{\sqrt{82}}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{82}}{3}+\frac{\sqrt{85}}{21}-3\right)\left(\frac{\sqrt{82}}{3}+3-\frac{\sqrt{85}}{21}\right)}$$

Ответ: $\frac{7}{2}+\sqrt{\left(\frac{\sqrt{82}}{3}+3+\frac{\sqrt{85}}{21}\right)\left(3+\frac{\sqrt{85}}{21}-\frac{\sqrt{82}}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{82}}{3}+\frac{\sqrt{85}}{21}-3\right)\left(\frac{\sqrt{82}}{3}+3-\frac{\sqrt{85}}{21}\right)}$

№3 (Чистовик)

~~Заметим~~ Введём прямоугольную систему координат XYZ.
Заметим, что если оба катета $\parallel$ осям, то сам треугольник находится в соответствующей пл-сти, которая задаётся этими осями $\Rightarrow$ будем считать кол-во треугольников в плоскостях XOY, XOZ и YOZ по отдельности, а затем сложим все ~~кол~~ эти количества. Заметим, что на каждой оси ~~у нас~~ находится 9 точек с целыми координатами.
Пусть без ограничения общности мы находимся в пл-сти XOY. Выберем координату той точки ~~одну координату, например, на оси X~~. Это можно сделать 81-м ~~способами~~ способом. Далее мы должны выбрать, вершиной какого угла будет эта точка.

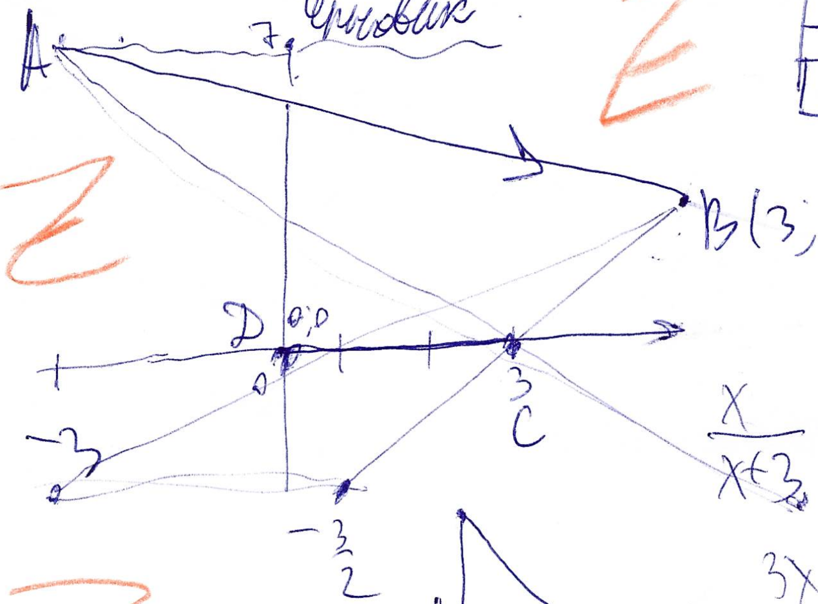
① Если эта точка вершина острого угла, то мы на одной из осей 8-ю способами выбираем координату вершины с прямым углом, а затем — ещё 8-ю способами координату второй вершины с острым углом на оси, на которой находится вершина с прямым углом $\Rightarrow$ всего $81\cdot 8\cdot 8$ способов

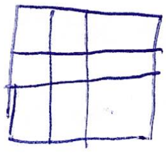
Чистовик. №3 (продолжение)

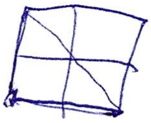
2) если эта точка — вершина ~~угла с~~ прямым углом, то мы 8-ю сп-ми выбир. ~~то~~ вершину на 1-ой оси, и 8-ю способами выбираем верш. на др. оси => всего 81·8·8

Ответ: 81·128

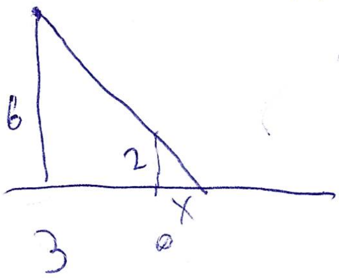
Черновик







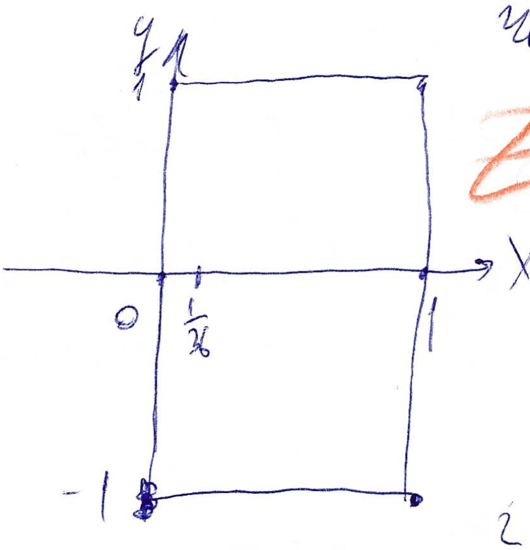
$$\frac{x}{x+3} = \frac{1}{3}$$



$3x = x + 3$

$x = \frac{3}{2}$

чертовик



$\sin 15\pi x = \sin 13\pi x$

$\sin 13\pi x - \sin 15\pi x = 0$

$\sin(x+y) - \sin(x-y) = 2\cos x \sin y$

$\sin x \cos y + \cos x \sin y - \sin x \cos y + \cos$

$2\sin(-\pi x)\cos 18\pi x = 0$

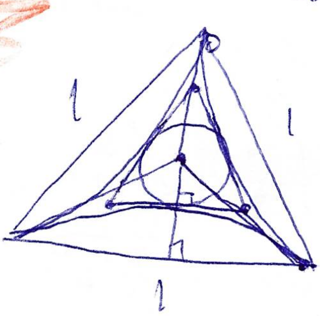
$18\pi x = \frac{\pi}{2} + \pi k$

$-\pi x = \pi k \quad x = -k, k \in \mathbb{Z}$

$18x = \frac{1}{2} + k$

$x = \frac{1}{36} + \frac{k}{18}, k \in \mathbb{Z} \quad y = \frac{1}{36} + \frac{1}{18} = \frac{1}{12}$

$x =$

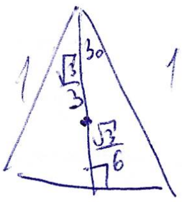


$\sin 13\pi x = \sin(13\pi x + 13\pi T)$

$13\pi T = 2\pi n \quad T = \frac{2n}{13}$

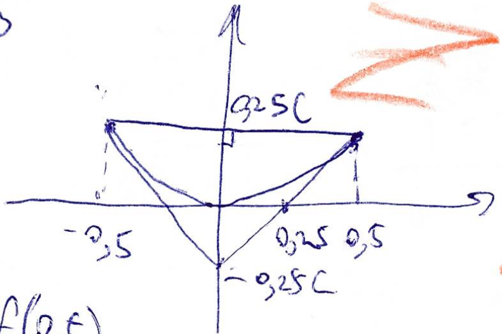
$13\pi x = \frac{\pi}{2} + \pi k$

$x = \frac{1}{26} + \frac{k}{13}$



$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}$



$y = f'(0,5)(x-0,5) + f(0,5)$

$f(x) = Cx^2 \quad f'(x) = 2Cx \quad Cx - 0,5C + 0,25C = Cx - 0,25C$

$\sqrt{0,5^2 + (0,5C)^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$0,25 + 0,25C^2 = \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} + \frac{C^2}{4} = \frac{1}{3} \quad C^2 = \frac{1}{3} \quad C = \sqrt{\frac{1}{3}}$

$7 = -3k + b \quad b = \frac{7}{2} \quad 5 = 3k + 0$

$0 = 3k + b \quad \boxed{k = -\frac{7}{6}} \quad 0 \quad k = \frac{5}{3}$

Черновик.

$\sqrt{6(1-tg^2x)}=4\sin x \Leftrightarrow$ $36\begin{cases}6(1-tg^2x)=16\sin^2x\\ \cos x\neq 0\\ \sin x\geq 0\end{cases}$

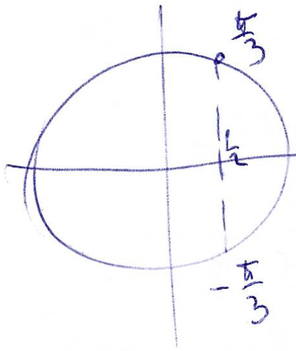
$243+486=729$

$729+810=1539$

$\cancel{6\cos^2x}$ $6\left(1-\frac{\sin^2x}{\cos^2x}\right)=6(\cos^2$ $6\cos^2x-6\sin^2x=16\sin^2x\cos^2x$

$6\cos 2x=4\sin^2 2x$

A: X:S(x)



$\frac{\sqrt3}{2}-\frac{\sqrt3}{3}=\frac{\sqrt3}{6}$

$k:9$

$\frac{n}{S(n)}=k\in\mathbb{Z}$

$n\in\mathbb{N}$ $\frac{k}{\sqrt3}=2k$

$100\leq n\leq 999$

$n:9\Rightarrow S(n):9$

$n=_9 S(n)$

$\boxed{n:81}$ $\frac{108}{9}=12$ $81\rightarrow\frac{162}{9}=$ $\frac{243}{9}$

$486:18=27$, $486-36=126$, $126-108$

$648+81=729$

$972:18=54$, $972-90=72$

$162:9=18$, $162-72$

$567:18=3$, $567-54=27$

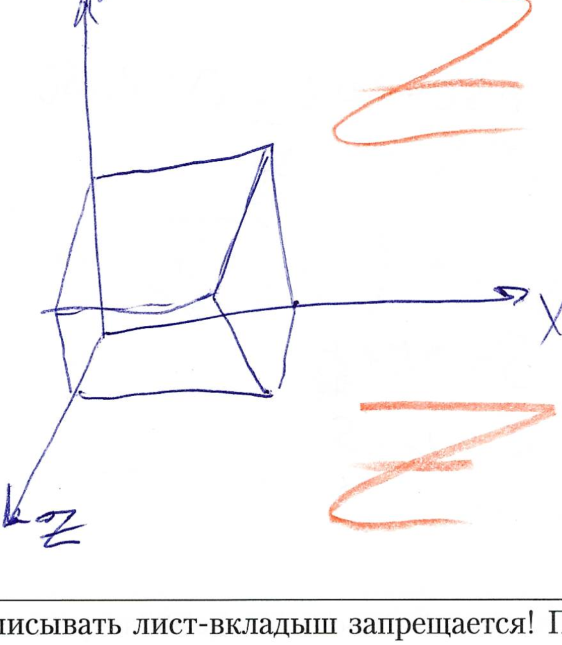
$648:18=36$, $648-54=108$

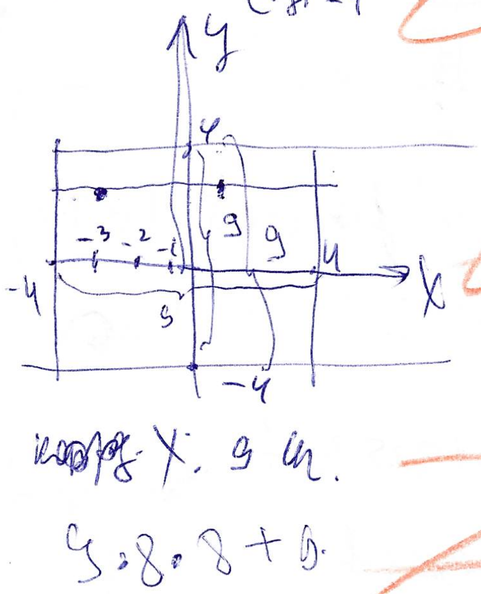
$\begin{cases}|x|\leq 4\\ |y|\leq 4\end{cases}$

$405+162=567$

$567+81=658$

$567+81=648$





~~коорд~~ X. 9 ш.

$9\cdot 8\cdot 8+9.$