0 432022 060000

48-20-22-06
(123.2)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 10 класс

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Даниленко Руслана Николаевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата «29» марта 2026 года

Подпись участника

48-20-22-06 (123.2)

Чистовик. № 1.

Пусть длина, ширина, высота призмы равны a, b, c соответственно, тогда, $V_{призм.} + S_{пов} + \sum l_{ребер} = 2026 \Rightarrow$

$$abc + 2(ab+ac+bc) + 4(a+b+c) = 2026$$

$$abc + 2(ab+ac+bc) + 4(a+b+c) + 8 = 2026+8.$$

$$(a+2)(b+2)(c+2) = 2034$$

$$(a+2)(b+2)(c+2) = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 113.$$

т.к. $a \neq b \neq c$ и $a, b, c \in \mathbb{N}$ (т.е. $a+2$, $b+2$, $c+2 \geq 3$) то возможны 2 случая (остальные случаи отличаются от этих 2-ух переменой мест переменных т.к. $V_{призмы} = abc$, ~~не зависит от~~ то эти случаи можно исключить из рассмотрения)

1 случай: $\begin{cases} a+2=6 \\ b+2=3 \\ c+2=113 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=1 \\ c=111 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow V = abc = 4 \cdot 1 \cdot 111 = 444$

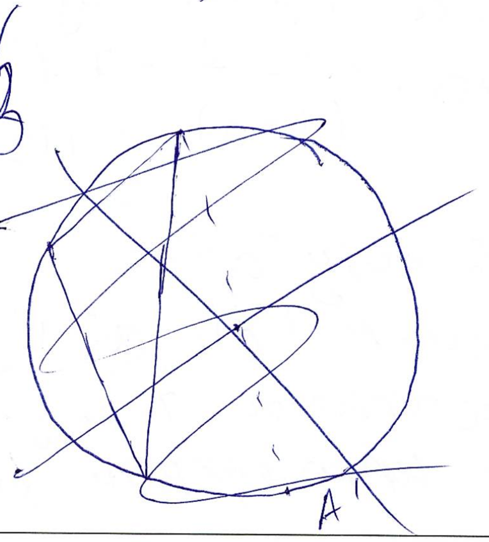
2 случай: $\begin{cases} a+2=3 \\ b+2=3 \\ c+2=2 \cdot 112 \end{cases}$, получаем, что $a=b$

$\Rightarrow$ Единственное возможное значение $V = 444$. Ответ: 444

№ 3

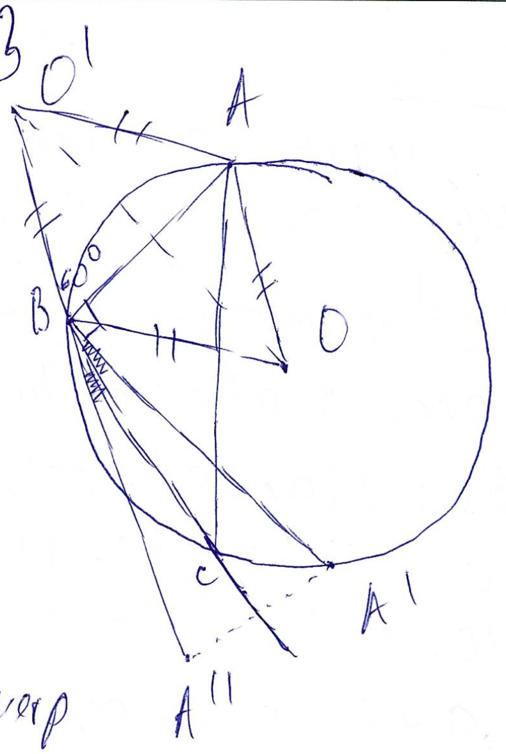
Пусть A' - точка, диаметрально противоположная A; $\angle B = x$.

Заметим, что $OA = OB = O'A = O'B$



Чистовик

№3



(в силу симметрии) => $OAO'B$ - ромб.
$\angle ABO' = \angle ABO = 90° - \angle O'OB$ (по св-вам ромба) $= 90° - 1/2 \angle AOB = 90° - \angle ACB$ (вписанный и центральный углы) $= 90° - 30° = 60°$

т.к. AA' - диаметр то $\angle ABA' = 90°$.

$\angle A'BC = \angle ABC - \angle ABA' = x - 90°$, в силу симметрии: $\angle CBA'' = \angle CBA' = x - 90°$.

В силу O', B, A'' на одной прямой:
$\angle O'BA + \angle ABA' + \angle A'BC + \angle CBA'' = 180°$ т.е.
$60° + 90° + 2(x - 90°) = 180°$
$2x = 180° + 30°$, откуда
$x = 105°$. Ответ: $\angle B = 105°$

№4

Пусть $\log_2 a > 0$ => $a > 1$. =>
нер-во имеет вид $a^{2x} - 3a^{x+1} + 2a^2 \geq 0$.
Пусть $a^x = t$ => $t^2 - 3at + 2a^2 \geq 0$
$(t > 0)$ $(t - a)(t - 2a) \geq 0$

=> в силу $a > 1$
получим $t \in (0; a] \cup [2a; +\infty)$, в силу монотонности показательной функции при нахождении решений относительно

48-20-22-06 (123.2)

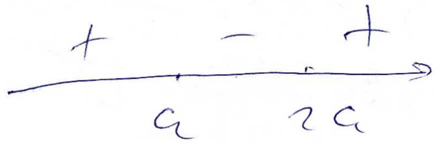
Чистовик!

№4

x, получим так же 2 промежутка, что не удовлетворяет условию.

$\Rightarrow \log_2 a < 0 \Rightarrow 0 < a < 1$, нер-во имеет вид $a^{2x} - 3a^{x+1} + 2a^2 \leq 0$. Аналогично 1-ому случаю, получаем: $(t-a)(t-2a) \leq 0$

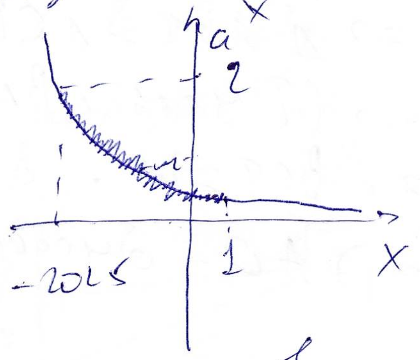
$\Rightarrow t \in [a; 2a]$



$\Rightarrow a^x \in [a; 2a]$

$\Rightarrow \begin{cases} a^x \geq a \\ a^x \leq 2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^{x-1} \geq 1 & (1) \\ a^{x-1} \leq 2 & (2) \\ 0 < a < 1 \end{cases}$

из (1): $x - 1 \leq 0 \Rightarrow x \leq 1$ т.к. нам нужен отрезок длины 2026, учитывая монотонность показательной фу-ции то из (2) должно следовать, что $x \geq -2025$



$\Rightarrow a^{-2026-1} = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^{-2026} = 2$

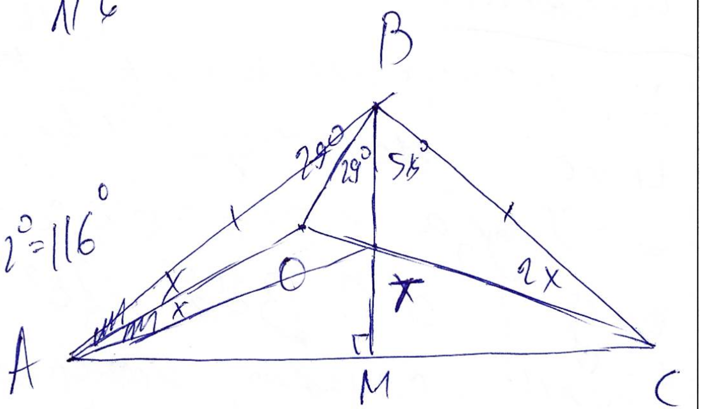
$\frac{1}{a^{2026}} = 2 \Rightarrow a^{2026} = 1/2 \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt[2026]{2}}$

Ответ: $a = \frac{1}{\sqrt[2026]{2}}$

№6

Чистовик.

№6



Ч.т.

$\begin{cases} \angle OBC = 3\angle ABO \\ \angle OBC + \angle ABO = \angle ABC = 180° - 2\cdot 32° = 116° \end{cases}$

$\Rightarrow \angle OBC = \frac{3\cdot 116°}{4} = 87°$, $\angle ABO = \frac{116°}{4} = 29°$. Пусть BM - высота $\triangle ABC$ т.к. $\angle A = \angle C \Rightarrow \triangle ABC$ - равнобедренный $\Rightarrow$ BM также биссектрисса и медиана. $\Rightarrow$
$\Rightarrow \angle ABM = 1/2 \angle ABC = 58°$. $\angle OBM = \angle ABM - \angle OBA =$
$= 58° - 29° = 29° = \angle ABO \Rightarrow OB$ - биссектрисса $\angle ABM$ ①

Пусть $OC \cap BM = T$ т.к. T на сер. перп. к AC то $AT = TC \Rightarrow$
$\Rightarrow \triangle ABT = \triangle CBT$ по 3 сторонам. $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ (Пусть $\angle BAO = x$; $\angle BCO = 2x$) $\angle BAT =$
$= \angle BCT = 2x$. $\angle BAO = x = 1/2 \cdot 2x = 1/2 \angle BCT$
$\Rightarrow AO$ - биссектрисса $\angle BAT$ ① $\Big\} \Rightarrow O$ - точка

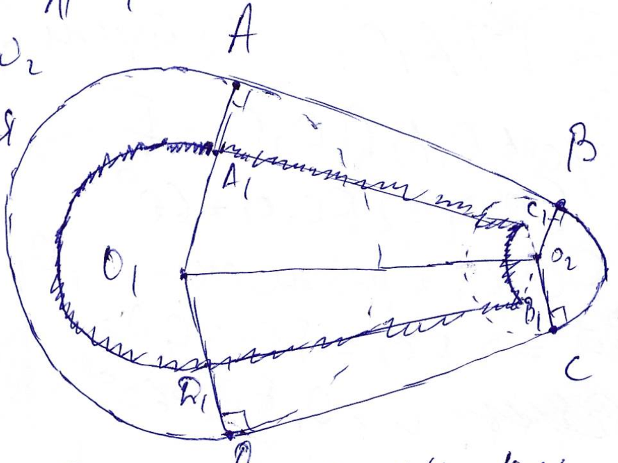
пересечения биссектрисс $\triangle ABT$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow OT$ - биссектрисса $\angle ATB$. $\Rightarrow$ ②
$\angle BTO = 1/2 \angle BTA$.
$\angle BTA = \angle TMA + \angle TAM = 90° + (\angle BAM -$
$- \angle BAT) = 90° + 32° - 2x = 122° - 2x$.
$\angle BTA = \angle TBC + \angle BCT = 58° + 2x$. В силу ②:
$58° + 2x = \frac{122° - 2x}{2}$, откуда $x = 1°$.
Как известно, $\angle AOB = 90° + 1/2 \angle ATB =$

листовик 1

$= 90^\circ + 61^\circ - X = 150^\circ$. => №6 $\frac{\angle BOA}{\angle BAO} = \frac{150^\circ}{1^\circ} =$

$= 150$. Ответ: в 150 раз.

№7

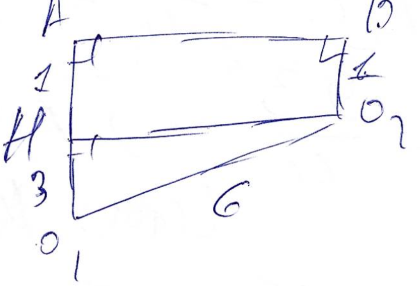


Пусть ω_1, ω_2 — большая и меньшая окружности соответственно.

O_1 — центр ω_1,

O_2 — центр ω_2

Обозначим точки касаний окружностей и прямых, как показано на рисунке. Покажем дорожку из скошенной травы, назовем ее X (выделена жирным). Пусть отрезки O_1A, O_1D, O_2B, O_2C пересекают X в A_1, D_1, B_1, C_1 соответственно. (как показано на рис.) H — пр$(O_2; AO_1)$.



$HO_1 = O_1A - AH = O_1A - BO_2 =$
$= 4 - 1 = 3$; $O_1O_2 = 6$. т.к.
$\angle \frac{HO_1}{O_1O_2} = 1/2$ то $\angle HO_2O_1 = 30^\circ$
$=> \angle HO_1O_2 = 60^\circ$ => (в силу симметрии) $\angle AO_1D =$
$= 120^\circ$ => часть X которая составляет дугу окружности радиуса 2,5 равна $2\pi \cdot R_{\omega_1} \cdot \frac{360^\circ - 120^\circ}{360^\circ} =$
$= 2\pi \cdot 2,5 \cdot 2/3 = \frac{10\pi}{3}$. т.к. $O_2B \parallel O_1A$ и
$O_2C \parallel O_1D$ то $\angle C_1O_2B_1 = \angle BO_2C = \angle AO_1D =$
$= 120^\circ$ => часть X которая представляет собой дугу окружности с $R = |1 - 1,5| = 0,5$

чистовик!

равна $2\pi R \cdot \frac{120^\circ}{360^\circ} = 2\pi \cdot 0{,}5 \cdot 1/3 = \frac{\pi}{3}$.

Ясно, что X (длина) симметрична отн. O_1O_2, поэтому $X = \frac{10\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + A_1C_1 + B_1D_1 =$

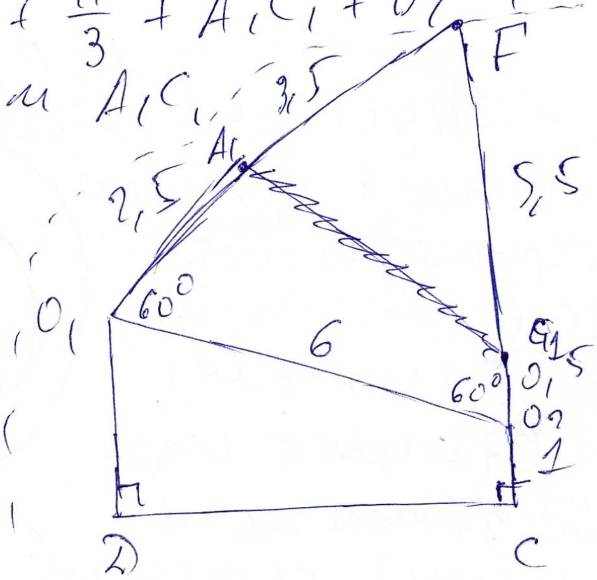
$= \frac{11\pi}{3} + 2A_1C_1$. Найдем A_1C_1.

Пусть $O_1A_1 \cap O_2C_1 = F$

т.к. $\angle FO_1O_2 = \angle FO_2O_1 = 60^\circ$

то $\triangle FO_1O_2$ – равносторонний $\Rightarrow FO_1 = FO_2 = O_1O_2 =$

$= 6$ ~~…~~ и $\angle O_1FO_2 = 60^\circ$



$FA_1 = FO_1 - O_1A_1 =$

$= 6 - 2{,}5 = 3{,}5$

$FC_1 = FO_2 - O_2C_1 = 6 - 0{,}5 = 5{,}5$.

По т. косинусов для $\triangle A_1FC_1$:

$A_1C_1^2 = A_1F^2 + FC_1^2 - 2FA_1FC_1 \cdot \cos\angle A_1FC_1$

$A_1C_1^2 = \frac{49}{4} + \frac{121}{4} - 2 \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{11}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{49+121-77}{4}$

$= \frac{93}{4} \Rightarrow A_1C_1 = \frac{\sqrt{93}}{2}$.

Итог: длина $X = \frac{11\pi}{3} + 2\left(\frac{\sqrt{93}}{2}\right)$

$= \frac{11\pi}{3} + \sqrt{93}$. Ответ: $\frac{11\pi}{3} + \sqrt{93}$.

Черновик.

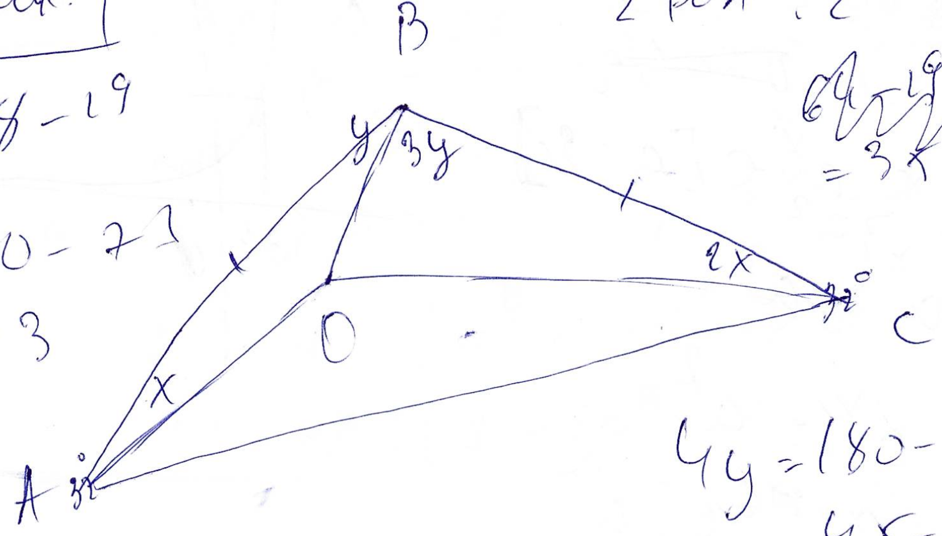
$\angle BOA$?

$38-19$

$170-77$

93

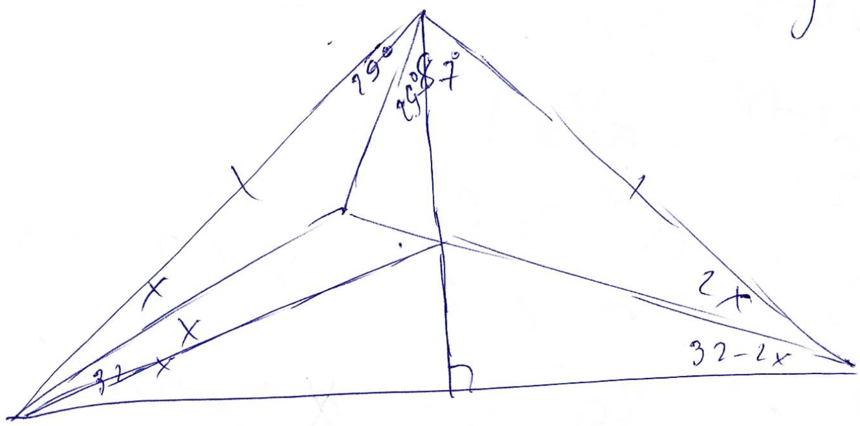
$64-19 = 3x$



$4y = 180-64$

$y = 45-16 = 29$

87



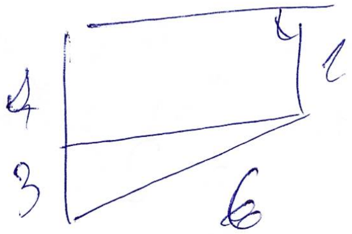
$90-(32-2x) = 58+2x$

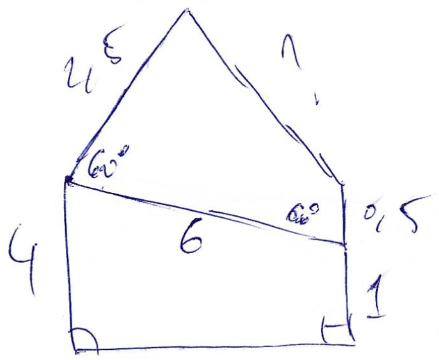
$\to 122-2x \quad = 61-x$

$58+2x = 61-x$

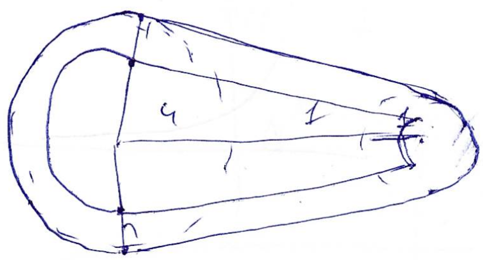
$3x = 3$

$x = 1^\circ$





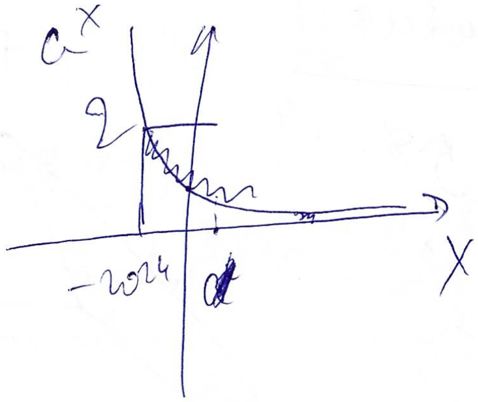
11



$a<$ $0<a<1$

~~$a \geq 1/a$~~

$a^x \in [a; 2a]$



$$\begin{cases} a^x \geq a^2 \\ a^x \leq 2a^2 \end{cases}$$

$a^x = a^2$

$a^{x+2026} = 2a^a$

$a^{x+2026} = 2a^x$

$a^{2026} = a^x$

$a^x \geq a^2$

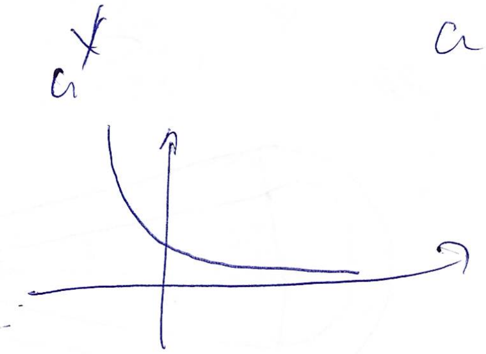
$2 \geq x \quad x \leq 2$

$a^x \leq 2a^2 \Rightarrow \cancel{x} \geq -2024$

$a^{x-2} \leq 2 \quad \Rightarrow x \geq -2024$

$a^{x-2} \leq$

$a^{-2026} = 2$



ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Черновик.

$$\frac{a^{2x}-3a^{x+1}+2a^2}{\log_2 a} \geq 0$$

$a \neq 1$

$0<a<1$

1) $\log_2 a > 0 \Rightarrow a > 1$ | $a^x = t > 0$

$t^2 - t \cdot 3a + 2a^2 \geq 0$

$(t-a)(t-2a) \geq 0$

$+ \quad - \quad +$

$a^2 \quad 2a^2$

$t \in (0; a^2] \cup [2a^2;$

$t \in (0; a$

2) $\log_2 a > 0 \quad 0<a<1$.

$(t-a^2)(t-2a^2) \leq 0$

$t \in [a^2; 2a^2]$

$a^x \in [a^2; 2a^2]$

$\begin{cases} a^x \geq a^2 \\ a^x \leq 2a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \{$

$t^2 - t \cdot 3a^2 + 2a^2 \geq 0$

$D = 9a^4 - 8a^2 =$

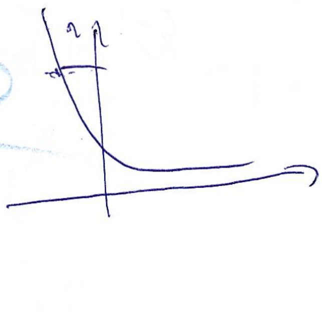
$= a^2(9a^2-1)$

$a > 1$.

a^x.

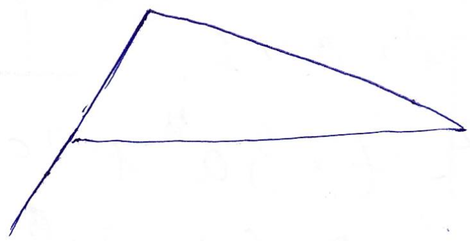
$+ \quad - \quad +$

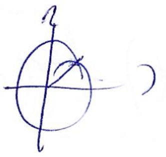
$0 \quad a \quad 1 \quad 2a^2$

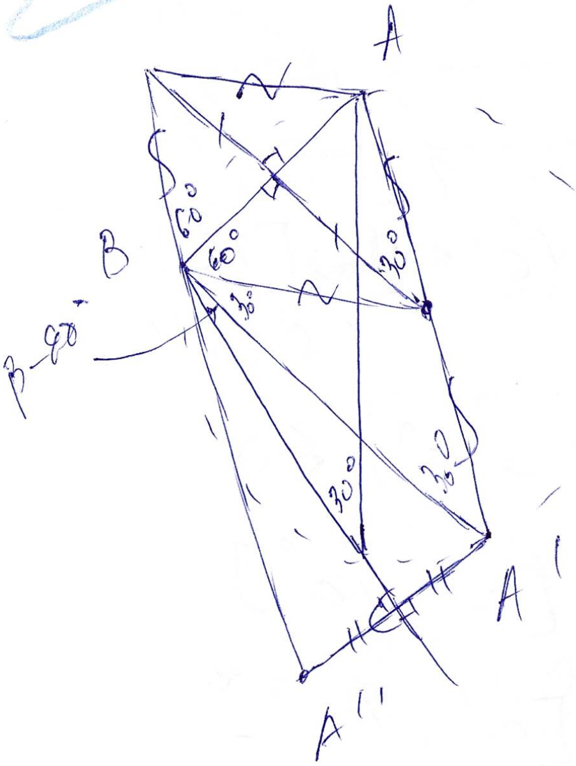


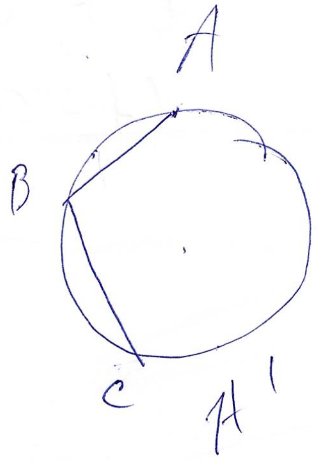
Черновик

$$\frac{CA}{AC} = \frac{\sin y}{\sin(90+z)} = \frac{\sin y}{\cos z}$$







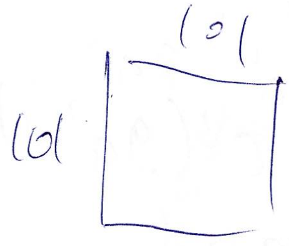


$$150 + 2(\beta^\circ - 90) = 180$$

$$150 + 2\beta - 180 = 180$$

$$2\beta = 210$$

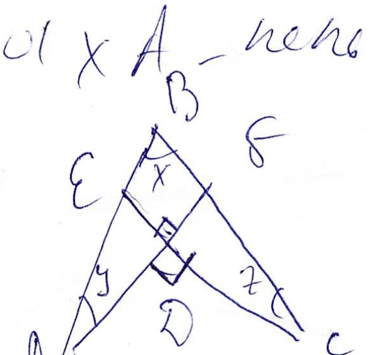
$$\beta = 106^\circ$$



$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z$

101 x A — нельзя.

$x + y + z = 90^\circ$

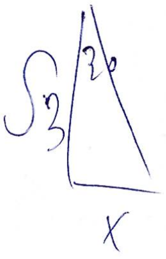


$$\operatorname{tg} y = \frac{CD}{AD}$$

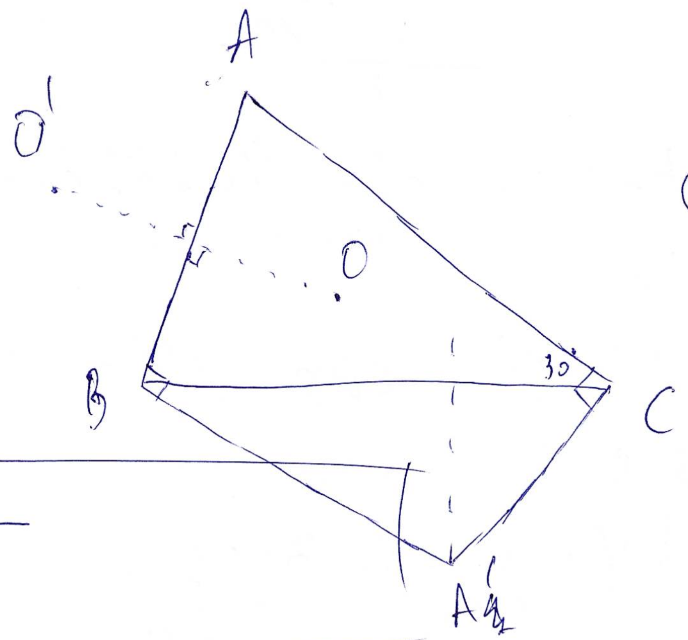
$$\operatorname{tg} z = \frac{DF}{CD}$$

Черновик. 1

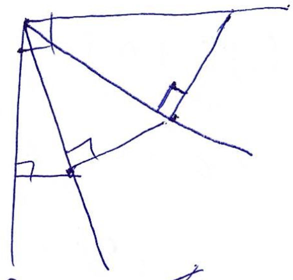
$\frac{AO}{AC} =$

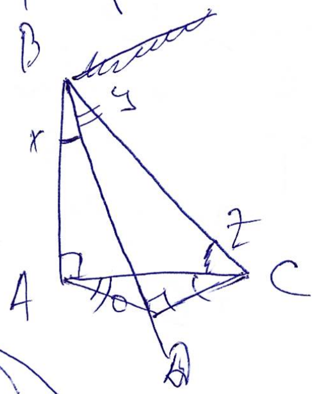


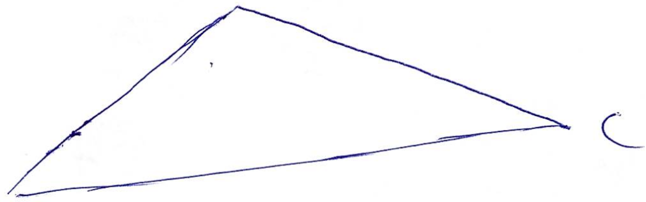
$3\sqrt{3}$

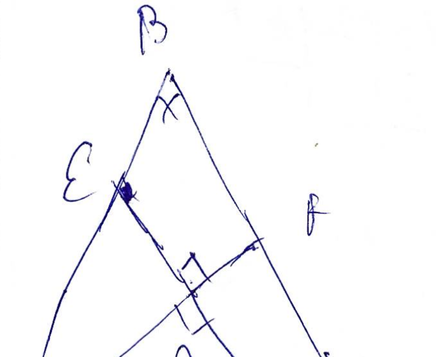


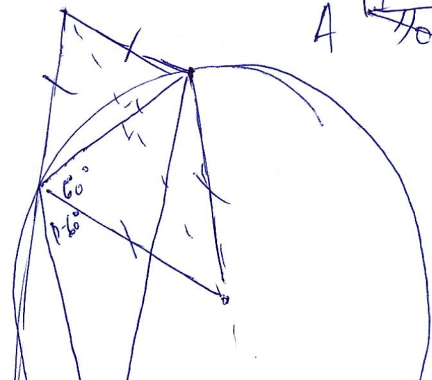
$\frac{AO \cdot CD}{(}$











$c^{x-1} \geq 1$

$x-1<0$

$x \leq 1$

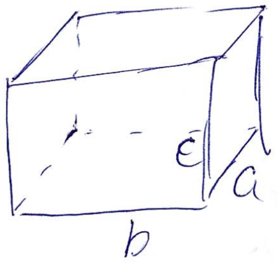
$\log_a c = b$

$\frac{AO}{\cancel{AB}} \cdot \frac{CD}{BD} \cdot \frac{\cancel{AB}}{AC} = \frac{AO \cdot CD}{BD \cdot AC} = 5\sqrt{3}$

$= \frac{AO \cdot CD}{AB \cdot CD + AD \cdot BC}$

$2\pi R$

Черновик.



$a + b + c$

$a, b, c \in \mathbb{N}$

$abc + 2(ab + ac + bc) + 4(a + b + c) = 2026$

$abc - \min$

$(a+2)(b+2)(c+2) = abc + 2(ab + \ldots ac) +$
$+ 4(a + b + c) + 8.$

$(a+2)(b+2)(c+2) = 2034 \,|\, 2$

$1017 : 9 = 113$
9
11
9
27

$1017 : 19 = 5$
95
67

$1017 : 31$
93
87

$1017 : 23 = 4$
92
97

$1017 : 27 = 3$
81
207

$1017 : 29 = 3$
87
147

$2034 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 113$