13:29
13:35

0 960819 380000

96-08-19-38
(129.7)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 8

Место проведения Краснодар
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников "Ломоносов"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Даримова Магомед-Эмина Ахмедовича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«29» марта 2026 года

Подпись участника

90 (Девяносто) физ

96-08-19-38 (129.7)

№1

$\sqrt{3(1-tg^2x)} = 2\sqrt{2}\sin x$

Выпишем ОДЗ:

$2\sqrt{2}\sin x \geq 0 \Rightarrow \sin x \geq 0$

$1 - tg^2 x \geq 0,$

$\cos x \neq 0$

Теперь возведём обе части в квадрат:

$3(1-tg^2x) = 8\sin^2 x$

$3(1-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}) = 8\sin^2 x$

$3\cdot\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x} = 8\sin^2 x$

$3\cdot(\cos^2 x - \sin^2 x) = 8\sin^2 x\cdot\cos^2 x$

Обозначим $t = \sin^2 x$

Тогда $\cos^2 x = 1-t$, и получаем:

$3((1-t)-t) = 8t(1-t),$

$3(1-2t) = 8t - 8t^2$

$8t^2 - 14t + 3 = 0$

Решив квадратное уравнение, получим:

$t = \frac{24}{16} = \frac{3}{2}$ или $t = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

Так как $t = \sin^2 x \leq 1$, значение $t = \frac{3}{2}$ невозможно.

Значит, $\sin^2 x = \frac{1}{4}$

С учётом условия $\sin x \geq 0$, получаем:

$\sin x = \frac{1}{2}$

Следовательно $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ или $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$

Проверка: для этих значений $tg^2 x = \frac{1}{3}$, поэтому

$\sqrt{3(1-\frac{1}{3})} = \sqrt{2}$,

$2\sqrt{2}\sin x = 2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2} = \sqrt{2}$.

Равенство выполняется.

Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$ или $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$

Задача №2

Пусть $n = \overline{abc}$ - трёхзначное число, $S = a+b+c$ - сумма его цифр и $n \in A$. Тогда по условию $n = 9k \cdot S$

Видно, что n делится на 9. Число делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма его цифр S делится на 9, S делится 9 и n делится на 81.

Таким образом, все искомые числа находятся среди трехзначных чисел, кратных 81:

$81 \cdot 2 = 162,\ 81 \cdot 3 = 243,\ \dots,\ 81 \cdot 12 = 972.$

Проверяем каждое из них на исходное условие:

n	S	$\frac{n}{S}$	кратно 9?
162	9	18	да
243	9	27	да
324	9	36	да
405	9	45	да
486	18	27	да
567	18	31,5	нет
648	18	36	да
729	18	40,5	нет
810	9	90	да
891	18	49,5	нет
972	18	54	да

Получается все трёхзначные числа в A:

162, 243, 324, 405, 486, 567, 648, 729, 810, 891, 972.

Третье число: 324, пятое: 486, предпоследнее (седьмое): 810.

Сумма: $324 + 486 + 810 = 1620$.

Ответ: 1620

96-08-19-38
(129.7)

Задача №3

Множество F – это все точки с целыми координатами от -6 до 6. Всего таких точек: $13^3 = 2197$

Первым делом, зафиксируем произвольную вершину (2197 способов) и посчитаем сколько существует треугольников, у которых прямой угол в этой вершине.

Катеты параллельны каким-то двум осям, поэтому зафиксируем их. Способов выбрать две оси из трёх – три.

Теперь вдоль каждой оси надо выбрать вторую вершину катета (помимо вершины при прямом угле), параллельной данной оси. Всего подходящих вершин: $13 - 1 = 12$. Для двух осей получается 144 способа выбрать две оставшиеся вершины.

Таким образом, мы полностью зафиксировали прямоугольный треугольник и любой прямоугольный треугольник из условия мы зафиксировали ровно один раз. Посчитаем теперь, сколько же их:

$2197 \cdot 3 \cdot 12 \cdot 12 = 949104$

Ответ: 949104

Задача №8

$3x^2 \log_a x - \log_x a - 2x \geq 0$

ОДЗ: $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, $x \neq 1$.

Положим $t = x \cdot \log_a x$

Тогда $\log_a x = \frac{t}{x}$, $\log_x a = \frac{1}{\log_a x} = \frac{x}{t}$

Поэтому $3x^2 \log_a x - \log_x a - 2x = x \cdot (3t - \frac{1}{t} - 2)$

Так как $x > 0$, получаем:

$3t - \frac{1}{t} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(3t+1)(t-1)}{t} \geq 0$

Отсюда $t \in [-\frac{1}{3}, 0) \cup [1, +\infty)$.

Значит, нужно исследовать $f(x) = x \cdot \log_a x = \frac{x \ln x}{\ln a}$

Рассмотрим $g(x) = x \cdot \ln x$.
Имеем $g'(x) = \ln x + 1$,
поэтому g убывает на $(0, e^{-1}]$, возрастает на $[e^{-1}, +\infty)$,
причём $g(\frac{1}{e}) = -\frac{1}{e}$

1) Случай $a > 1$.
тогда f имеет ту же монотонность, что и g. На интервале $(1, +\infty)$ множество решений $f(x) \geq 1$ есть полуинтервал на $(0,1)$ функция отрицательна, причём $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1-} f(x) = 0$. Так что множество решений условия $-\frac{1}{3} \leq f(x) < 0$.
не может быть одной точкой: оно либо пусто, либо является интервалом, либо объединением двух интервалов, значит случай $a > 1$ не подходит.

2) Случай $0 < a < 1$
Тогда на $(0,1)$ функция $f(x) > 0$ и достигает максимума в точке $x = \frac{1}{e}$:

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e \cdot |\ln a|}$$

Чтобы множество решений условия $f(x) \geq 1$ на $(0,1)$, состояло ровно из одной точки, необходимо и достаточно:

$$\frac{1}{e \cdot |\ln a|} = 1$$

Отсюда $|\ln a| = \frac{1}{e}$.
Так как $a < 1$, имеем $\ln a = -\frac{1}{e}$, $a = e^{-\frac{1}{e}}$
При этом на $(1, +\infty)$ функция $f(x) < 0$ и строго убывает от ~~нуля~~ 0 к $-\infty$, поэтому множество решений условия $-\frac{1}{3} \leq f(x) < 0$ имеет вид полуинтервала $(1, x_0]$.
Следовательно всё множество решений состоит из полуинтервала и одной отдельной точки.

Ответ: $a = e^{-\frac{1}{e}}$

Задача №4

Будем добавлять графики поодному. Каждый раз новая кривая разбивается уже имеющимися линиями и гра-

95-08-19-38
(129.7)

щует полосы на несколько дуг, и каждая такая дуга добавляет равно одну новую область.

1. Первый график $y = \sin(11\pi x)$.

Он соединяет точки $(0,0)$ и $(1,0)$, а также касается границу полосы: $y = 1$, 6 раз, $y = -1$ 5 раз

Итак, на нем есть 11 внутренних точек разбиения, значит он распадается на $11+1=12$ дуг и добавляет 12 областей.

Была одна область, стало $1+12=13$.

2. Пересечения двух графиков.

Решаем $\sin(m\pi x) = \sin(n\pi x)$

Из равенства $\sin\alpha = \sin\beta$ получаем:

$\alpha = \beta + 2\pi t$ или $\alpha = \pi - \beta + 2\pi t$, $t \in \mathbb{Z}$

Отсюда $x = \frac{2t}{m-n}$ или $x = \frac{2t+1}{m+n}$

Пара (11,13). $x = \frac{2t}{11-13} = -t$ не даёт решений при $0 < x < 1$, а $x = \frac{2t+1}{24}$ даёт $\cancel{12}$ 12 решений: $\frac{1}{24}, \frac{3}{24}, \dots, \frac{23}{24}$.

Значит графики $y = \sin(11\pi x)$ и $y = \sin(13\pi x)$ пересекаются в 12 внутренних точках.

Пара (11, $\cancel{13}$ 17). $\cancel{y}$ $x = \frac{2t}{11-17} = -\frac{t}{3}$ даёт $x = \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$, а $x = \frac{2t+1}{28}$ даёт 14 решений.

Итого 16 внутренних точек

Пара (13,17). $x = \frac{2t}{13-17} = -\frac{t}{2}$ даёт $x = \frac{1}{2}$, а $x = \frac{2t+1}{30}$

даёт 15 значений, среди которых при $t=7$ снова получаете $x = \frac{1}{2}$.

Значит, всего здесь 15 различных точек совпадение.

При $x = \frac{1}{2}$: $\sin\frac{13\pi}{2} = \sin\frac{17\pi}{2} = 1$, то есть это точка $(\frac{1}{2}, 1)$ на верхней границе полосы. Здесь графики не пересекаются поперечно, а. касаются друг друга и границы.

Следовательно, внутри полосы для пары (13,17) имеем 14 обычных пересечений и одну граничную точку касания.

3. Второй график $y = \sin(13\pi x)$.
Он имеет 7 касаний с $y=1$, 6 касаний с $y=-1$, то есть 13 точек касания границы.
Кроме того, он пересекает первый график в 12 внутренних точках. Эти точки различны, поэтому на втором графике получаем $13+12=25$ внутренних точек разбиения, значит он распадается на $25+1=$ 26 дуг и добавляет 26 областей.
Итак, после двух графиков число областей ~~раз~~ $=$ $13+26=39$.

4. Третий график $y = \sin(17\pi x)$
Он имеет 9 касаний с $y=1$, 8 касаний с $y=-1$, то есть 17 точек касания границы.
~~С~~ С первым графиком он имеет 16 внутренних пересечений. Со вторым графиком он имеет 15 общих точек, но одна из них, $(\frac{1}{2}, 1)$, уже учтена как точка касания границы.
Значит новых точек разбиения от второго графика здесь 14.
Итак, на третьем графике всего $17+16+14=47$ внутренних точек разбиения, значит он распадается на $47+1=$ $=48$ дуг и добавляет 48 областей.
Отсюда окончательно: $39+48=87$

Ответ: 87

Задача №6

Пусть в некоторый момент светлячок находится в точке $S=(u,v,6)$
Верхний край забора имеет координаты $P=(x,0,2)$, $0 \le x \le 3$
Точка тени на земле получается так: проводим луч из светлячка через точку P верхнего края забора и

продолжим его до плоскости $z=0$.
Любая точка прямой SP задаётся параметрически:
$S+\lambda\cdot(P-S)$.
То есть координаты точек прямой равны $(u,v,6)+\lambda\cdot$
$\cdot(x-u,-v,-4)$.
Нас интересует пересечение с землёй, то есть с плоскостью $z=0$.
Поэтому смотрим на третью координату: $6-4\lambda=0$.
Отсюда $\lambda=\frac{3}{2}$.
Подставляя это значение получаем точку тени:
$P'=S+\frac{3}{2}(P-S)$.
Раскроем скобки: $P'=S+\frac{3}{2}P-\frac{3}{2}S=\frac{3}{2}P-\frac{1}{2}S$.
Значит, $P'=(\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}u,-\frac{1}{2}v,0)$.
Теперь найдём тени концов верхнего края забора. Левый конец имеет координаты $(0,0,2)$, поэтому при $x=0$ получаем точку тени $(-\frac{u}{2},-\frac{v}{2},0)$, то есть на земле $(-\frac{u}{2},-\frac{v}{2})$.
Правый конец имеет координаты $(3,0,2)$, поэтому при $x=3$ получаем $(\frac{9}{2}-\frac{u}{2},-\frac{v}{2},0)$.
То есть на земле $(\frac{9}{2}-\frac{u}{2},-\frac{v}{2})$.
Итак, для фиксированного положения светлячка тень на земле - трапеция с вершинами $(0,0)$, $(3,0)$, $(-\frac{u}{2},-\frac{v}{2})$, $(\frac{9}{2}-\frac{u}{2},-\frac{v}{2})$.

Задача №5

Введём систему координат с началом в центре окружности, и так чтобы у одной из парабол вершина лежала на оси x и выше 0, эту параболу назовём A, далее по часовой стрелке параболы B и C.
Тогда, если маленькая окружность имеет радиус r, то ~~назовём~~ уравнение параболы A имеет вид $y=Cx^2+r$.
Также понятно, что точка касания парабол B и C, назовём её P, лежит на оси x и $P=(0,-1)$, так как она лежит на окружности по другую сторону от центра, чем парабола A.

Пусть точка касания парабол A, B – Q. Тогда очевидно, что $\angle POQ = 120°$ и значит $Q = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$. Прямая OP – касательная к параболам A и B в точке Q, она задана уравнением $y = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot x$. Значит производная в точке ~~Q~~ $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Равна $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Но производная в точке x равна $2 \cdot C \cdot x$.

$2C \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$C = \frac{1}{3}$

Теперь, так как $Q = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ лежит на нашей параболе, то $\frac{1}{2} = C \cdot (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + r = \frac{3C}{4} + r = \frac{1}{4} + r$

Отсюда $r = \frac{1}{4}$

Ответ: $\frac{1}{4}$

Задача № 7

Рассмотрим центральную клетку, ограниченную параболами.

$y = 2x^2 + n$, $y = 2x^2 + n + 1$,

$y = -2x^2 + n$, $y = -2x^2 + n + 1$.

Найдём её вершины.

Из $2x^2 + n = -2x^2 + n$ получаем $x = 0$, $y = n$, то есть точку $(0, n)$

Аналогично $2x^2 + n + 1 = -2x^2 + n + 1$ даёт точку $(0, n+1)$

Теперь $2x^2 + n = -2x^2 + n + 1$ даёт $4x^2 = 1$, $x = \pm\frac{1}{2}$,

И тогда $y = 2 \cdot \frac{1}{4} + n = n + \frac{1}{2}$.

Значит, ещё две вершины: $(-\frac{1}{2}, n + \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, n + \frac{1}{2})$.

После соединения соседних вершин получаем ромб.

Его диагонали равны 1 и 1.

Поэтому его площадь равна $S = \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow S_{max} \geqslant \frac{1}{2}$.

$\sqrt{3(1-tg^2x)} = 2\sqrt{2}\sin x$