76-13-15-78
(129.3)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 4

Место проведения Санкт-Петербург
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников им. Ломоносова
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Дворцова Леонида Борисовича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«23» марта 2026 года

Подпись участника

Дворцов

70 (семьдесят) фун.

76-13-15-78
(129.3)

Черновик

№1

$\sqrt{6\left(\frac{1}{\cos^2x}-\frac{1}{\sin^2x}\right)}=4 \Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2x}-\frac{1}{\sin^2x}=\frac{16}{6} \Leftrightarrow$

$\frac{\sin^2x-\cos^2x}{\sin^2x\cos^2x}=\frac{16}{6} \Leftrightarrow -\frac{\cos^2x-\sin^2x}{4\sin^2x\cos^2x}=\frac{4}{6} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\frac{\frac{\cos 2x}{\sin^2 2x}}{\cos^2 2x}=\frac{4}{6} \Leftrightarrow -\frac{\sin 2x}{1-\sin^2 2x}=24 \Leftrightarrow$

$-\sin 2x=24-24\sin^2 2x \Rightarrow 24\sin^2 2x-\sin 2x-24=0$

$\frac{1}{1-\sin^2x}-\frac{1}{\sin^2x}=16\cdot 6 \Leftrightarrow \sin^2 x = t:$

$\frac{1}{1-t}-\frac{1}{t}=16\cdot 6 \Leftrightarrow \frac{t-1+t}{(1-t)t}=16\cdot 6 \Leftrightarrow$

$2t-1=-96t^2+96 \Leftrightarrow$

$96t^2+2t-97=0$

$-\frac{\cos 2x}{\sin^2 2x}=\frac{4}{6} \Leftrightarrow$

$24t^2-t-24=0$

$-\frac{\cos 2x}{1-\cos^2 2x}=\frac{4}{6} \Leftrightarrow$

$D=1+4\cdot 24^2=2305$

$\begin{array}{r} 24 \\ \times 24 \\ \hline 96 \\ 48 \\ \hline 576 \end{array}$

$\sin 2x=\frac{1\pm\sqrt{2305}}{48}$

$-6\cos 2x=4-4\cos^2 2x$

$2x=\pm\arccos -\frac{1}{4}+2\pi k$

$4\cos^2 2x-6\cos 2x-4=0$
(2) (-3) (-2)

$2000+280+24=2304$

$\begin{array}{r} 48 \\ \times 48 \\ \hline 384 \\ 192 \\ \hline 2304 \end{array}$

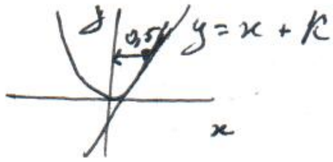
$D=9+4\cdot 2\cdot 2=9+16=25$

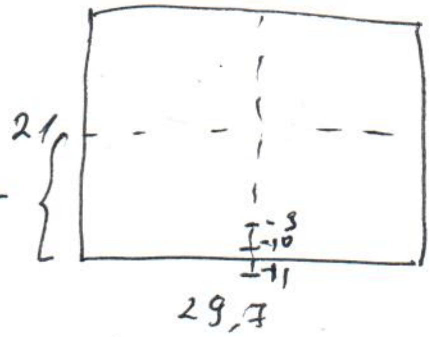
$\cos 2x=\frac{3\pm5}{4}=-\frac{1}{4},\ 2$, нет

$2\cos^2 x-1=-\frac{1}{4} \Leftrightarrow$

Черновик

1,





$(Cx^2)' = 1 \Leftrightarrow 2Cx = 1$, подставим:

$2 \cdot C \cdot \frac{1}{2} = 1 \Leftrightarrow C = 1$

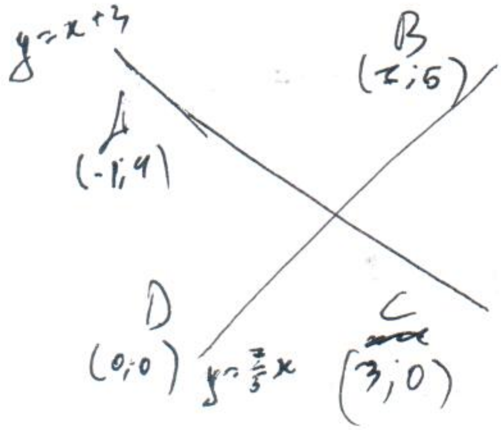
$y\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

$\frac{1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}}{2} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$

$\sin k\pi x = 1$

$k\pi x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$

$kx = \frac{1}{2} + 2n$



$\overrightarrow{DB} = (7;5)$

$\overrightarrow{AC} = (4;-4)$

$17x = \frac{1}{2} + 2n$

$17x = \frac{1}{2} + 2n$

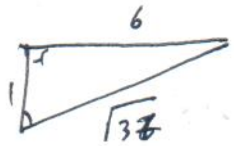
$17x = \frac{1}{2} + 2n$

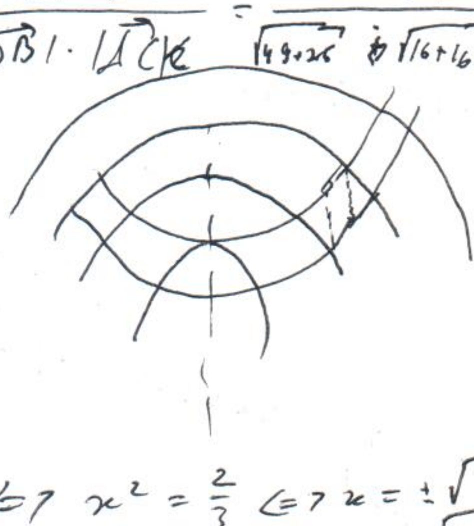
$x = \frac{1+4n}{22} - 5$

$x = \frac{1+4n}{26} - 6$

$x = \frac{1+4n}{34} - 8$

$\cos \widehat{DB, AC} = \frac{|\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{DB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{7 \cdot 4 + 5 \cdot (-4)}{\sqrt{49+25} \cdot \sqrt{16+16}} = \frac{8}{\sqrt{74} \cdot \sqrt{32}} = \frac{1}{\sqrt{37}}$





$\frac{3}{4}x^2 = -\frac{3}{4}x^2 + 1$

$\frac{3}{2}x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$

$2\sqrt{\frac{2}{3}}$

76-13-15-78 (129.3)

Чистовик №1

Ограничим значение ~~аргу~~ аргумента:

$\cos x \geqslant 0$, тогда $x \in [-\frac{\pi}{2}+2\pi k; \frac{\pi}{2}+2\pi k : k \in \mathbb{Z}]$

$1-ctg^2x \geqslant 0$, тогда $ctg^2 x \leq 1$, $|ctg\, x| \leq 1$,

получаем: $x \in [\frac{\pi}{4}+\pi k; \frac{3\pi}{4}+\pi k : k \in \mathbb{Z}]$, объединим:

$x \in [-\frac{\pi}{2}+2\pi k; -\frac{\pi}{4}+2\pi k : k \in \mathbb{Z}] \cup [\frac{\pi}{4}+2\pi k; \frac{\pi}{2}+2\pi k : k \in \mathbb{Z}]$.

На этом ограничении сделаем преобразования:

Проверим, что $\cos x \neq 0$ (тогда $ctg\, x = 0$). Действительно $\sqrt{6} \neq 0$, разделим обе части на $\cos x$:

$$\sqrt{6\left(\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)} = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{16}{6} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{4\cdot \sin^2 x \cos^2 x} = \frac{16}{4\cdot 6} \Leftrightarrow \frac{-\cos 2x}{\sin^2 2x} = \frac{4}{6} \overset{\sin x \neq 0}{\Leftrightarrow}$$

$$-6\cos 2x = 4 - 4\cos^2 2x \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 3\cos 2x - 2 = 0$$

$D = 9 + 4\cdot 2\cdot 2 = 9+16 = 25$, имеем:

$$\left[\begin{array}{l}\cos 2x = \frac{3-5}{4}\\ \cos 2x = \frac{3+5}{4}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x = -\frac{1}{4}\\ \cos 2x = 2 \text{ - нет реш.}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x = -\arccos -\frac{1}{4} + 2\pi k\\ 2x = \arccos -\frac{1}{4} + 2\pi k\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{-\arccos -\frac{1}{4}}{2} + \pi k\\ x = \frac{\arccos -\frac{1}{4}}{2} + \pi k\end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

решения попадают в установленные ограничения: ~~$\arccos -\frac{1}{4} \in (\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2})$, $\frac{\arccos -\frac{1}{4}}{2} \in (\frac{\pi}{2};$~~

$\arccos -\frac{1}{4} \in (\frac{\pi}{2}; \pi) \Leftrightarrow \frac{\arccos -\frac{1}{4}}{2} \in (\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2})$,

аналогично с другим корнем.

Ответ: $\left\{\frac{-\arccos -\frac{1}{4}}{2} + \pi k; \frac{\arccos -\frac{1}{4}}{2} + \pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Чистовик №5

Разместим систему координат так, что верхняя сторона квадрата имеет вершину ~~вершина~~ параболы в (0;0).

Искомые углы одинаковы, что угол между касательными в точке ~~касания~~ соприкосновения парабол равен, тогда параболы касаются друг друга.

~~Т.к.~~ Т.к. диагональ ~~к~~ квадрата (вершины точек касания образуют квадрат) составляет $45°$ со стороной, то касательная к параболам верхней правой точки равна $y = x + \cancel{k}b$. Пусть сторона квадрата равна $\frac{1}{2}$ (из условия), имеем:

$y'(\frac{1}{2}) = 1 \Leftrightarrow 2Cx_{1/2} = 1 \Leftrightarrow 2 \cdot C \cdot \frac{1}{2} = 1 \Leftrightarrow C = 1$

теперь найдём расстояние ~~от этой~~ этой точки касания до оси Ox: $y(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$

Радиус равен ~~...~~ $1:2 - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

Ответ: $\frac{1}{4}$.

№6 (1/2)

Назовём точки $C(3;0)$ и $D(0;0)$. Точка в тени, если прямая, соед. её с светлячком пересекает отрезок CD. Тогда точки затемнённые лежат ниже всех трёх прямых: DB, DC, AC.

Найдём угол между AC и DB:

$\vec{DB} = (7;5)$, $\vec{AC} = (\cancel{4}4;-4)$

$$\cos \widehat{\vec{DB}, \vec{AC}} = \frac{|\vec{DB} \cdot \vec{AC}|}{|\vec{DB}| \cdot |\vec{AC}|} = \frac{7 \cdot 4 + 5 \cdot (-4)}{\sqrt{49+25} \cdot \sqrt{16+16}} = \frac{8}{\sqrt{74} \cdot \sqrt{32}} = \frac{1}{\sqrt{37}}$$

$\arccos \frac{1}{\sqrt{37}} < \frac{\pi}{2}$, поэтому угол между векторами равен углу между прямыми

Чистовик №6 (2/2)

Площадь закрашенного участка равна части плоскости, ограниченной углом $\arccos\frac{1}{\sqrt{37}}$ минус $S_{\Delta DOC}$, где $O = DB \cap AC$, т.е. условно $\infty - S_{\Delta DOC} = \infty$

Часть пространства, огр. углом: $\frac{\arccos\frac{1}{\sqrt{37}}}{2\pi}$

Ответ: $\frac{\arccos\frac{1}{\sqrt{37}}}{2\pi}$

№2

Т.к. число после деления кратно 9, то и до деления оно кратно 9 (при делении новые простые множители не добавляются), тогда сумма цифр его кратна 9, само число равно $a=b\cdot S$, где $b\equiv 0 \pmod 9$ и S - сумма цифр, $S\equiv 0 \pmod 9$, тогда число a кратно $9\cdot 9=81$

Это необходимое и достаточное условие (необходимость док-на, а иных условий в задаче нет на множество A)

Такие трёхзначные числа:

$81\cdot 1=81<100$ — нет

$81\cdot 2=162$ ✓

$81\cdot 3=243$ ✓

$81\cdot 4=324$ ✓ — третье

$81\cdot 5=405$ ✓

$81\cdot 6=486$ ✓ — пятое

$81\cdot 7=567$ ✓

$81\cdot 8=648$ ✓

$81\cdot 9=729$ ✓

$81\cdot 10=810$ ✓

$81\cdot 11=891$ ✓ — предпосл

$81\cdot 12=972$ ✓

$81\cdot 13>1000$ — нет

Сумма трёх: $324+486+891=1701$

Ответ: 1701.

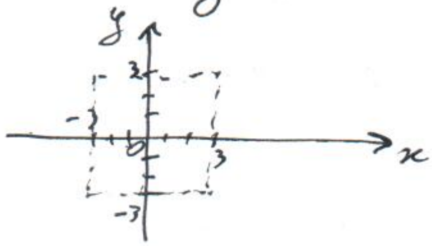
Чистовик №3

Треугольник однозначно задаётся двумя катетами (их длиной и положением).

Сущ. 3 случая: катеты соотв. параллельны один — оси x, другой — оси y; один — y, другой — z; один — x, другой — z. Одной прямой быть параллельны не могут, стороны параллельными.

В каждом из случаев треугольники параллельны плоскостям xOy, yOz, xOz соответственно.

Для xOy:



Выбор точки-вершины прямого угла из $7 \cdot 7 = 49$ вершин, из остальных вершин, лежащих на прямых, пересечением которых образуют вершины прямоугольного треугольника $(7-1)(7-1) = 36$

Таких плоскостей, парал. xOy 7.

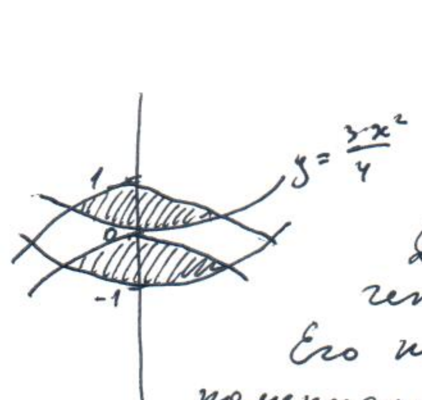
Аналогично для xOz и yOz, треугольники повторяться не будут. Всего 3 случая.

$49 \cdot 36 \cdot 7 \cdot 3 = 7^3 \cdot 6^2 \cdot 3$

Ответ: $7^3 \cdot 6^2 \cdot 3$.

№7 (1/2)

Сравним площади для чёрной и белой клетки (см. рис)



Для чёрной ~~кл~~ клетки четырёхугольник — ромб.

Его площадь равна ~~произведению~~ полупроизведению диагоналей, точки пересечения $y = \frac{3x^2}{4}$ и $y = \frac{-3x^2}{4} + 1$:

$\frac{3x^2}{4} = \frac{-3x^2}{4} + 1 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$, диагональ, Чистовик

№7 (2/2)

параллельная Ox — $2\sqrt{\frac{2}{3}}$, Oy — 1, площадь $\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2\sqrt{\frac{2}{3}}=\sqrt{\frac{2}{3}}$

Площадь этих четырёх клеток (см. рис.) — площадь ромба

$y=x^2\cdot\frac{3}{4}+1$ и $y=-\frac{3}{4}x^2-1$ общие точки:

$x=\pm\frac{\sqrt{4}}{3}$, длина гориз. диагонали: $\frac{4}{\sqrt{3}}$

Его площадь: $\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{4}{\sqrt{3}}=\frac{4}{\sqrt{3}}$

Тогда площадь белого: $\frac{4}{\sqrt{3}}:2-\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$\sqrt{\frac{2}{3}}>\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ „белые" клетки дальше от центра — меньше.

Ответ: $\sqrt{\frac{2}{3}}$.