0 933576 650006

93-35-76-65
(122.12)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 9 класс

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Демьяновой Елены Александровны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

+1 лист

Дата

«29» марта 2026 года

Подпись участника

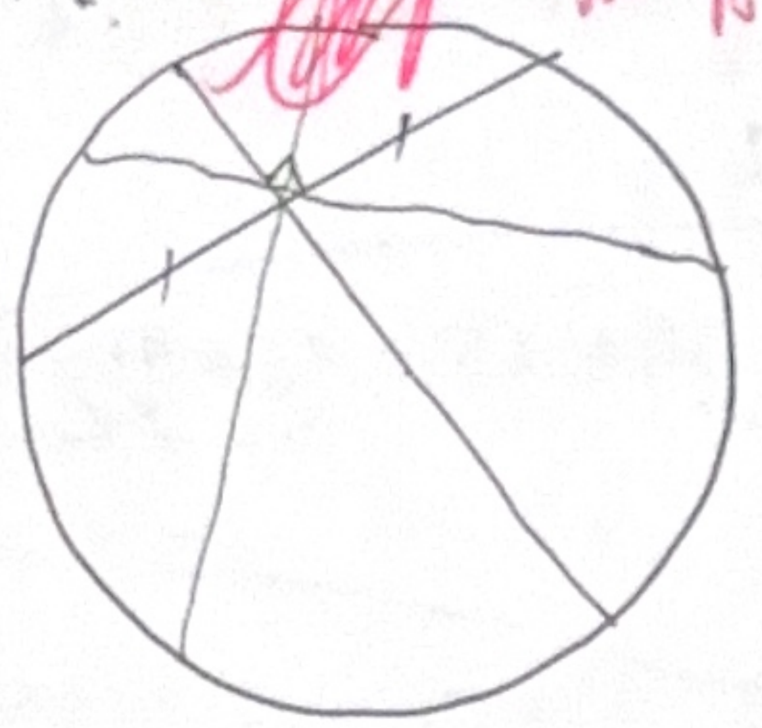
Е. Дем

93-35-76-65
(122.12)

85 (восемьдесят пять)

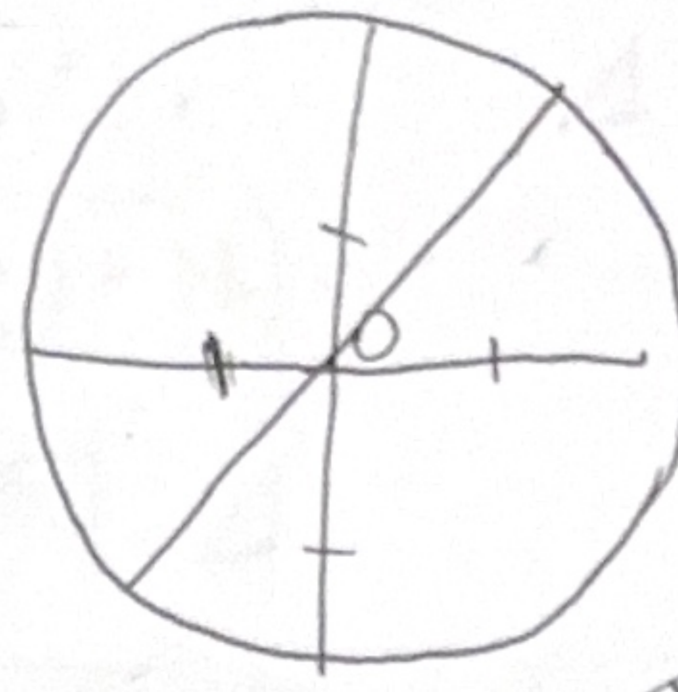
Черновик

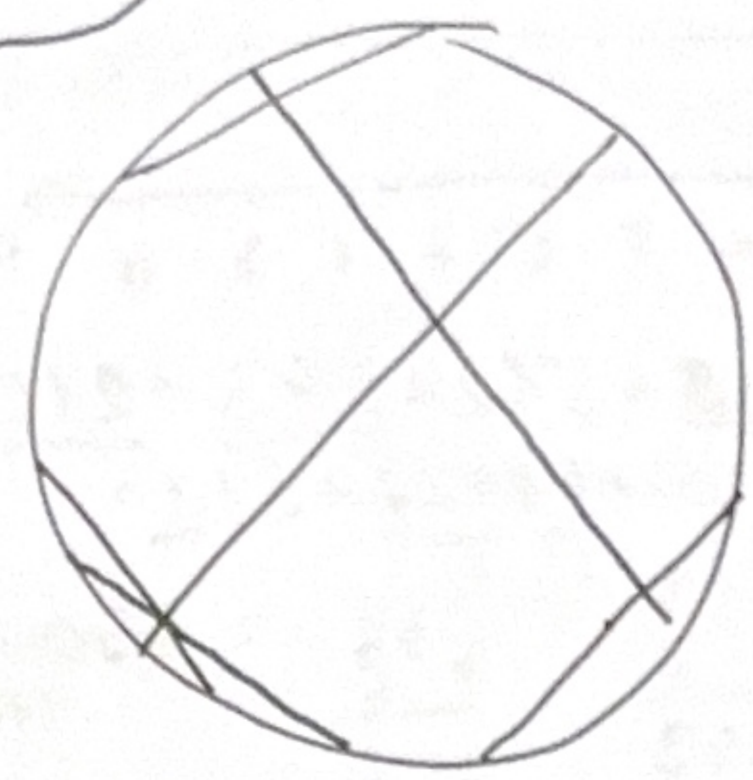
№1.



диам

10





№2.

0 0
1·1=1
2 4
3 9
4 16
5 25
6 36
7 49
8 64
9 81

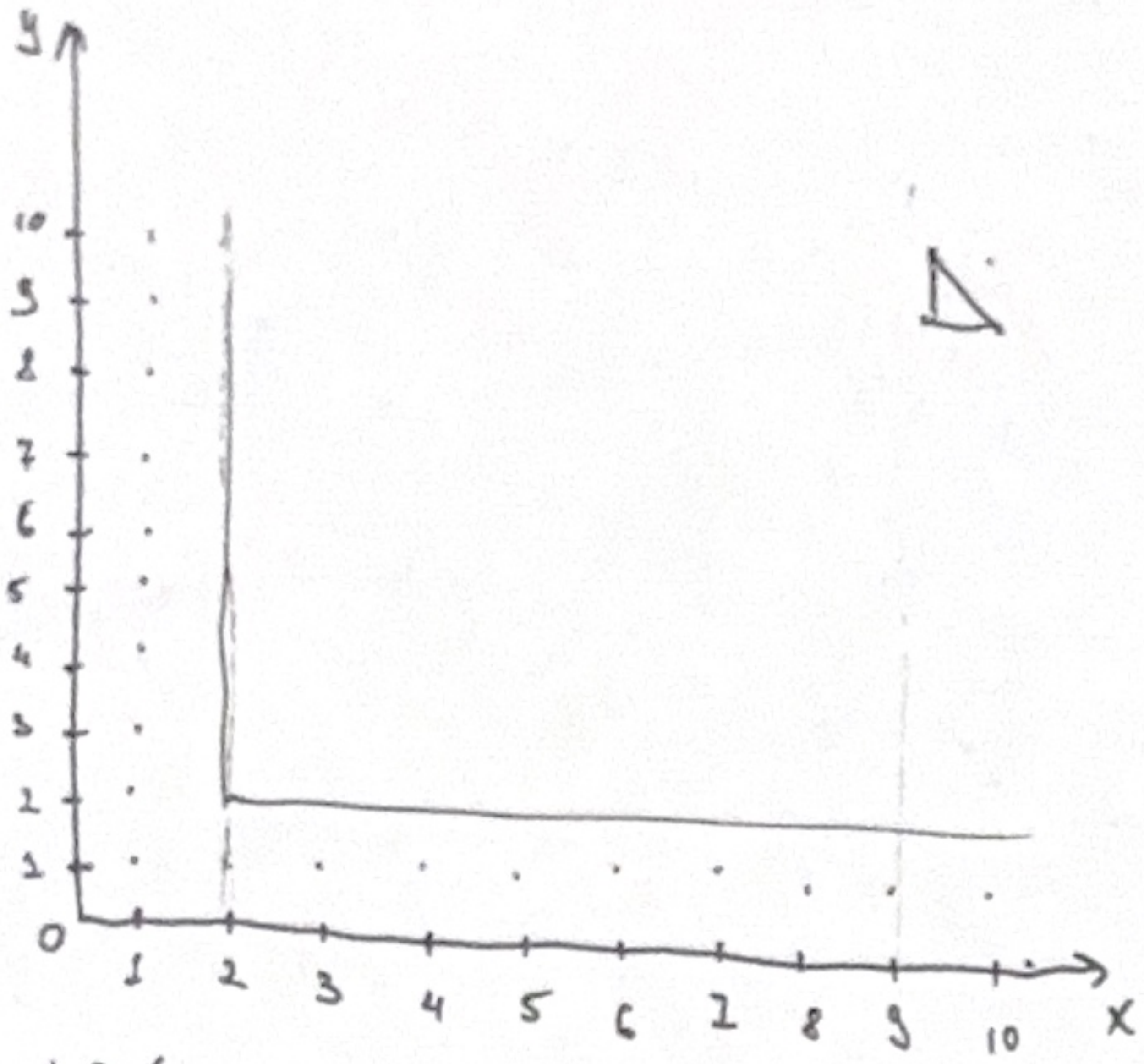
1000

$\times$ 94
94
376
846
8836

$\times$ 99
99
891
891
9801

$\times$ 9999
9999
89991
89991
89991
89991
99980001

№3. Черновик



$+2\left(9\cdot 8+9\cdot 7+\ldots+9\cdot 1\right.$

$\left(9^2+8^2+7^2+6^2+5^2+4^2+3^2+2^2+1^2\right)4=$

$=(81+64+49+36+25+16+9+4+1)4=$

$=(90+100+20+25+58)4=$

$729+512+343+216+125+64+27+8+1=$

$(210+83)4=293\cdot 4=1172$ X

$81\cdot 8$; $64\cdot 8=512$

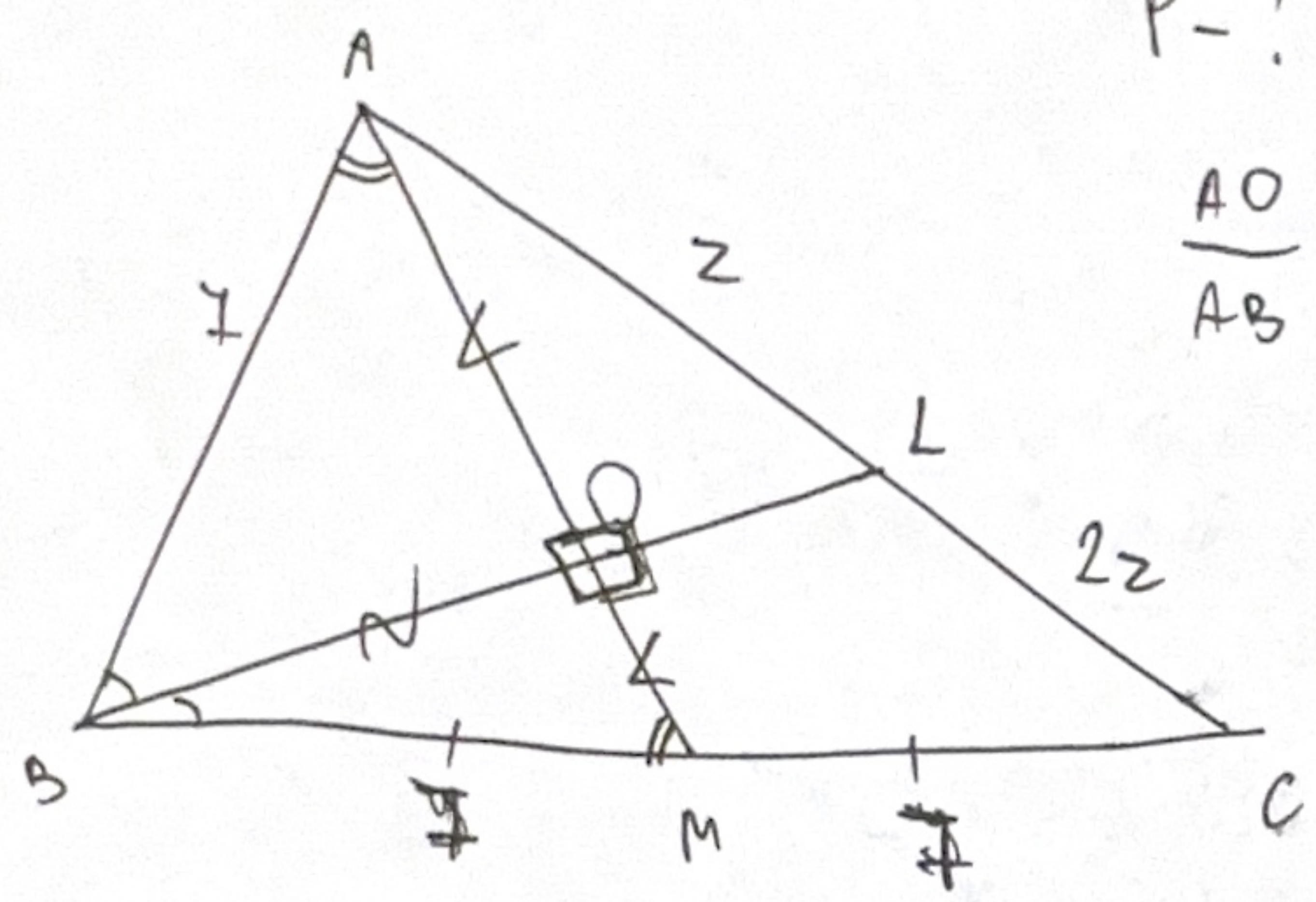
№4. $49\cdot 7=343$ $\quad 36\cdot 6=216$

$=730+370+280+520+125=2025$

$1100 \quad 800 \quad 1900$

$45\cdot 45$: $4 \quad 8100$

P – ? $\quad AC, BC\in\mathbb{Z}$



$\frac{AO}{AB}=\frac{OM}{BM}$ $\quad \frac{AO}{7}=\frac{OM}{y}$ $\quad AO\cdot y=7\cdot OM$

$\frac{AL}{AB}=\frac{LC}{BC}$ $\quad \frac{AL}{7}=\frac{LC}{2y}$

$2y\,AL=7\,LC$

$\triangle ABO=\triangle MBO$

$\cancel{\frac{AB}{BM}=\frac{BO}{}}$ $\quad AB=BM=y=7$

$BC=2\cdot 7=14$

Менелай: $\frac{CL}{LA}\cdot\frac{AO}{OM}\cdot\frac{MB}{BC}=1$ $\quad \frac{AO}{OM}=\frac{1}{1}$, $\frac{MB}{BC}=\frac{7}{14}=\frac{1}{2}$

$\frac{CL}{LA}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}=1$

$\frac{CL}{LA}=\frac{2}{1}$

нер-во тр-ка:

$AB+BC>AC$ $\quad 7+3z>14$

$21>3z$ $\quad 3z>7$

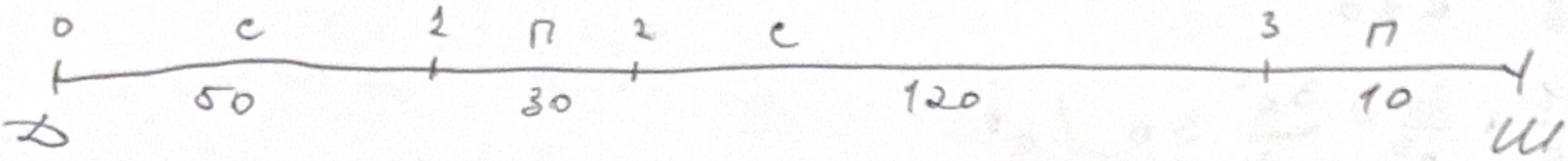
$\cancel{7>z}$ $\quad \cancel{z>\frac{7}{3}=2\frac{1}{3}}$

$21>\overset{AC}{3z}>7$ $\quad \cancel{14}$

$P_{min}=21+8=29$ $\quad P=AB+BC+AC=7+14+AC=$

$P_{max}=21+20=41$ $\quad =21+AC$ $\quad P\in[29;41]\setminus\{35\}$

№5 Черновик



1: 30м М: 30с П: 50с

2: 10м М: 50с П: 50с

пытается успеть к зелёному на 1 свет.

$v = \frac{50м}{30с} = \frac{5}{3}$ м/с ~~от 0 до 1~~ от 0 до 1

$t = \frac{30+120}{\frac{5}{3}} = \frac{\cancel{150}^{30} \cdot 3}{\cancel{5}} = 90с$ от 1 до 3 с $v \frac{5}{3}$ м/с

от 0 до 3 $30с + 90с = 120с$

2св. $\underset{м}{10с + 50с} + \underset{п}{50с} + \underset{м}{50с} = 160с$

пыт. успеть к 3 на 2 свет:

$\frac{50+30+120}{160} = \frac{20\cancel{0}}{16\cancel{0}} = \frac{5}{4}$ м/с

тогда на 1 свет: будет через:

$\frac{50м}{\frac{5}{4}} = \frac{50 \cdot 4}{5} = 40с$ останется $\overset{80-40}{40с}$ для перехода

$\frac{30}{\frac{5}{4}} = \frac{\cancel{30}^{6} \cdot 4}{\cancel{5}} = 24с \Rightarrow$ успеет

Черновик

№6. $a \neq 0$

$$\frac{1}{a}+\frac{2x}{a^2}-\frac{3x^2}{a^3}\leq 0 \quad \Big| \cdot a^3$$

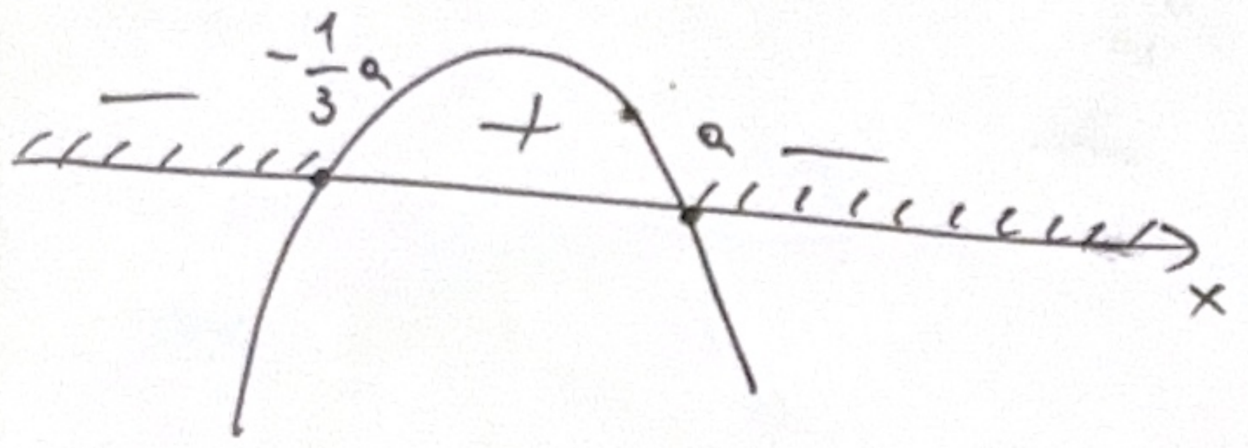
$a>0$:

$$a^2+2xa-3x^2\leq 0$$

$$-3x^2+(2a)x+a^2\leq 0$$

$$D=(2a)^2-4\cdot(-3)\cdot a^2=4a^2+12a^2=16a^2$$

$$x_{1,2}=\frac{-2a\pm\sqrt{16a^2}}{-6}=\frac{-2a\pm 4a}{-6}=\left[\begin{array}{l} a \\ -\frac{1}{3}a\end{array}\right.$$



∞ кол-во реш

при любом a

$a<0$

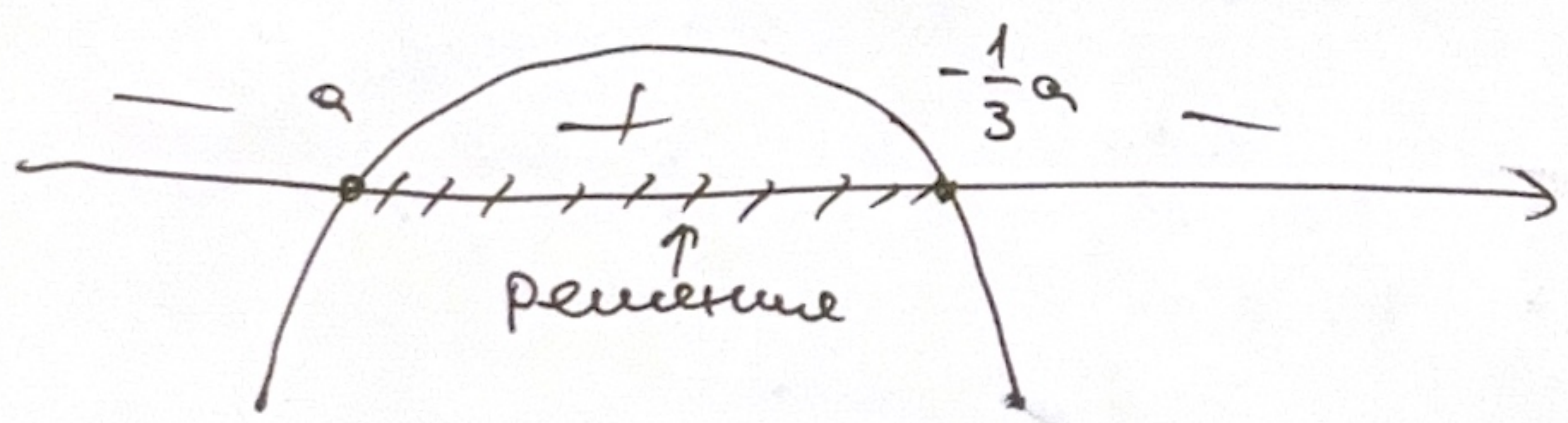
~~$a^2+2xa-3$~~

$$a^2+2xa-3x^2\geq 0$$

$$-3x^2+(2a)x+a^2\geq 0$$

$$D=16a^2$$

$$x_{1,2}=\frac{-2a\pm\sqrt{16a^2}}{-6}=\left[\begin{array}{l} -\frac{1}{3}a \\ a\end{array}\right.$$



$$\begin{array}{r} 506{,}5 \\ \times\quad 3 \\ \hline 1519{,}5 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1519{,}5 \\ +\ 506{,}5 \\ \hline 2026{,}0 \end{array}$$

$$-\frac{1}{3}a-a=2026$$

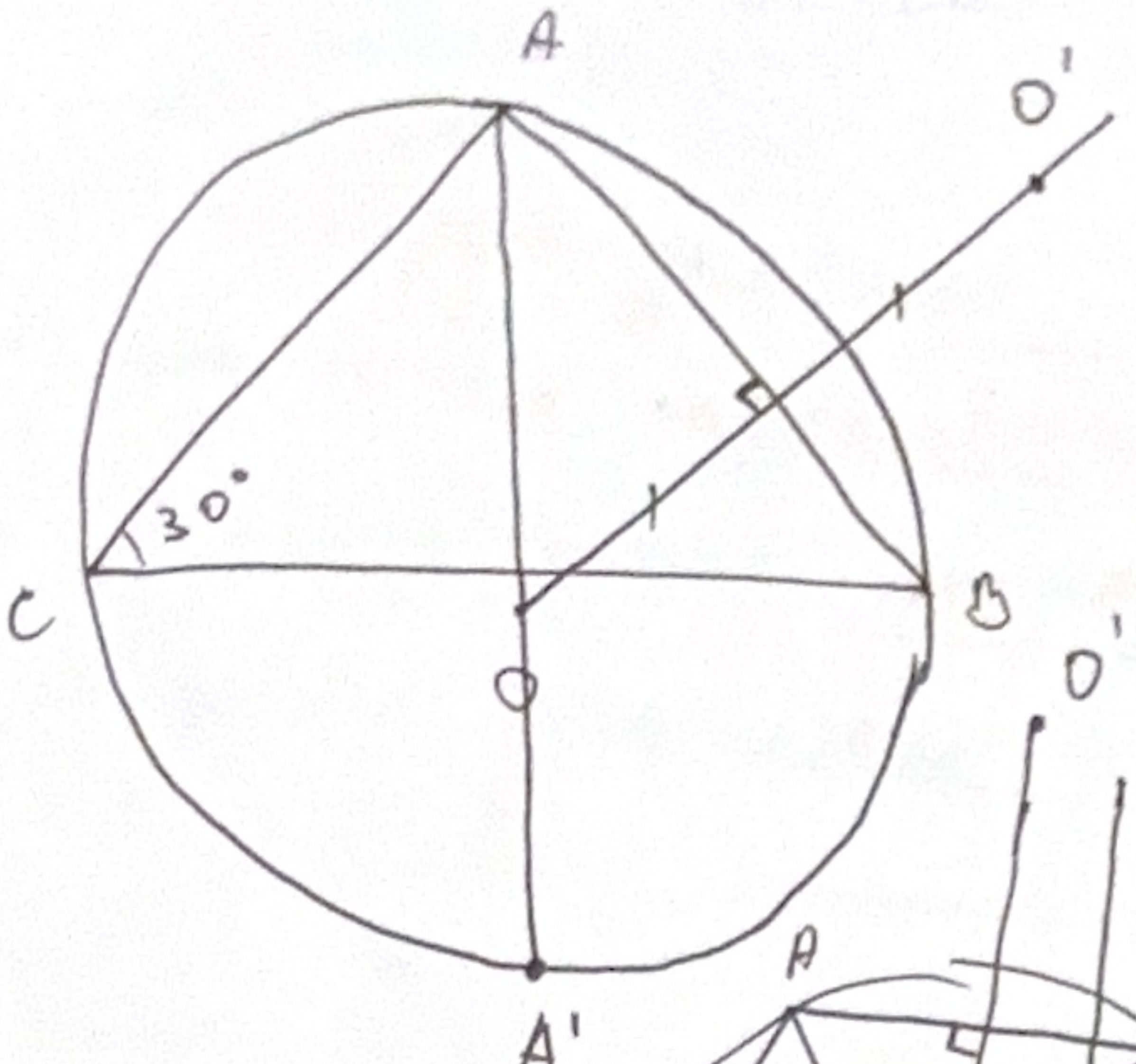
$$-\frac{4}{3}a=2026$$

$$a=\frac{2026}{-\frac{4}{3}}=\frac{-2026\cdot 3}{4}=-\frac{1013\cdot 3}{2}=$$

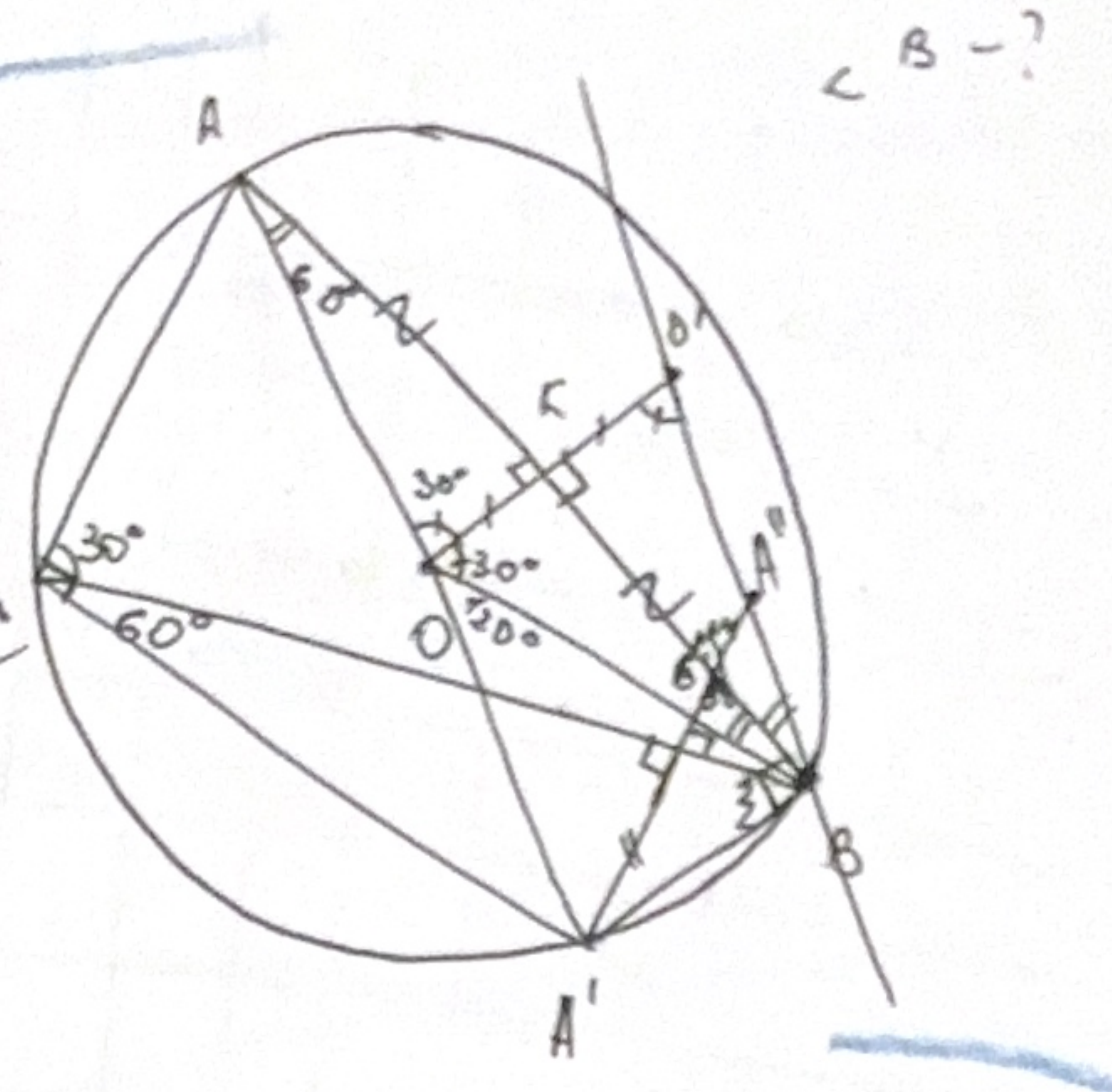
$$=-506{,}5\cdot 3=-1519{,}5$$

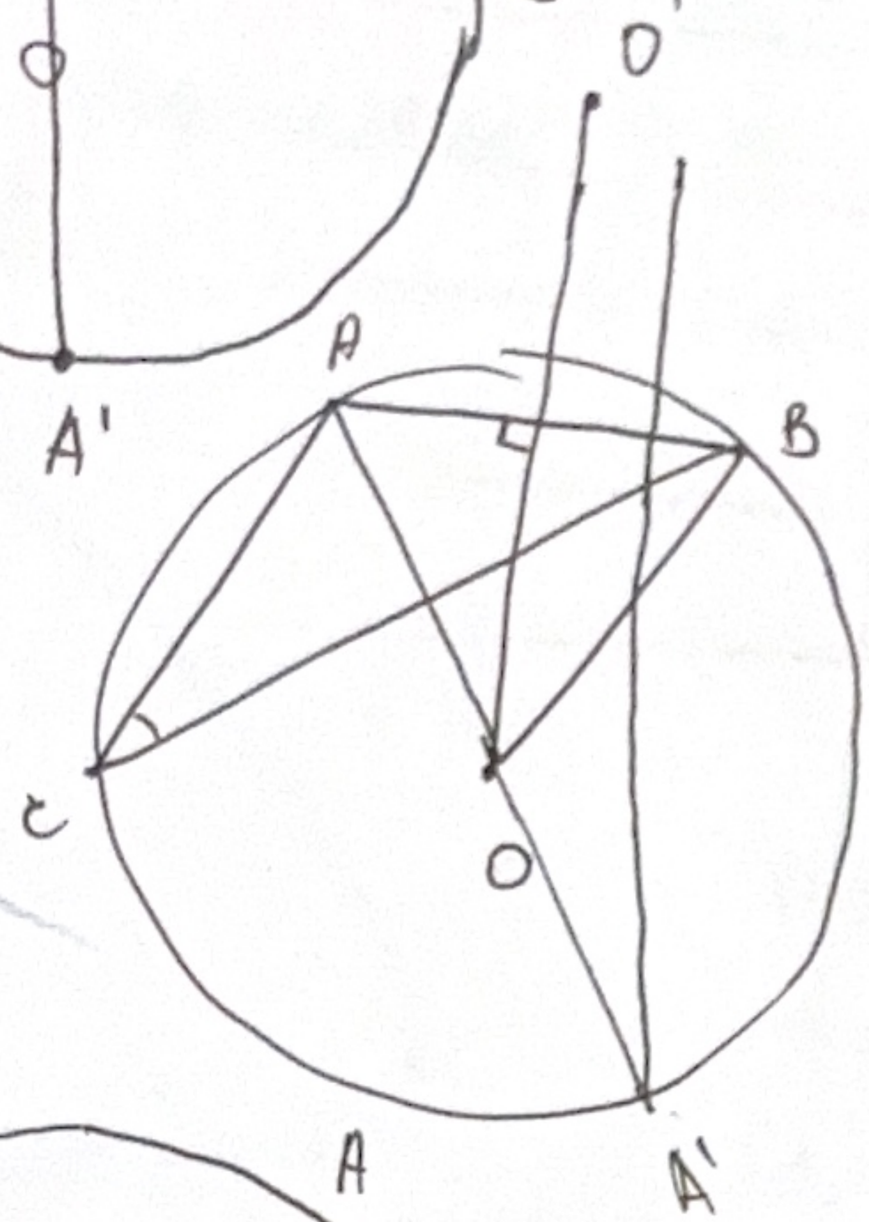
№7.

Черновик



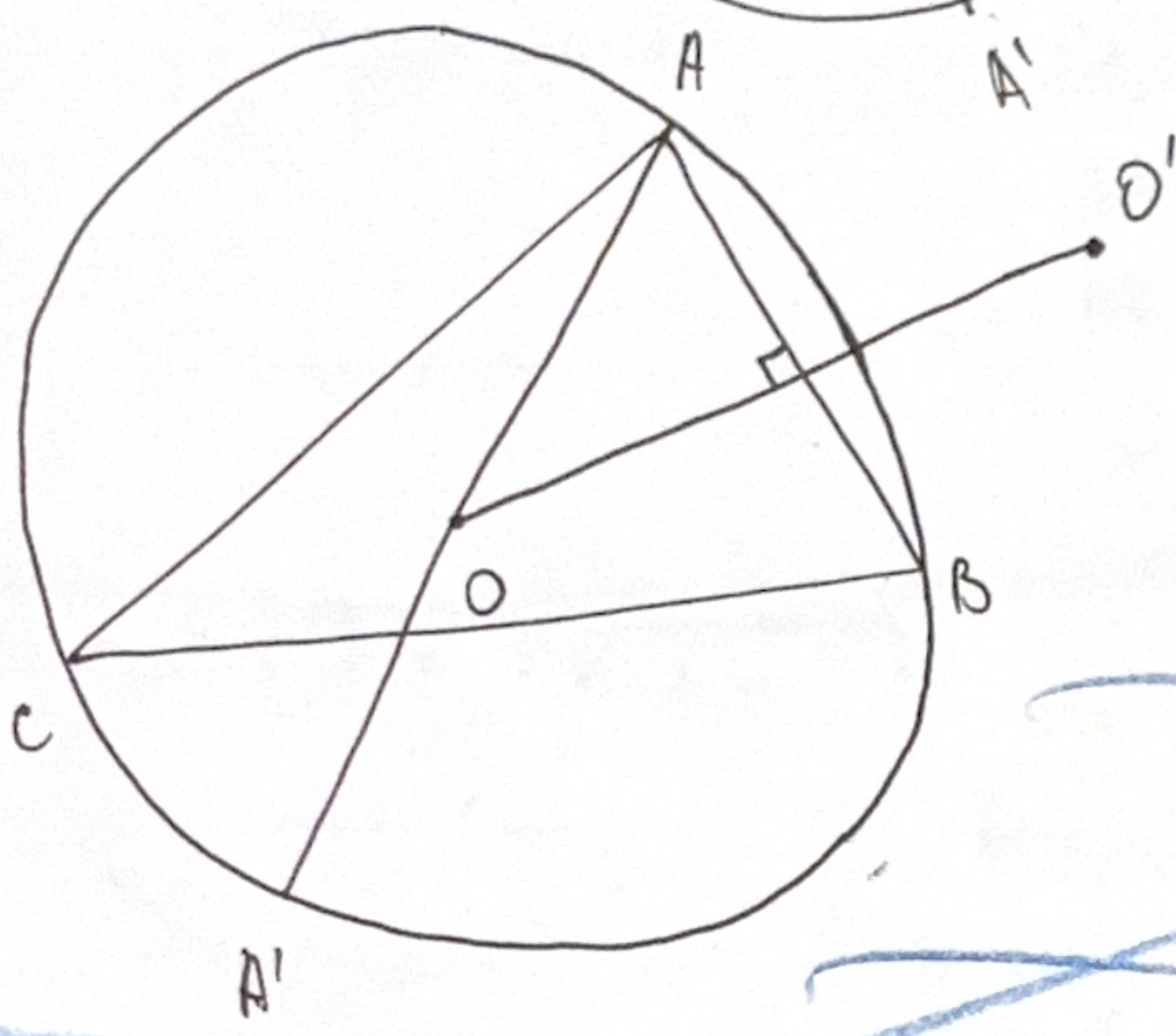
$\angle B - ?$

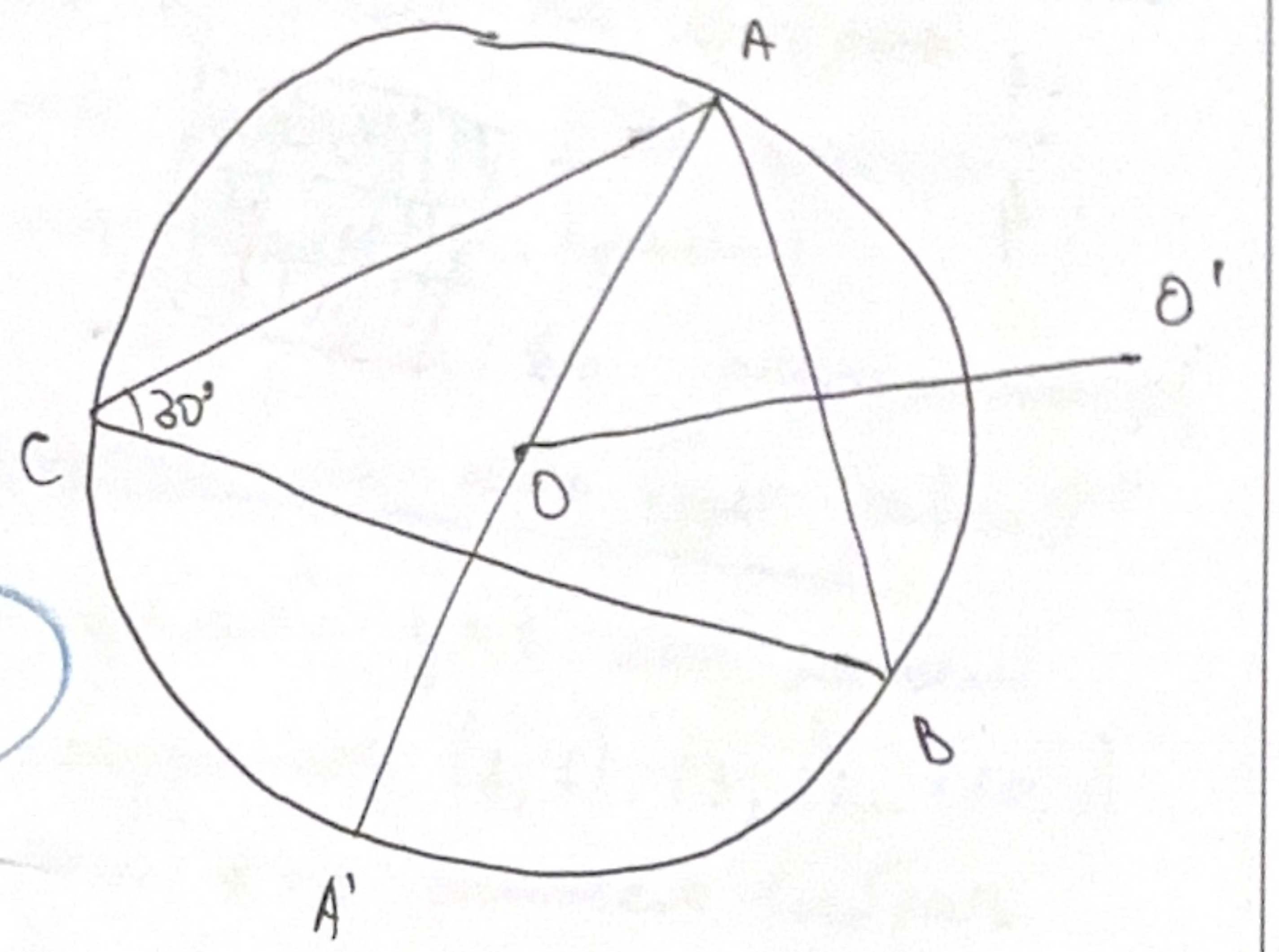


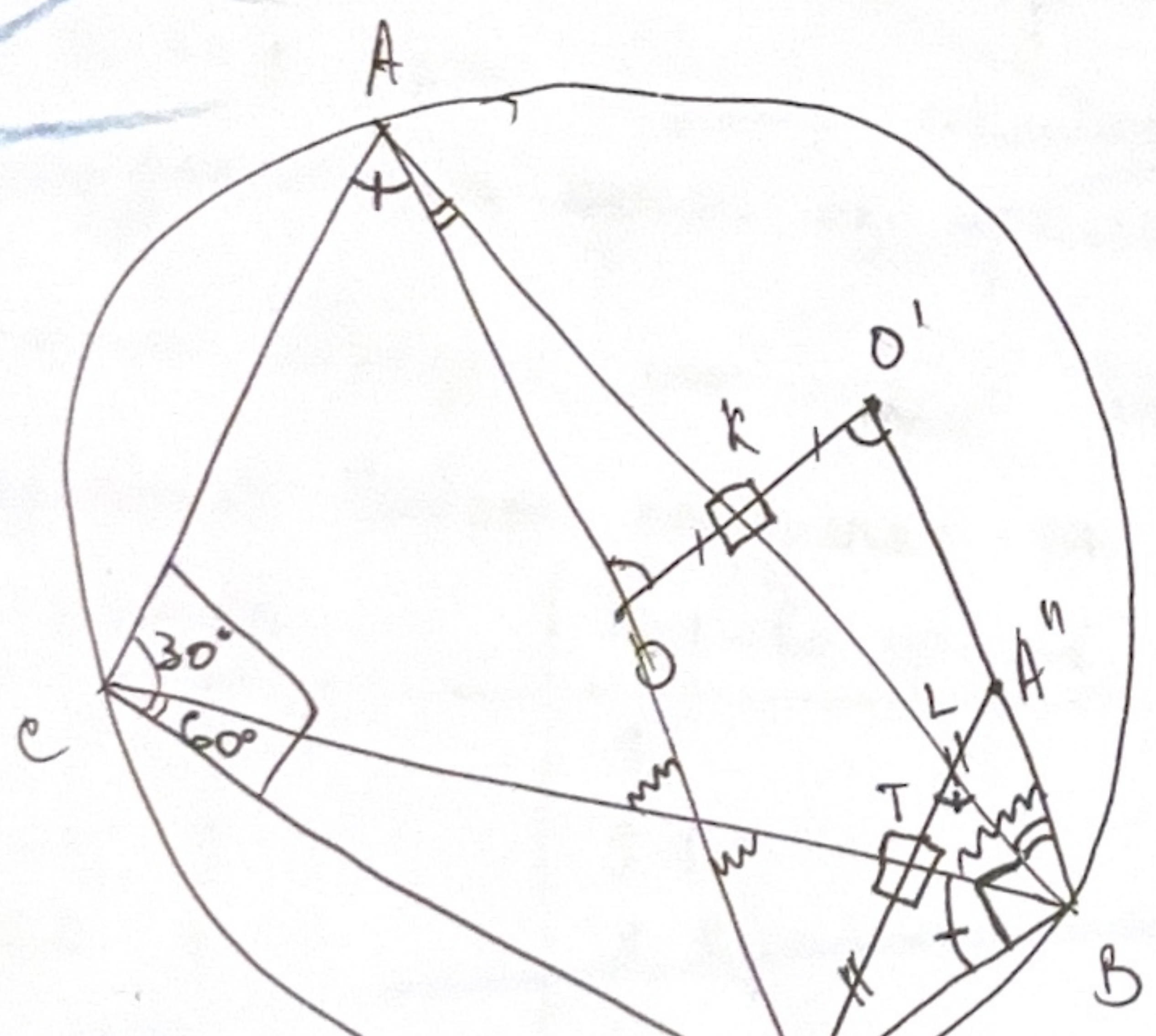


$\triangle AOK = \triangle BO'K$

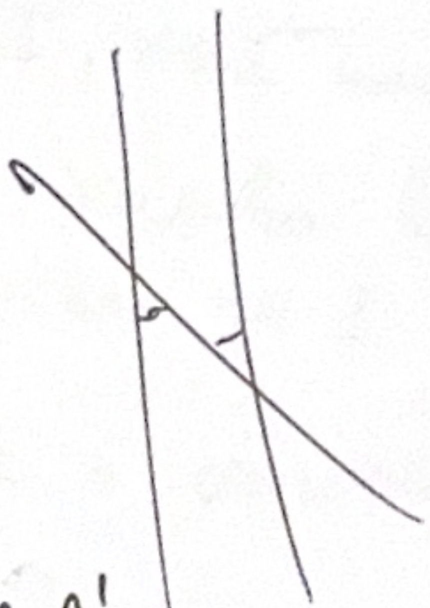
$O'B = R$







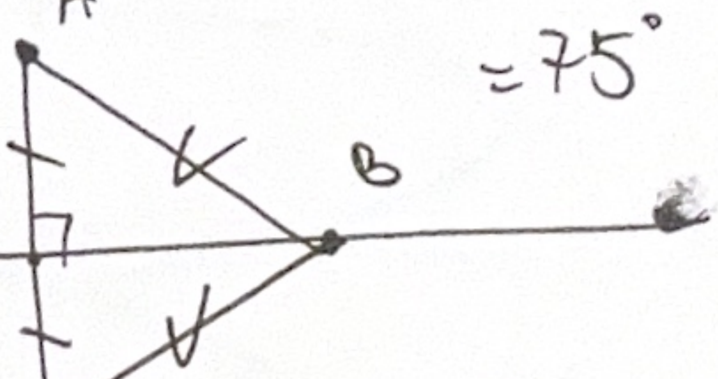
$AA' \parallel O'B$



$A'B = BA''$

$\triangle A'TB \sim \triangle A'B'L$

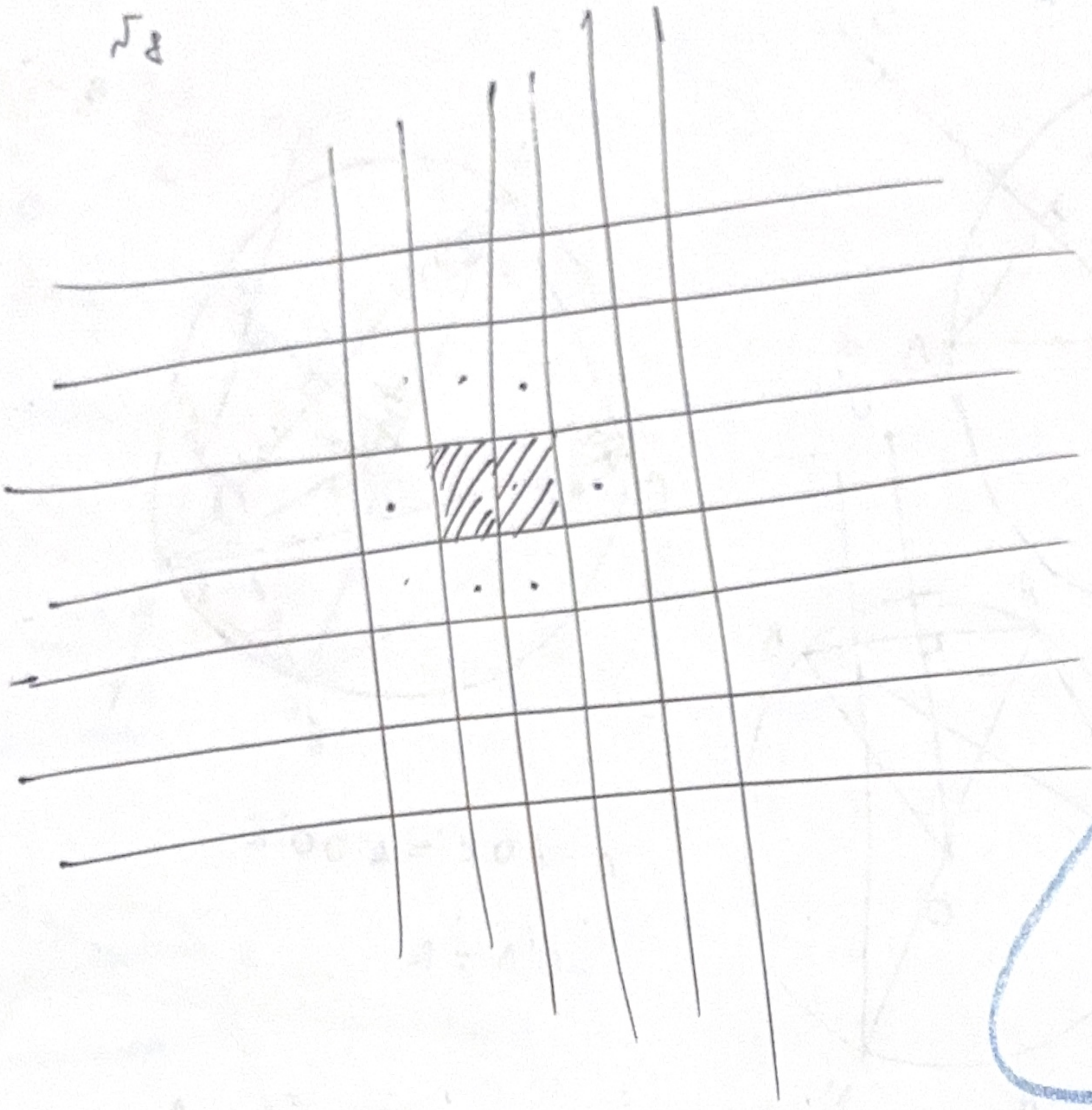
$\xi = \gamma = \frac{90+60}{2} = 75^\circ$



$\angle B = 90 - 75 = 15^\circ$

Черновик

$\sqrt{8}$



$\frac{1}{4}$

$\frac{1}{13}$

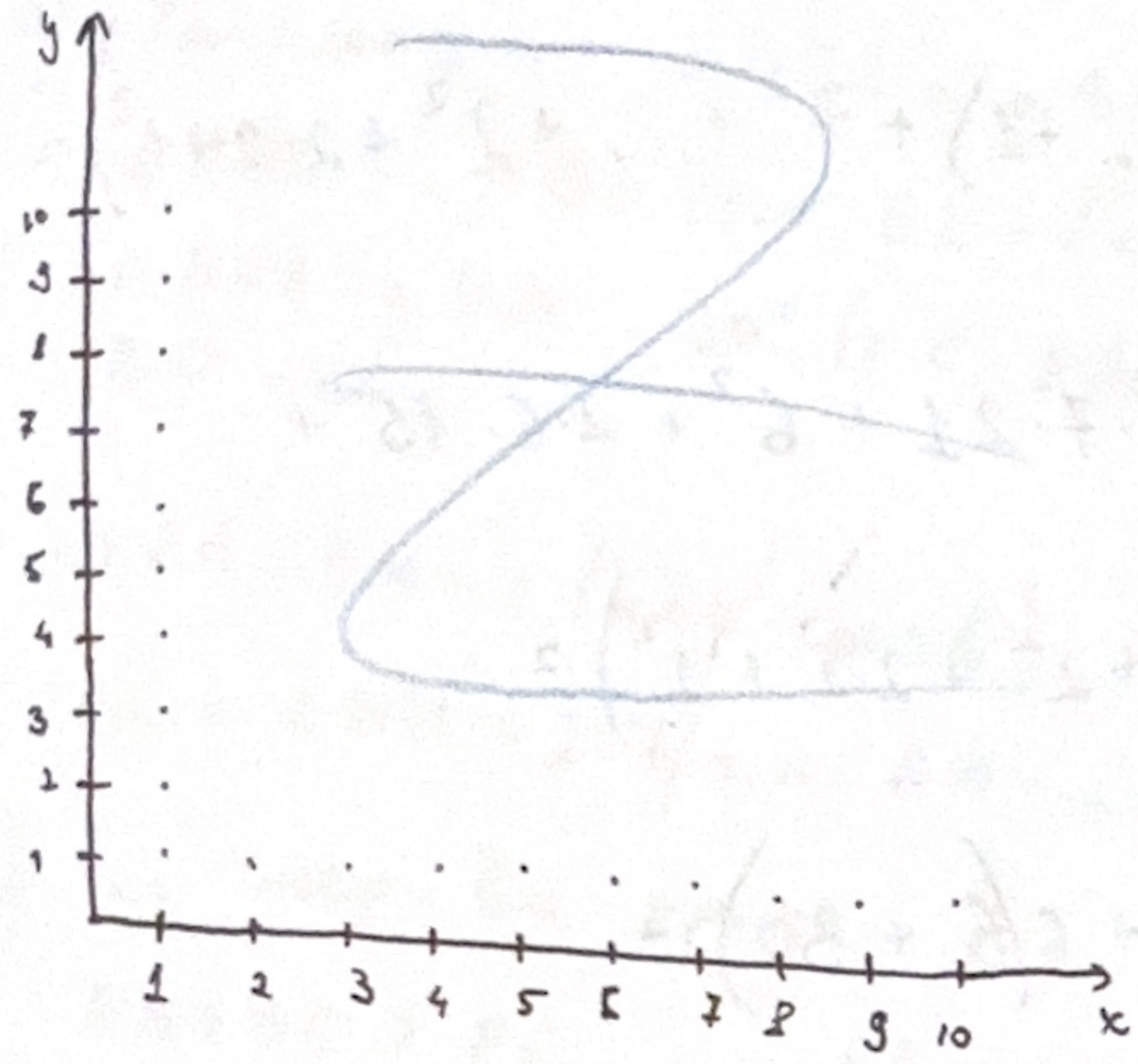
Чистовик

№1.

т.к. 2 хорды делятся точкой пересечения пополам => эта точка пересечения — центр ~~окружно~~ круга => 3 хорда тоже проходит через центр круга и является диаметром => её длина равна двум радиусам, т.е. $2 \cdot 5 = 10$

Ответ: 10.

№3.



чтобы каждый катет был параллелен осям Ox или Oy, выберем прямые, на которых должны лежать эти катеты: если мы выберем прямые $y=1$, $x=1$, кол-во треугольников, построенных на них будет равно 9^2, т.к. на прямой $y=1$ мы можем выбрать координату $(2;1), (3;1) \dots (10,1)$ и на прямой $x=1$ можем выбрать $(1;2), (1;3) \dots (1;10)$.

Далее мы можем выбрать прямые $y=1$, $x=2$ или $y=2$, $x=1$ — эти случаи симметричны, в них кол-во выборов координат на одной из прямых уменьшится на 1

Таким образом, мы будем выбирать прямые и считать кол-во вариантов выбора координат на каждой из них:

прямые		кол-во тр-ков
$x=1$	$y=1$	9^2
$x=1$	$y=2$	$9 \cdot 8$
$x=2$	$y=1$	$8 \cdot 9$
....		....
$x=2$	$y=2$	8^2
$x=2$	$y=3$	$8 \cdot 7$
$x=3$	$y=2$	$8 \cdot 7$
...		...
$x=9$	$y=9$	1^2

Чистовик

Таким образом мы посчитали все треугольники с катетами расположенными так: ,

но ещё тр-ки могут располагаться: , , ,

поэтому, то, что мы посчитали мы должны домножить на 4, т.к. эти случаи симметричны, но их 4 штуки.

Таким образом получаем выражение:

$$4\cdot\left(9^2+2\left(9\cdot8+9\cdot7+9\cdot6+9\cdot5+\ldots+9\cdot1\right)+8^2+2\left(8\cdot7+\ldots+8\cdot1\right)+\right.$$

$$\left.+7^2+2\left(7\cdot6+\ldots+7\cdot1\right)+\ldots+2^2+2\left(2\cdot1\right)+1^2\right)=$$

$$=4\left(9^2+2\left(9\left(8+7+\ldots+1\right)\right)\right)+8^2+2\cdot8\left(7+\ldots+1\right)+7^2+\ldots+2^2+2\cdot2+1^2\Big)=$$

$$=4\cdot\left(9^2+2\cdot9\cdot36+8^2+2\cdot8\cdot\cancel{23}28+7^2+2\cdot7\cdot21+6^2+2\cdot6\cdot15+\right.$$

$$\left.+5^2+2\cdot5\cdot10+4^2+2\cdot4\cdot6+3^2+2\cdot3\cdot3+2^2+2\cdot2+1^2\right)=$$

$$=4\left(9\left(9+2\cdot36\right)+8\left(8+2\cdot28\right)+7\left(7+42\right)+6\left(6+30\right)+\right.$$

$$\left.+5\left(5+20\right)+4\left(4+12\right)+9+18+4+4+1\right)=$$

$$=4\left(9\cdot81+8\cdot64+7^3+6^3+5^3+4^3+3^3+2^3+1\right)=$$

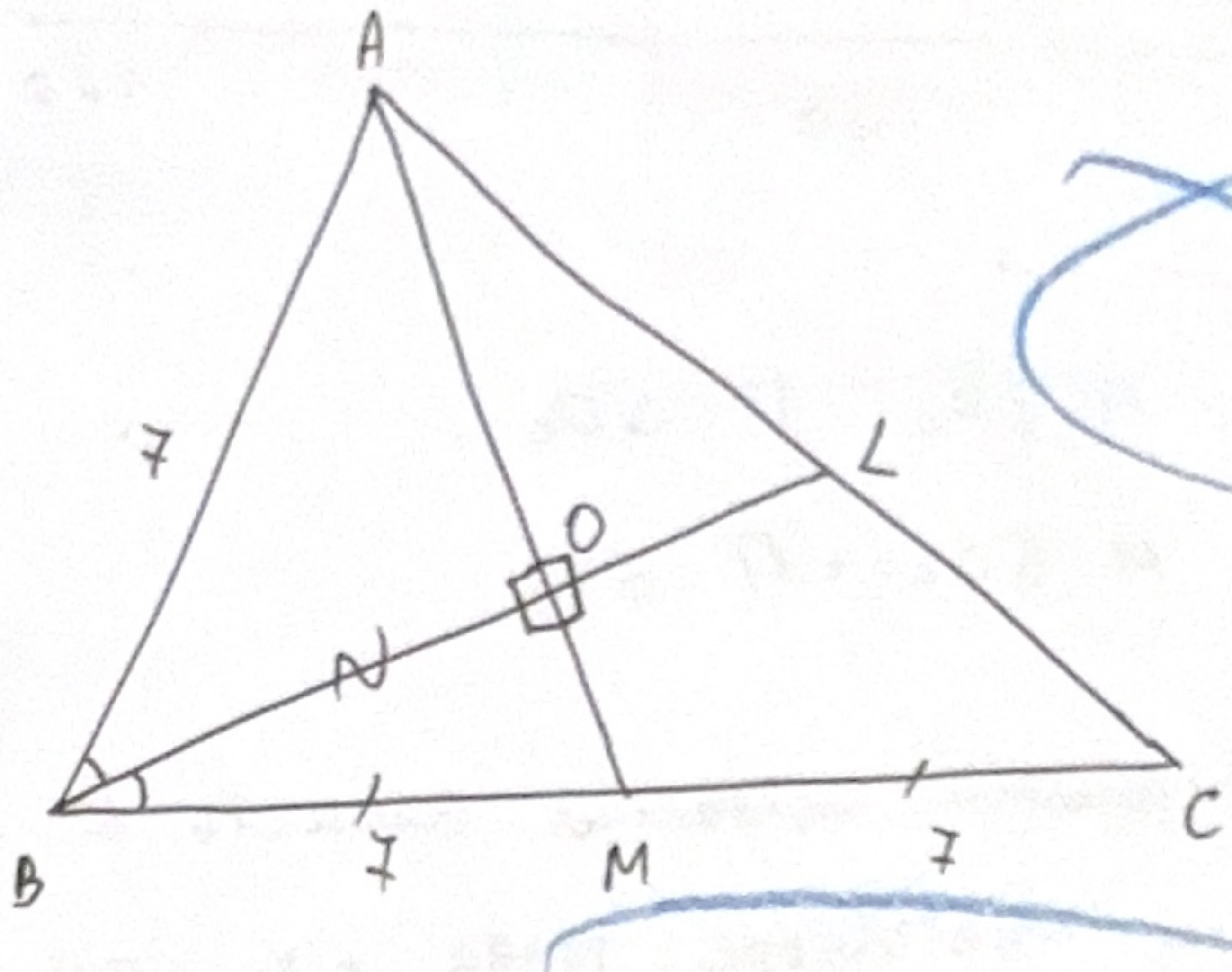
$$=4\left(9^3+8^3+7^3+6^3+5^3+4^3+3^3+2^3+1\right)=4\cdot2025=8100$$

Ответ: 8100

Чистовик

№4.

Дано: $\triangle ABC$ – не р/б
AM – мед
BL – бисс.
$AM \perp BL$
$AB = 7$
$BC, AC \in \mathbb{Z}$



Найти: P_{ABC}

Решение:

1). Пусть $AM \cap BL = O$

2). Рассмотрим $\triangle BOA$ и $\triangle BOM$

$\angle ABO = \angle MBO$ (т.к. BL – бисс.)
$\angle BOA = \angle BOM = 90°$ (т.к. ~~BM~~ $BL \perp AM$)
BO – общ.
$\Rightarrow \triangle BOA = \triangle BOM$ (по 2 пр-ку) $\Rightarrow$

$\Rightarrow AB = BM = 7$ (как соотв.)

$BC = 2BM = 2 \cdot 7$ (т.к. AM – мед.) $= 14$

3). по нер-ву тр-ка:

$AB + BC > AC$ $\quad$ $AB + AC > BC$
$7 + 14 > AC$ $\quad$ $7 + AC > 14$
$21 > AC$ $\quad$ $AC > 7$

$\Rightarrow 21 > AC > 7$

т.к. $\triangle ABC$ – не р/б $AC \neq 14$

$\Rightarrow$ возможные P_{ABC} равны 29, 30, 31, 32, 33, 34, 36, 37, 38, 39, 40, 41

Ответ: 29, 30, 31, 32, 33, 34, 36, 37, 38, 39, 40, 41.

Чистовик №5.

1 светофор: М: 30с П: 50с

2 светофор: М: 50с П: 50с

пусть Агриппина пытается попасть к началу зелёного света на первом светофоре, тогда, т.к. как только она вышла на этом светофоре ~~она~~ загорелся красный, она должна проехать первые 50м за 30с, если она проедет этот участок быстрее она попадет на красный на 1 светофоре

$V = \frac{50м}{30с} = \frac{5}{3}$ м/с

Тогда этот переход и следующие 120м она преодолеет за:

$\frac{30+120}{\frac{5}{3}} = \frac{\overset{30}{\cancel{150}} \cdot 3}{\cancel{5}} = 90с$

т.е. до 2ого светофора она доедет за $30 + 90 = 120с$

проверим будет ли на этом светофоре зелёний, когда она приедет:

$\underset{з}{10с} + \underset{к}{50} + \underset{з}{50} + \underset{к}{50}$ – через 110с после её выхода загорится ~~зелёный~~ красный и когда она приедет он всё ещё будет гореть => ~~нам~~ скорость $\frac{5}{3}$ м/с нам не подходит.

Попытаемся сделать так, чтобы Агриппина успела на зелёный свет 2ого светофора, который загорится через 160с

Тогда путь перед этим она должна проехать как раз за эти 160с, т.е. со скоростью $\frac{50+30+120}{160} = \frac{200}{160} = \frac{5}{4}$ м/с $= 1{,}25$ м/с

Проверим попадёт ли она на зелёний на 1ом светофоре с такой скоростью:

$\frac{50}{\frac{5}{4}} = 40с$ $\frac{50+30}{\frac{5}{4}} = \frac{\overset{16}{\cancel{80}} \cdot 4}{\cancel{5}} = 64с$ т.е. ~~н~~ через 40с она будет на 1ом светофоре и через 64с от выхода чисто вкл,

~~будо~~ закончит переход, т.к. 1ый светофор включит зелёный через 30с после её выхода и выключит через 30+50=80с, она успеет на зелёный и на первом светофоре =)

=) её наибольшая скорость 1,25 м/с

Ответ: 1,25 м/с.

№6.

$$\frac{1}{a}+\frac{2x}{a^2}\cancel{x}-\frac{3x^2}{a^3}\le 0 \Big| \cdot a^3 \qquad a\neq 0$$

$\cancel{a\ge 0}$ $a>0$

$a^2+2ax-3x^2\le 0$

$-3x^2+(2a)x+a^2\le 0$

$D=(2a)^2-4\cdot(-3)\cdot a^2=$

$=4a^2+12a^2=16a^2$

$x_{12}=\dfrac{-2a\pm\sqrt{16a^2}}{-6}=$

$=\dfrac{-2a\pm 4a}{-6}=\left[\begin{array}{l}-\frac{1}{3}a\\ a\end{array}\right.$

$-\quad -\frac{1}{3}a \quad + \quad a \quad -$

при любом a будет не отрезок решений

$a<0$

$a^2+2ax-3x^2\ge 0$

$-3x^2+(2a)x+a^2\ge 0$

$D=(2a)^2-4(-3)a^2=16a^2$

$x_{12}=\dfrac{-2a\pm\sqrt{16a^2}}{-6}=\left[\begin{array}{l}a\\ -\frac{1}{3}a\end{array}\right.$

$-\quad a \quad + \quad -\frac{1}{3}a \quad -$

$-\frac{1}{3}a-a=2026$

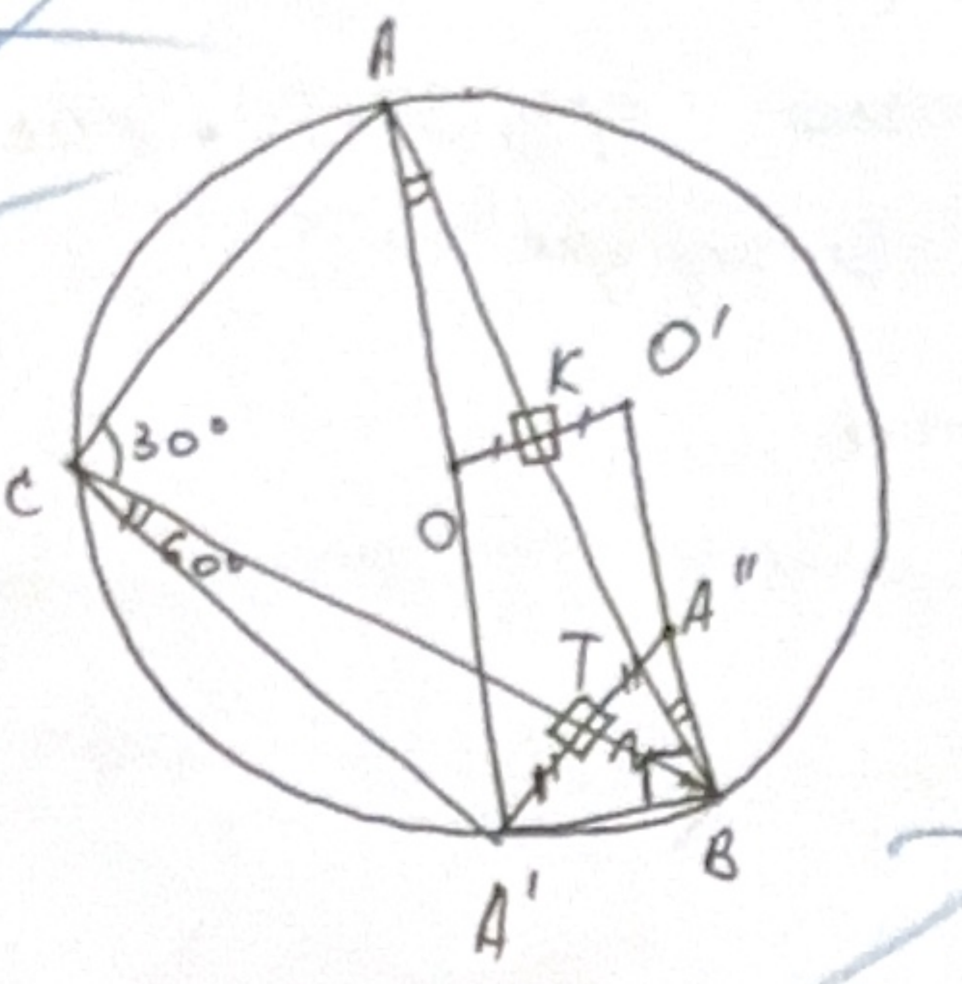
$-\frac{4}{3}a=2026$

$a=\dfrac{-2026\cdot 3}{4}=-1519{,}5$

Ответ: при $a=-1519{,}5$.

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

№7.



Дано: $\triangle ABC$ впис. в окр $(O; R)$

$\angle C = 30°$

O' сим. O относит. AB

A' ~~...~~ диам. противополож. A

A'' сим. A' относит. BC

O', A'', B - лежат на одной прямой

Найти: $\angle B$

Решение:

1). AA' - диам. $\Rightarrow \angle ACA' = 90°$ (т.к. диам. виден под прямым уг.)

$\Rightarrow \angle BCA' = \angle ACA' - \angle C = 90° - 30° = 60°$

2). $\angle A'CB = \angle A'AB = 60°$ (опир. на одну дугу)

3). Пусть $AB \cap OO' = K$

т.к. O леж. на сер. перп. к сторонам $\triangle$ и $OO' \perp AB \Rightarrow AK = KB$

Рассмотрим $\triangle AKO$ и $\triangle BKO'$

$AK = KB$

$OK = KO'$ (т.к. O' сим O относ. AB)

$\angle AKO = \angle BKO' = 90°$ (т.к. $AB \perp OO'$)

$\Rightarrow \triangle AKO = \triangle BKO'$ (по I пр-ку) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle O'BK = \angle OAK = 60°$

4). $\angle A'BA = 90°$ (т.к. леж. на диам. AA')

5). ~~$A'B = BA''$ (т.к. A'' сим. A' относ. CB)~~

$A'T = TA''$ (т.к. A'' сим. A' относит. CB)

$\angle A'TB = \angle A''TB = 90°$

TB - общ. ст.

$\Rightarrow \triangle A'BT = \triangle A''BT$ (по I пр-ку) $\Rightarrow$

Пусть $A'A'' \cap CB = T$

$\Rightarrow \angle A'BT = \angle A''BT$

6). $\angle A'BA'' = \angle A'BA + \angle ABA'' = 90° + 60° = 150°$ (из. п. 3, 4)

$\angle A'BT = \angle A''BT = \angle A'BA''/2 = 75°$

$\angle B = \angle ABA' - \angle A'BT = 90° - 75° = 15°$

Ответ: 15°.

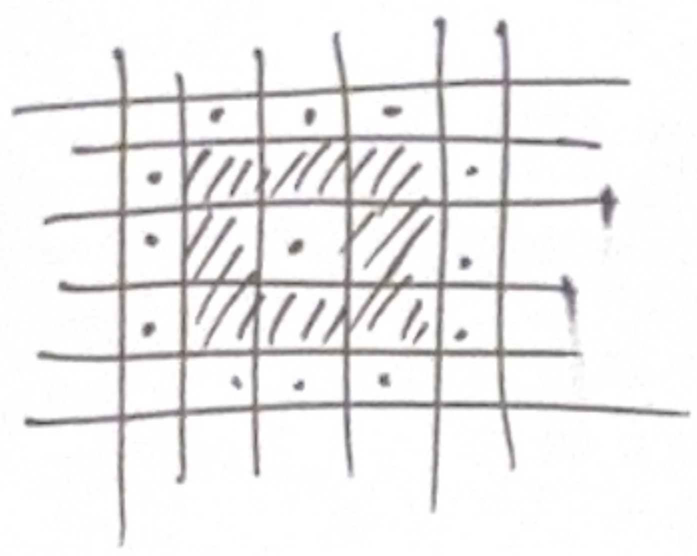
№2. Чистовик

Ответ: 1000

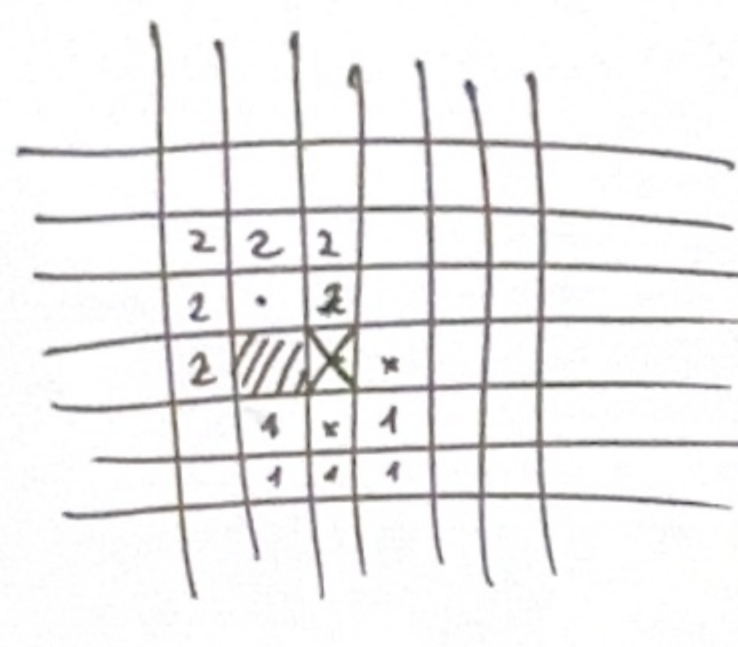
наименьшее 4х значное число равно 1000, $1000^2 = \underline{1000}000$, мы видим что первые 4 цифры квадрата этого числа образуют 1000.

№8

если имеется в виду что у нас уже есть „кольцо" и роботу нужно сделать только последний ход, то вероятность будет равна $\frac{1}{13}$, т.к. вариантов куда он может пойти 13 (отмечены точками), но подходит только 1.



если же имеется в виду, что нужно сначала „создать" это кольцо, то:



пусть он пошёл в любую клетку, далее у него есть 4 варианта хода (·) и каждый из них нам подходит, пусть пошёл в клетку X далее нам подходят 3 варианта из ~~8~~6 возможных (×). Если он пойдёт вправо(1) нам подойдут 2 из 8 возможных и дальше ~~мы буде~~ нам будет подходить только 1 клетка, ~~т.е. вероятност этого случая равна:~~ $\cancel{1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{15}} \cdot$

Если он пойдёт вверх или вниз(2), то дальше нам так же будет подходить только 1 клетка

т.е. вероятность ~~нам~~ образовать „кольцо", а потом сделать квадрат равна: $\cancel{1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{6}} \cdot$