0 732514 260006

73-25-14-26
(127.1)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 1

Место проведения Калининград
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Сидоренко Марии Андреевны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«29» марта 2026 года

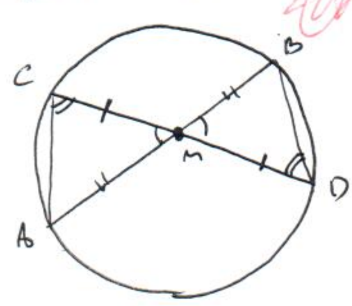
Подпись участника

90 (девяносто)

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

73-25-14-26 (127.1)

чистовик №1



Дано:
AB, CD, FE – хорды
M – середина AB и CD
AB ∩ CD ∩ FE в т. M

Найти:
FE = ?

Решение

AM = MB; CM = MD (т.к. M – середина AB, CD)

∠CMA = ∠BMD (вертикальные)

=> △ACM = △BMD

=> CA = BD => ∠ACM = ∠MDB = ∠CAM
(△ACM = △BMD) (ACBD на 1 окружн.)

=> △ACM р/б,

Аналогично △BMD – р/б

=> MC = AM = MB = MD

M равноудалено от точек A, B, C, D

=> M – центр описанной окружности ABCD

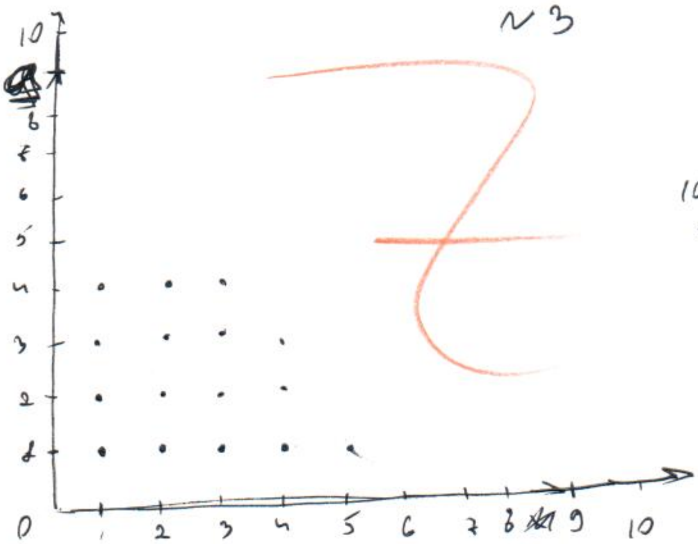
(ACBD – прямоуг., т.к. AM = CM = BM = DM => ∠ACB = 90°
AM = MB => M – центр)

Хорда FE тоже проходит через M,
т.е. проходит через центр => FE – диаметр

= FE = 2R = 10

Ответ: 10

№3



Координаты – натур. числа ≤ 10
т.е. (x, y), где
10 ≥ x ≥ 1   10 ≥ y ≥ 1
Тогда таких точек будет 10×10 = 100
Заметим, что если выберем отрезок как гипотенузу, то есть 2 способа восстановить прямоуг. △

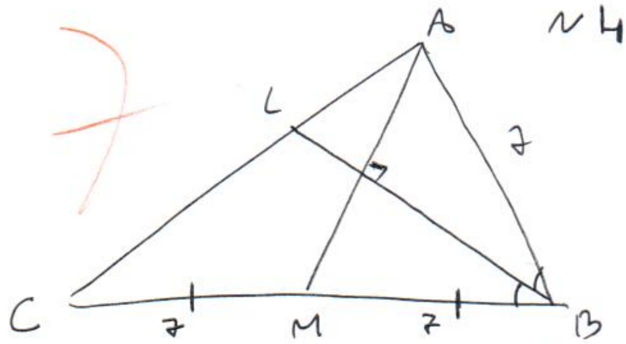
Надо провести прямые, параллельные осям, проходящие через точки выбранного отрезка. Получится 2 точки пересечения. Тогда найдем кол-во способов выбрать гипотенузу.

чистовик

Надо выбрать отрезок, который не будет параллелен осям. Всё.
Первую точку отрезка выбрали любую – 100 способ.
Вторая точка не должна ~~находиться~~ ~~иметь не такую~~ иметь такое же значение по x и y, т.е. не находится в одном столбце, не находится в одной строке. Помимо нашей точки в строке и столбце есть 9 точек =>
Для 2 точки отрезка есть $100-1-9-9$ вершин т.е. 81 точка
Т.к. порядок выбора точек не важен => Выбрать гипотенузу можно $\frac{100 \cdot 81}{2}$ способами.
На каждую гипотенузу 2 треугольника
=> Всего $\frac{100 \cdot 81}{2} \cdot 2 = 8100$ треугольников
(Понятно что мы всегда можем восстановить 2 Δ т.к. пересечение прямых, параллельных осям, не может выйти за границы квадрата 10×10. ~~Потому что 2 прямые 2 параллельные осям~~)

Ответ: 8100

№4



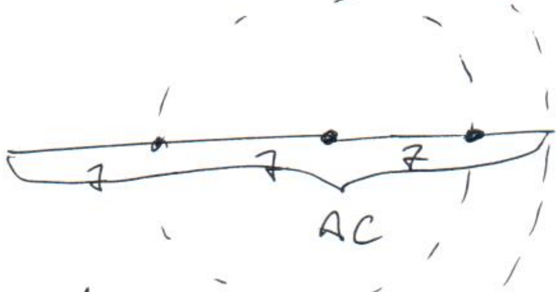
Дано:
ΔABC
$AB = 7$
AM – медиана
BL – бис-са
$BL \perp AM$

Решение
Посмотрим на ΔABM, в нем бис-са перпендикулярна стороне AM => ΔABM – р/б, т.е. $AB = MB$ M – середина BC => $AB = MB = MC = 7$
Давайте поймем, как строится такой Δ
Возьмем BC, $BC = 14$

73-25-14-26
(127.1)

чистовик

~~В точке~~ Проведём окружность с центром в точке B и радиусом 7.
Проведём окружность с центром в т. C и радиусом AC. ~~Находим пересечения~~
Точка пересечения 2 окружностей — точка A.
Тогда понятно, что если провести бис-су BL, то она будет перпендикулярна AM т.к. MB = AB = 7.
=> Такой треугольник полностью удовлетворяет условию.
~~Будет~~ Значит он будет, если есть точка пересечения двух окружностей, т.к. остальные построения ни от чего не зависят.
Чтобы была точка пересечения 2 окружностей надо чтобы радиус окружности с центром C был > 7 (иначе окружности будут касаться и A не будет или не будет точки пересечения)
Также точки пересечения не будет если AC будет ≥ 21



Одна окружность будет внутри другой

=> Чтобы была точка пересечения и окружности не касались надо чтобы ~~AC была~~ $20 \geq AC \geq 8$
Но $AC \neq 14$, т.к. иначе ABC - р/б.
Тогда найдём все возможные значения периметра
$BC + AB = 21$, $20 \geq AC \geq 8$, $AC \neq 14$
Ответ: => $P_{ABC} = \{29; 30; 31; 32; 33; 34; 36; 37; 38; 39; 40; 41\}$
(все целые числа от 29 до 41 включительно, за исключением 35)

№6

$$\frac{1}{a} + \frac{2x}{a^2} + \frac{3x^2}{a^3} \leq 0$$

ОДЗ:
$a^3 \neq 0$
$a \neq 0$

1. $\dfrac{a^2+2xa-3x^2}{a^3} \le 0$ Чистовик

(1) $\begin{cases} a^2+2xa-3x^2 \le 0 \\ a^3 > 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 3x^2-2xa-a^2 \ge 0 \\ a > 0 \end{cases}$

если $a^3 > 0 \Rightarrow a > 0$

Решим $3x^2-2xa-a^2 \ge 0$

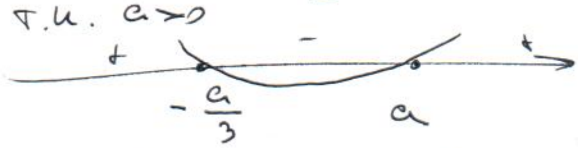
$D = 4a^2+12a^2 = 16a^2$

$\sqrt{D} = 4a$

$x_1 = \dfrac{-4a+2a}{6} = -\dfrac{2a}{6} = -\dfrac{a}{3}$

$x_2 = \dfrac{4a+2a}{6} = a$

т.к. $a>0$



$x \in (-\infty; -\frac{a}{3}] \cup [a; +\infty)$

т.е. при $a>0$ ~~$3x^2-2xa-a^2$~~ $a^2+2xa-3x^2 \le 0$ имеет бесконечное число решений $\Rightarrow$ такой вариант не подходит. $\Rightarrow$ $a<0$

(2) $\begin{cases} a^2+2xa-3x^2 \ge 0 \\ a^3 < 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 3x^2-2xa-a^2 \le 0 \\ a < 0 \end{cases}$

$3x^2-2xa-a^2 \le 0$

$x_1 = -\frac{a}{3}$ $x_2 = a$

$x \in [a, -\frac{a}{3}]$

~~Найд~~ Найдём параметр a исходя из того, что отрезок длины 2026

$-\frac{a}{3} - a = 2026$ Чистовик $2026 \cdot 3 = 6078$

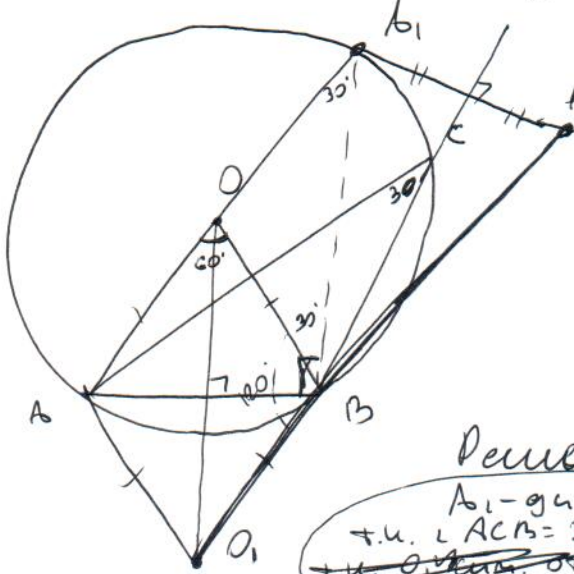
$-\frac{4a}{3} = 2026$

$-4a = 6078$

$a = -\frac{6078}{4} = -\frac{3039}{2} = -1519,5$

Ответ: $a = -1519,5$

№7



Дано:
$ABC - \triangle$
O - центр
$\angle C - 30°$
O_1 - сим. O отн. AB
A' сим A отн O
A'' сим. A' отн. BC

Найти: $\angle B$

Решение

A_1 - диам. против. т. A
т.к. $\angle ACB = 30° \Rightarrow \angle AOB = 60°$
~~т.к. O_1~~ т.к. O_1 симметрично O относ. AB
и $AO = OB \Rightarrow AO = OB = BO_1 = AO_1$
$\Rightarrow AOBO_1$ - ромб $\Rightarrow \angle OBO_1 = 180 - 60 = 120$ (т.к. $AO \parallel O_1B$)

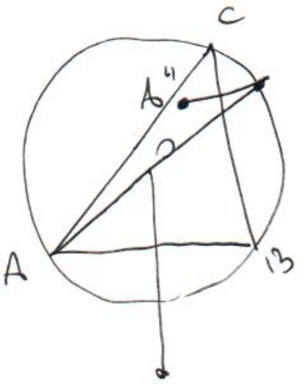
~~A_1 - диам. против т. A~~
~~т.к. $\angle ACB = 30 \Rightarrow \angle AOB = 60$~~
~~т.к. O_1 симметрично O отн. AB и $AO = OB$~~
~~$\Rightarrow AO = OB = BO_1 = O_1A \Rightarrow AOBO_1$ - ромб~~
$\Rightarrow \angle$

т.к. A_1 - ~~сим~~ диаметр. противоположн. A
$\Rightarrow AA_1$ - диаметр $\Rightarrow ABA_1 = 90°$
т.к. A_1 и A_{11} симметричны относительно BC
$\Rightarrow BC$ - сер.-пер. к ~~AAB~~ A_1A''
$\Rightarrow A_1B = A''B \Rightarrow \triangle A_1A''B$ - р/б
$\Rightarrow BC$ - бис-се $A_1A'' \Rightarrow \angle A_1BC = \angle CBA''$
т.к. $\angle OBO_1 = 120°$, а $\angle OBA_1 = 30°$ ($\angle ACB = \angle AA_1B = \angle OBA_1$, т.к. $OA_1 = OB$ (радиусы))
$\Rightarrow \angle A_1BC + \angle CBA'' = 180 - 120 - 30 = 30°$
$\Rightarrow 2\angle A_1BC = 30° \Rightarrow \angle A_1BC = 15°$
$\angle ABA_1 = 90°$; $\angle A_1BC = 15°$
$\Rightarrow \angle ABC = 90 + 15 = 105°$

~~Ответ: $\angle B = 105$~~

Если O внутри ABC:

черновик



~~Тогда O_1 вне $\triangle ABC$ т. A''~~

Точки O_1 и A'' в одной полуплоскости относит. BC

① т.к. ∠B - острый и OO_1 пересчется с BC за точкой C

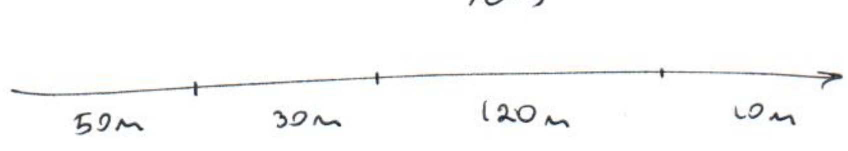
② т.к. ~~...~~ A_1 отражали 2 раза она сначала оказалась по другую плоскость, а затем ~~снова~~ вернулась, т.е. она была изначально в 1 полуплоскости относ. BC с т. O и O_1,

=> △ ABC - тупоуг.,

т.к. прямоуг. быть не может, т.к. тогда C совпадет с A''.

Ответ: ∠B = 105

№5



~~Ответ~~ ~~...~~

~~...~~ В момент выхода из дома на 1 светофоре ~~горел~~ ~~красный~~ начал гореть красный пешеходам, т.е. зеленый машинам.

=> Он будет гореть 30с.

Потом будет зеленый для пешеходов

~~Скорость~~ ~~...~~ => До 1 светофора она ехала ≥ 30с. Её скорость постоянна

=> 50м она проезжает за ≥ 30с.

~~От~~ ~~2 светоф~~ От начала 1 светофора до ~~...~~ начала 2 ~~св~~ светофора 150м.

Которые она проедет соответсвенно за ≥ 30·3 те за ≥ 90с.

т.е. до 2 светофора она доедет не раньше чем через 90 + 30 = 120с.

Посмотрим какой цвет горел спустя 120 с. от начала движения

ЧИСТОВИК

2 светофор:

10 сек – зел

50 сек – крас

50 сек – зел

50 сек – крас

50 сек – зел

120 секунда это красный свет.
⇒ Чтобы она доехала до школы как можно быстрее не останавливаясь ей нужно заехать на пешеход ~~сразу~~ сразу как только загорится зел. свет после 120с. от начала движ. т.е спустя 160с. от начала времени

⇒ Её скорость равна $v = \frac{S}{t} = \frac{200}{160} =$

$= \frac{20}{16} = \frac{5}{4} = 1{,}25$ м/с

Проверим ~~прого~~ получится ей проехать на зел. свет на 1 пешеходе

Время до пешехода $= t = \frac{S}{v} = \frac{50}{1{,}25} =$

$= \cancel{50} \cdot \frac{4}{5} = 40$ сек

На 1 светофоре зеленый загорится через 30 сек и будет гореть 50 сек.

⇒ Агриппина проедет на зел. свет.

⇒ Она доедет до школы без остановок

Ответ: 1,25 м/с

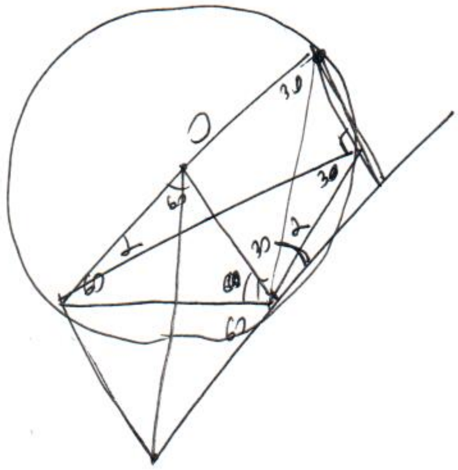
№2

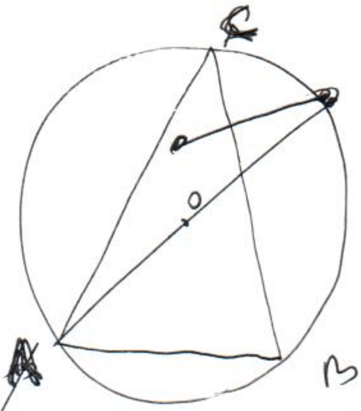
Наим. $n = 1000$

$n^2 = \underbrace{1000}000$

подходит

черновик

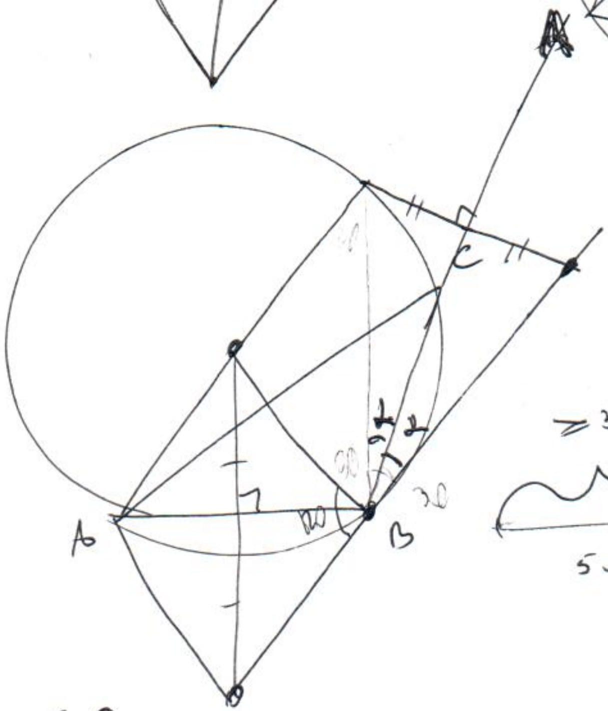




$-\frac{5}{4}$ $\quad 4 \overline{)1,25}$

$-\frac{10}{3}$

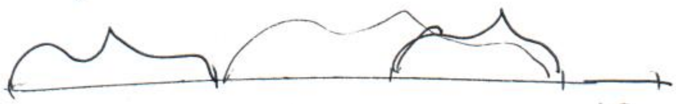
20



≥ 120см

υ ≥ 90см

≥ 30см



M − 30
n − 50

M − 50
n − 50

30

$k < \frac{50}{\upsilon} < 30$

черновик

$$\frac{a^2+2xa-3x^2}{a^3} \le 0$$

2. $a^2+2xa-3x^2 \le 0$

$a^3>0$ $a>0$

$3x^2-2xa-a^2 \ge 0$

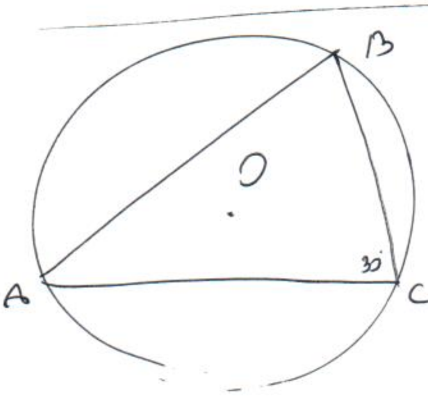
$\cancel{D=4a^2}$ $\sqrt{D}=4a$ $a<0$

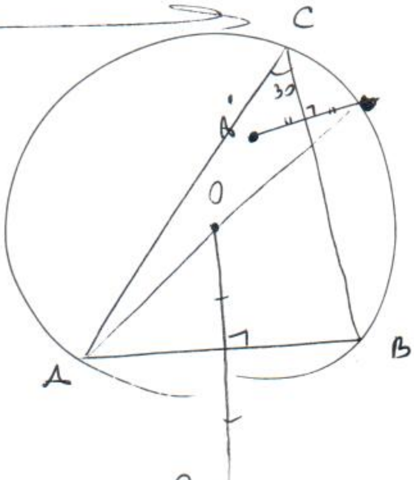
$\cancel{x_1=2a}$

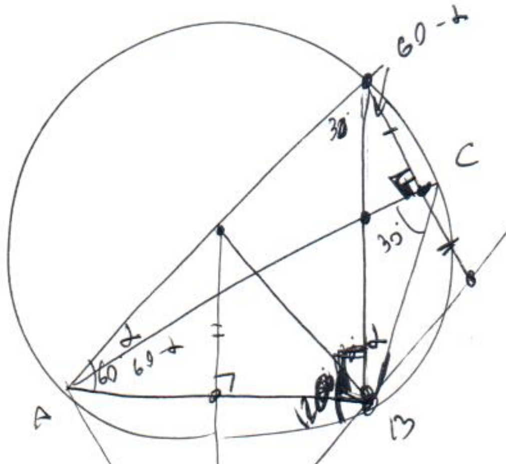
$\Rightarrow a<0$

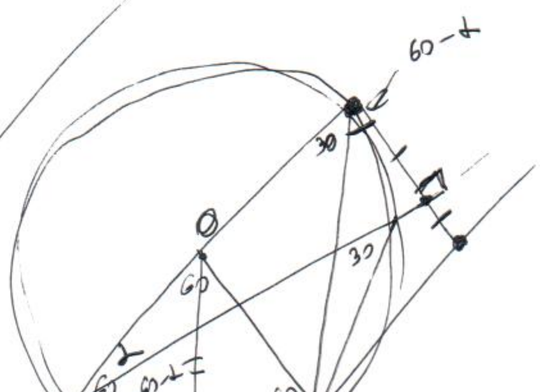
$a>0$

$a>0$

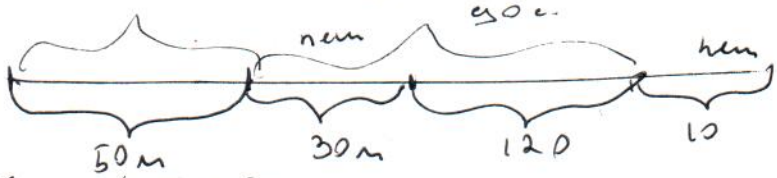








ЧЕРНОВИК



v

120 см

10 см

50 см — кр.

50 см — зел.

$t_1 = \frac{3}{5} \cdot 50 \cdot \frac{3}{5} = 30с.$ нет – 30

$t_2 = 150 \cdot \frac{3}{5}$ 90с нет – 50

Нет – 50

нет – 50

выйдя через 30 сек можно ехать

спустя 30 сек проехать от 30 до 80

~~$t = \frac{50}{v}$~~ ~~$t > \frac{50}{30} = \frac{5}{3}$~~ ~~$t_2$~~

$\frac{5}{3}$ м/с

$3v < 5 < 3v$

$8v2$ ~~t_1~~ $= \frac{50}{v} < 30$

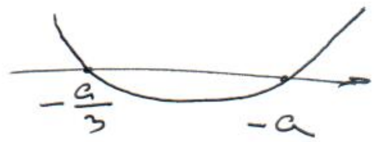
$\boxed{\frac{5}{3}} < v < \frac{5}{3}$

$80v < 50 < 30v$

$n \quad n+1 \; ...$

$n+2025$ – решения

$\frac{1}{a} + \frac{2x}{a^2} - \frac{3x^2}{a^3} \le 0$



$\frac{a^2 + 2xa - 3x^2}{a^3} \le 0$

a

1. $a^2 + 2xa - 3x^2 \ge 0$

$a^3 < 0 \quad a < 0$

$3x^2 - 2xa - a^2 \le 0$

$-a - \frac{a}{3}$

$\frac{-3a - a}{3}$

~~$D \le 0$~~

$D = 4a^2 + 12a^2 = 16a^2 \quad \sqrt{D} = 4a$

$x_1 =$ ~~$-4a - 2a$~~ $\frac{-4a - 2a}{6} = \frac{-6a}{6} = \boxed{-a}$

$-a - \frac{a}{3} = 2026 \quad \frac{-4a + 2a}{6} = \frac{-2a}{6} = \boxed{-\frac{a}{3}}$

$-3a - a = 6078$

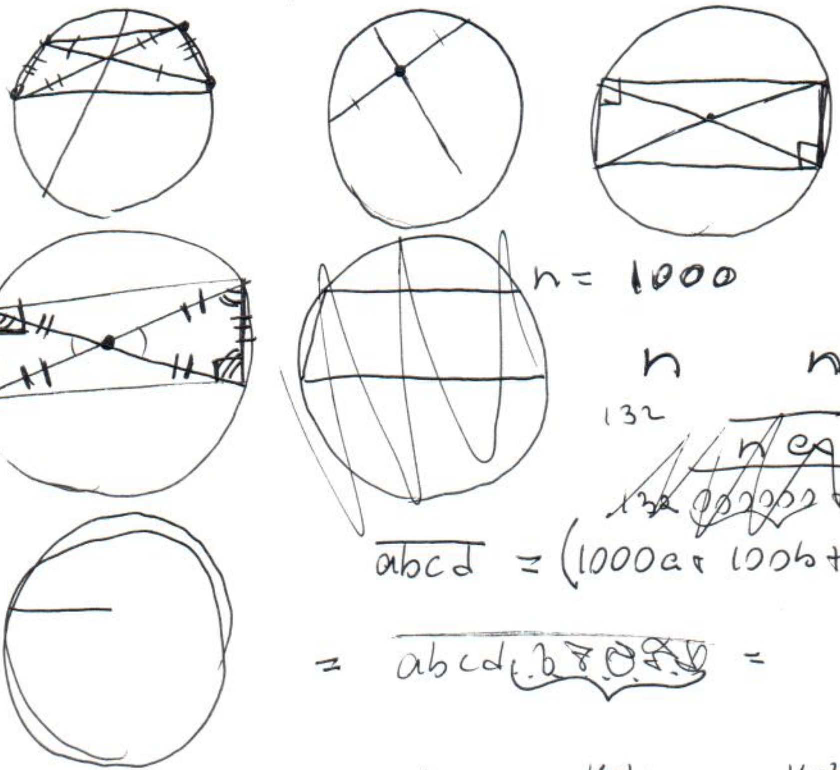
$2026 \cdot 3$

$-4a = 6078$

$6078 \,|\, 4$

$6078 \,|\, 4 = 1519,5$

черновик



$n = 1000$

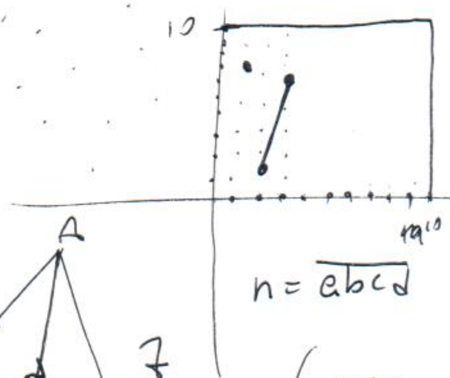
$n \quad n^2 = n\cdot 10^k + a$

$\overline{abcd} = (1000a + 100b + 10c + d)^2 =$

$= \overline{abcd} \ldots =$

$= 10^k a + 10^{k-1} b + 10^{k-2} c + 10^{k-3} d$

$\boxed{\frac{99\cdot 98}{2} - 81}$

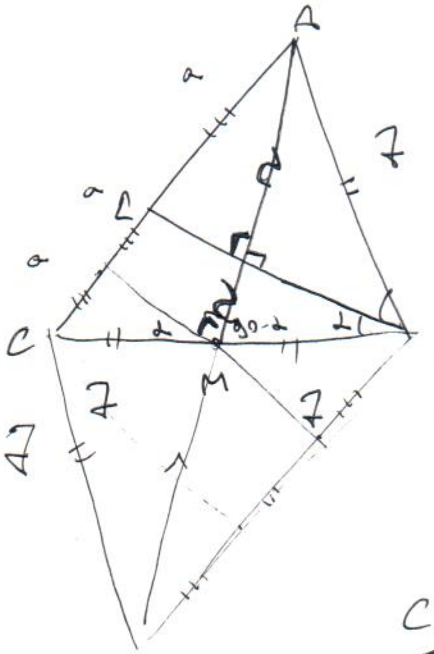


$n^2 = n\cdot 10^k + a$

$n = \overline{abcd}$

$(1000a + 100b + 10c + d)^2 =$

$= 1000a + 100b + 10c + d \cdot 10^k + a$



a b до 20