



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА**

Вариант 11 класс 6 вар.

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов“
наименование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Димарева Владимира Сергеевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«29» 03 2026 года

Подпись участника

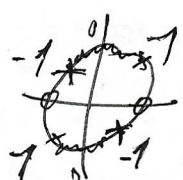
52-03-08-52
(124.2)

90 (Девяносто) минут

~~Алгебра~~ черновик

$$\sqrt{1 - \text{ctg}^2 x} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 4 \quad -1 \leq \text{ctg} x \leq 1$$

$\frac{\cos}{\sin}$



$$6 - 6 \text{ctg}^2 x = 16 \cos^2 x$$

$$6 = 16 \cos^2 x - \frac{6 \cos^2 x}{\sin^2 x} \quad \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

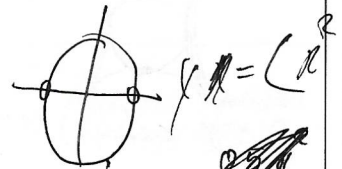
$$6 = \frac{16 \cos^2 x \cdot \sin^2 x - 6 \cos^2 x}{\sin^2 x}$$



$$6 = \frac{16 \cos^2 x - 16 \cos^4 x}{1 - \cos^2 x} - 6 \frac{\cos^2 x}{1 - \cos^2 x}$$

$\cos x \neq \pm 1$

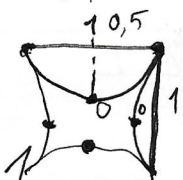
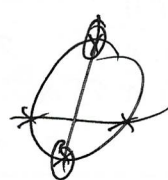
$$16 \cos^2 x (1 - \cos^2 x) = 0$$



- 3
- 2
- 1
- 0
- 1
- 2
- 3

$$\cos^2 x = 0$$

$$\sin^2 x = 1$$



$$16t - 16t^2 - 6 = 0$$

$$-8t^2 + 8t - 3 = 0$$

$$8t^2 - 8t + 3 = 0$$

$$\frac{100a + 10b + c}{a + b + c} = 9$$

$$99 \cdot 9 = 64 -$$

$$108 \quad 114$$

$$810 \pm 81 \quad 891$$

$$9 \cdot 12 = 108$$

$$108 : 9 = 12$$

$$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 18 \cdot 12$$

$$18 \cdot 9 = 90 + 42 = 162 : 9 = 18$$

$$49 \cdot 84 \cdot 18$$

$$18 \cdot 18 = 324 = 36$$

$$\begin{array}{r} 49 \\ \times 18 \\ \hline 392 \\ 49 \\ \hline 882 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 882 \\ 84 \\ \hline 3528 \\ 4056 \\ \hline 44088 \end{array}$$

$$\boxed{490887}$$

$$37044$$

$$100 - 189$$

$$162 \quad 101 \quad 102$$

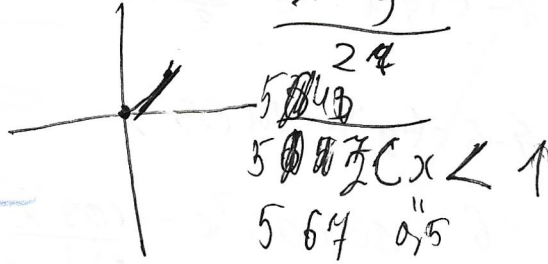
$$99 \cdot 3 = 29$$

$$98 \cdot 3 = 294$$

Черновик

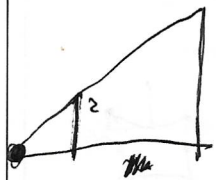
abc
 $100a + 10b + d = 0$
 $\text{mod } 9(a+b+c)$

$36 : 4 : 9 \times 63$
 $\frac{63}{9} = 7$
 24



$108 = 12 \cdot 9$
 $9 \cdot 9 \cdot k$

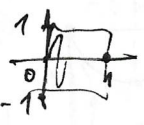
$6 \cdot 162 = 18 \cdot 9 - 1$



- 243
- 24 · 9
- 324
- 36 · 9
- 45 · 9
- 54 · 9



$0 \leq x \leq 1$

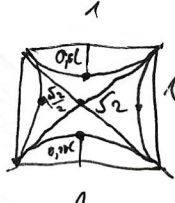


$y = \sin 11\pi x$
 $y = \sin 13\pi x$
 $y = \sin 15\pi x$



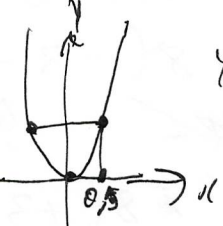
$9 \cdot (81 + 99) = 9 \cdot 180$

$\frac{900 + 720}{1620}$



- 45 · 9
- 405
- 45
- 36
- 414
- 23
- 32
- 41
- 50

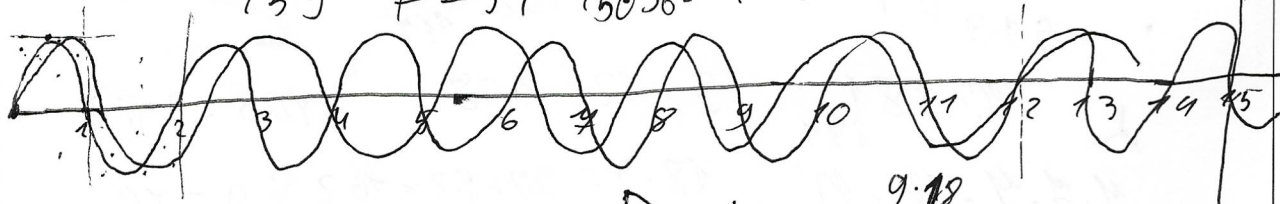
15



$y = (x^2)$

$486 \cdot 18$

$45 \cdot 9 = 57 \cdot 45036 = 486$



$\frac{6}{13} \frac{4}{15}$

$90 < 91$

$105 \cdot 104$

$9 \cdot 18$
 $18 \cdot 9$
 18

52-03-08-52
(124.2)

Чистовик

№2

\overline{abc} - какое-то трехзначное число
 Если \overline{abc} есть в множестве A , то $100a+10b+c \equiv 0 \pmod{9(a+b+c)}$
 значит все число $(900a+10b+c)$ делится на 9 и на $a+b+c$,
 а по признаку делимости на 9, $a+b+c \div 9$, значит
 все число точно делится делителем
 на $9 \cdot 9 = 81$, проверим все числа вида $100 \leq 81 \cdot k \leq 1000$
 где k - натуральное число

число

Проверка

1	162 162	$162 \div (1+6+2) = 18$	$18 \div 9$ - подходит
2	243	$243 \div 9 = 27$	$27 \div 9$ - подходит
3	324	$\frac{324}{9} = 36$	$36 \div 9$ - подходит
4	405	$\frac{405}{9} = 45$	$45 \div 9$ - подходит
5	486	$\frac{486}{4+8+6} = 27$	$27 \div 9$ - подходит (меньше суммы цифр - 18)
6	567	$\frac{567}{18} = 31,5$	$31,5 \div 9$ - не подходит
7	648	$\frac{648}{18} = 36$	$36 \div 9$ - подходит
8	729	$\frac{729}{18} = 40,5$	$40,5 \div 9$ - не подходит
9	810	$\frac{810}{1+8} = 90$	$90 \div 9$ подходит
10	891	$\frac{891}{18} = 49,5$	$49,5 \div 9$ не подходит
11	972	$\frac{972}{18} = 54$	$54 \div 9$ подходит

это все возможные числа в порядке возрастания
 сложим 1, 6 и последнее
 $162 + 648 + 972 = 1782$

Ответ: 1782

Черновик

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

- 81 - ?
- 162 - 74
- 243 - 74
- 324 - 74
- 405 - 74
- 486 - 78
- 567 - 18
- 648 - 18
- 729 - 18
- 810 - 9
- 891 - 18
- 972 = 18 +

$$100a + 70b + c = 0$$

$$9(a+b+c)$$

$$99a + 9b + a + b + c : 9 : abc$$

$$a+b+c$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}$$



$$99a + 9b = a + b + c$$

$$90a = 9c$$

$$10a = c$$

$$a + b + c$$

$$\frac{1}{3}$$

$$a = c \pmod{2}$$

$$\sqrt{2} = 4$$

$$6 - 2$$

$$(12 + 8 + 2) \cdot 9$$

$$\begin{array}{r} 89 \\ 22 \\ \hline 162 \\ 162 \\ \hline 1482 \end{array}$$



$$10a = c$$

$$a = 1 \quad c = 1$$

$$2 = 2 \quad c = 2$$

$$\dots$$

$$10a = c$$

$$18$$

$$1 = ?$$

$$2 \quad c = 2$$

$$3 \quad c = ?$$

$$100 \cdot 7 + 2 \cdot 10 + 9$$

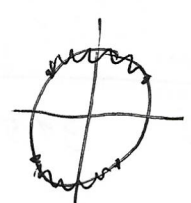
$$4 - 4$$

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$99 \cdot 7 + 2 \cdot 9 + 18$$

$$6 - 6$$

~~$$6 - |\operatorname{ctg} x| \leq 1$$~~



$$6 - 2 \quad 4$$

$$6 - 6 \operatorname{ctg}^2 x = 16 \cos^2 x$$

~~$$6 \operatorname{ctg}^2 x + 16 \cos^2 x - 6 = 0 \cdot \sin^2 x$$~~

$$6 \cos^2 x + 16 \cos^2 x \cdot \sin^2 x - 6 \sin^2 x = 0$$

~~$$6a + 16ab - 6b = 0$$~~
~~$$(4a - 1.5)(4b + 1.5) = 0$$~~

$$-6(1 - \cos^2 x)$$

$$-6 + \cos^2 x$$

~~$$16 \cos^2 x (1 - \cos^2 x)$$~~

$$16 \cos^2 x - 16 \cos^4 x - 6 + 6 \cos^2 x$$

$$-8t^2 + 14t - 3 = 0$$

$$28t - 16t^2 - 6 = 0$$

$$D = 196 - 96 = 100$$

$$t = \frac{-14 \pm 10}{-16} = \frac{24}{-16} = -\frac{3}{2}$$

$$\frac{4}{16}$$

~~$$4t(7t - 1.5) = 0$$~~
~~$$\cos x = 0$$~~

$$\cos^2 x = \frac{1}{9}$$

$$\cos x = \pm \frac{1}{3}$$

числовик
№1

$$\sqrt{6(1-\cos^2 x)} = 4 \cos x$$

возведем в квадрат

$$6 - 6\cos^2 x = 16\cos^2 x$$

$$\frac{6\cos^2 x}{\sin^2 x} + 16\cos^2 x - 6 = 0$$

$$\frac{6\cos^2 x}{1-\cos^2 x} + 16\cos^2 x - 6 = 0$$

$$\frac{6\cos^2 x + 16\cos^2 x - 16\cos^4 x - 6 + 6\cos^2 x}{1-\cos^2 x} = 0$$

$$\frac{-16\cos^4 x + 28\cos^2 x - 6}{1-\cos^2 x} = 0$$

Пусть $t = \cos^2 x$

$t \in [0; 1]$ из-за ограничения значений ~~cos x~~

$$\frac{-16t^2 + 28t - 6}{1-t} = 0 \quad | : 2$$

Рассмотрим числ.

$$-8t^2 + 14t - 3 = 0$$

$$D = 196 - 96 = 100$$

$$x_{1,2} = \frac{-14 \pm 10}{-16} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

$$x_1 = \frac{-14 - 10}{-16} = \frac{24}{16} \notin$$

Проверим $\cos x = \frac{1}{2}$

Проведем обратную замену

$$\cos^2 x = \frac{1}{4}$$

$\cos x = \pm \frac{1}{2}$, но из-за ОДЗ $\cos x > 0$, $\cos x \neq \frac{1}{2}$

$$\sqrt{6 \left(\frac{\cos^2 x}{1-\cos^2 x} \right)} = 4 \cos x$$

$$\sqrt{6 \left(\frac{1/4}{3/4} \right)} = 2$$

$$\sqrt{6 - \frac{6 \cdot \frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}} = 2$$

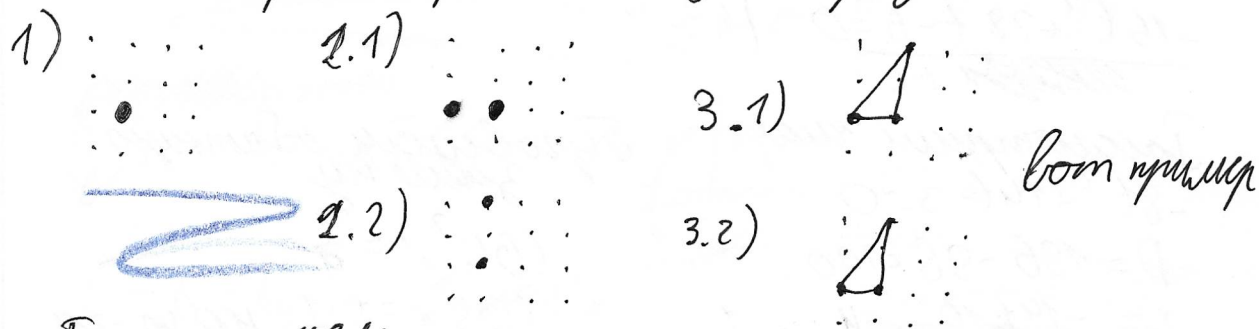
$$\sqrt{4} = 2$$

$2 = 2$, значит $\cos x = \frac{1}{2}$

$$x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} + 2\pi k \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} + 2\pi k \quad k \in \mathbb{Z}$

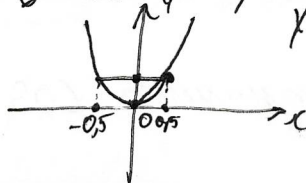
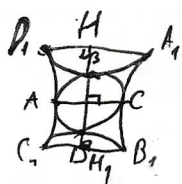
Чистовик
 выберем случайную точку из \mathbb{Z}^3
 F , пусть это точка пересечения
 каретов, тогда у нас есть $6+6+6$ вариантов
 выбрать вторую точку так чтобы карет
 который они образуют был параллелен
 одной из осей (по 6 точек на 3 оси), есть $6+6=12$
 вариантов выбрать третью точку так,
 чтобы карет образованной 3 точками
 был параллелен одной из осей (по 6 точек на 2
 оси, так как одна ось занята 2 точкой и из-за
 того, что три точки ни одной прямой не образуют
 треугольник). Но надо поделить на 2
 так как мы выбираем пересечение, а
 потом 2 и 3 точки, но нам не важно какую
 мы выберем первой - это один треугольник



Посчитаем

$$\frac{(4 \cdot 4 \cdot 4) \cdot 18 \cdot 12}{2} = 49 \cdot 18 \cdot 42 = 37044$$

Ответ: 37044



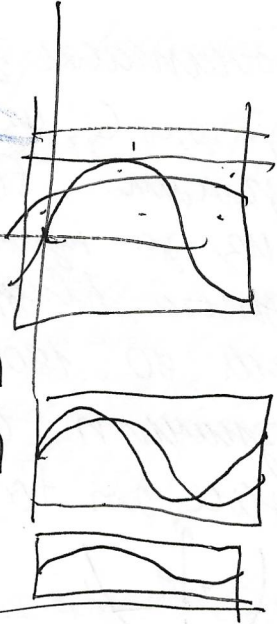
Исааковичи верный график
 $y = x^2$ так как $y = x^2$ с симметрией
 чем относительно OY , значит
 вершины равноудалены от точки
 касания (в данном случае одного
 графика, $D_1B = BA_1, A_1C = (B_1, \text{и т.д.})$)

Черновик

$$\begin{array}{r}
 49 - 18 \cdot 6 \cdot 7 \\
 \begin{array}{r}
 49 \\
 \times 108 \\
 \hline
 392 \\
 49 \\
 \hline
 5292
 \end{array} \\
 \begin{array}{r}
 49 \\
 \times 18 \\
 \hline
 392 \\
 49 \\
 \hline
 882 \\
 \times 12 \\
 \hline
 1764 \\
 882 \\
 \hline
 10584 \\
 5292 \\
 \hline
 5292
 \end{array}
 \end{array}$$

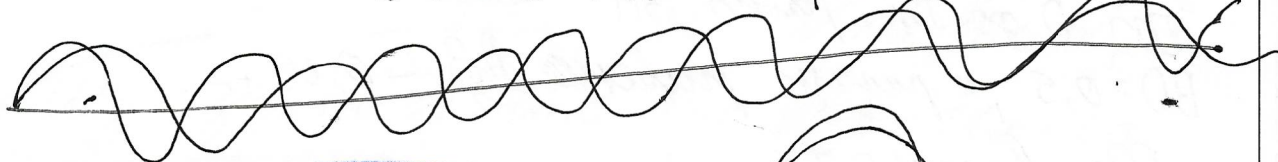
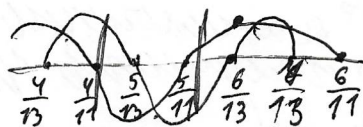
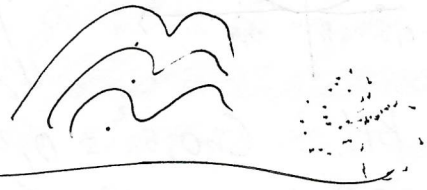
$$\begin{array}{r}
 292 \\
 4 \\
 \hline
 12044 \\
 14 \\
 \hline
 63 \\
 14 \\
 \hline
 2044
 \end{array}$$

$\sim \times 5 + \cap$
 $\sim \times 6 + \cap$
 $\sim \times 7 + \cap$



$$\begin{array}{r}
 35000 \\
 2044 \\
 37044
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 0,25 \\
 \uparrow \\
 2 - 0,25
 \end{array}$$

$2(x=1)$
 $(=1)$

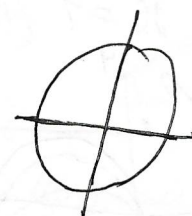


$\sin 11\pi x = \sin 13\pi x$

$x \in [0; 1]$



65 66

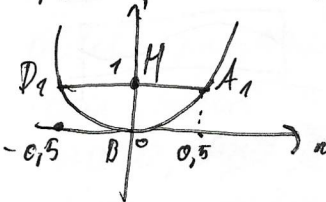


1/11	2/11	3/11	4/11	5/11	6/11	7/11	8/11	9/11	10/11	11/11
------	------	------	------	------	------	------	------	------	-------	-------

1/13	2/13	3/13	4/13	5/13	6/13	7/13	8/13	9/13	10/13	11/13	12/13	13/13
------	------	------	------	------	------	------	------	------	-------	-------	-------	-------

чистовик

Почитаем значение на графике при $x=0,5$
 $y=0,25C$, из-за того что это "квадрат" с нулевыми углами $f(x) = (Cx^2)'$ при $x=0,5$ равна 1, т.к.
 из-за нулевого угла и в силу того, что "стороны" этого "квадрата" это одинаковые но повернутые на $90^\circ, 180^\circ$ и 270° функциями
 значит $C = \frac{1}{2 \cdot 0,5^2}$ и $\frac{1}{2 \cdot 0,5x}$ это $2(2x)$ и $\frac{1}{2Cx}$ (производные от $f(x)$) при $x=0,5$)



~~Пусть расстояние от B до A1 равно~~
 Пусть перпендикуляр из B на D_1A_1 упадет в H

$BH = C - 0,5^2 = 0,25$

BD (диаметр) = $1 - 2BH$ (т.к. из-за симметрии поворотом на 180° и аналогичными рассуждениями можно получить что расстояние от D до B, C_1 равно BH)

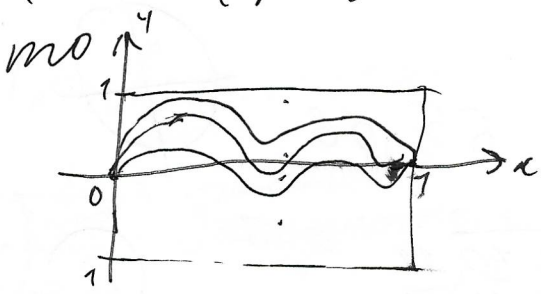
$BD = 0,5$, и радиус равен $\frac{DB}{2} = 0,25$

Ответ: $0,25$

Если бы функциями

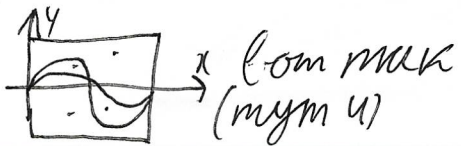
$y = \sin 11\pi k$; $y = \sin 13\pi k$;
 $y = \sin 15\pi k$ имели бы

~~одинаковые значения~~ у только при $x=0$ (ов) и $x=1$ (правда так как $\sin 11\pi = \sin 13\pi = \sin 15\pi$)



то было бы ограничено области на $x \in [0; 1]$; $y \in (-\infty; +\infty)$, введем функциями $y=1$ и $y=-1$, заметим что при $x \in (0; 1)$

если у 2 функций у равны, то у равны только у 2 функциями, когда только происходит развешается еще одна область на плоскости

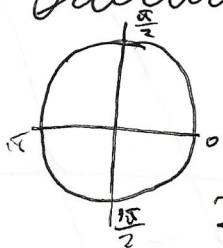


Числовик

Надо найти количество корней уравнений
 $\sin 11\pi x = \pm 1$ $\sin 11\pi x = \sin 13\pi x$
 $\sin 13\pi x = \pm 1$ $\sin 11\pi x = \sin 15\pi x$
 $\sin 15\pi x = \pm 1$ $\sin 13\pi x = \sin 15\pi x$
 при $x \in (0; 1)$

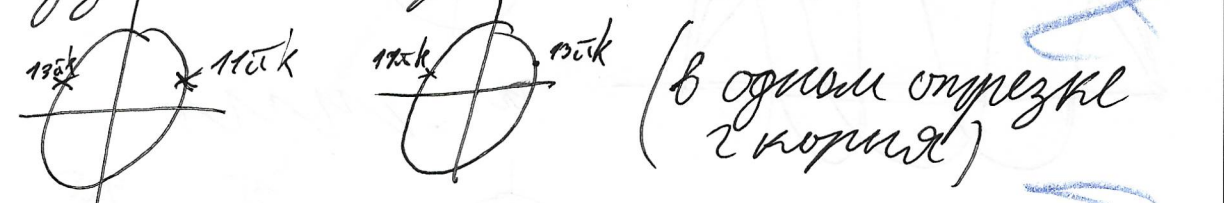
Сложить и прибавить 4 (так как 3 функции
 очевидно, что $\sin 11\pi x = \pm 1$ имеют
 11 корней при $x \in (0; 1)$, $\sin 13\pi x = \pm 1$
 13 корней, $\sin 15\pi x = \pm 1$ 15 корней
 $y = \sin k\pi x$ при $k \in \{11, 13, 15\}$
 делят полосу на части
 без пересечений (например
 при $x \in [0; \frac{1}{31}]$)

Рассмотрим $\sin 11\pi x = \sin 13\pi x$ при $x \in (0; 1)$
 На каждом отрезке длиной $\frac{1}{11}$ есть
 корни так как $\sin 11\pi x = \sin \pi x$ а $\sin 13\pi x > \sin \pi x$ при
 $x = \frac{1}{11}$



Значит они пройдут минимум по
 2 четверти каждой и будет ситуация
 по типу так как функции
 не совпадают, но

из-за того что $13\pi = 11\pi + 2\pi$
 будет ни 1 корень больше



- $\sin 11\pi x = \sin 13\pi x$ 12 корней
- $\sin 13\pi x = \sin 15\pi x$ 14 корней
- $\sin 11\pi x = \sin 15\pi x$ 14 корней (в одном отрезке
2 корня, потому
совпадают точки,
потом 2 корня)

$12 + 14 + 14 + 4 + 15 + 13 + 11 = 60 + 23 = 83$

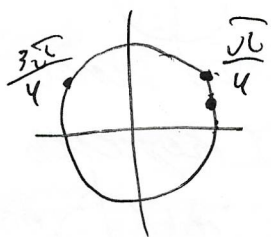
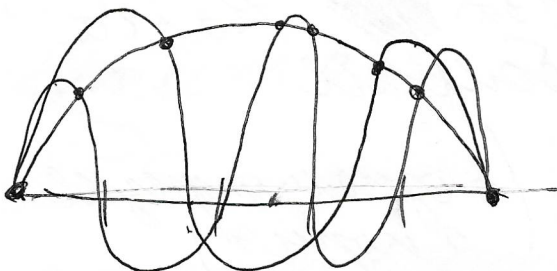
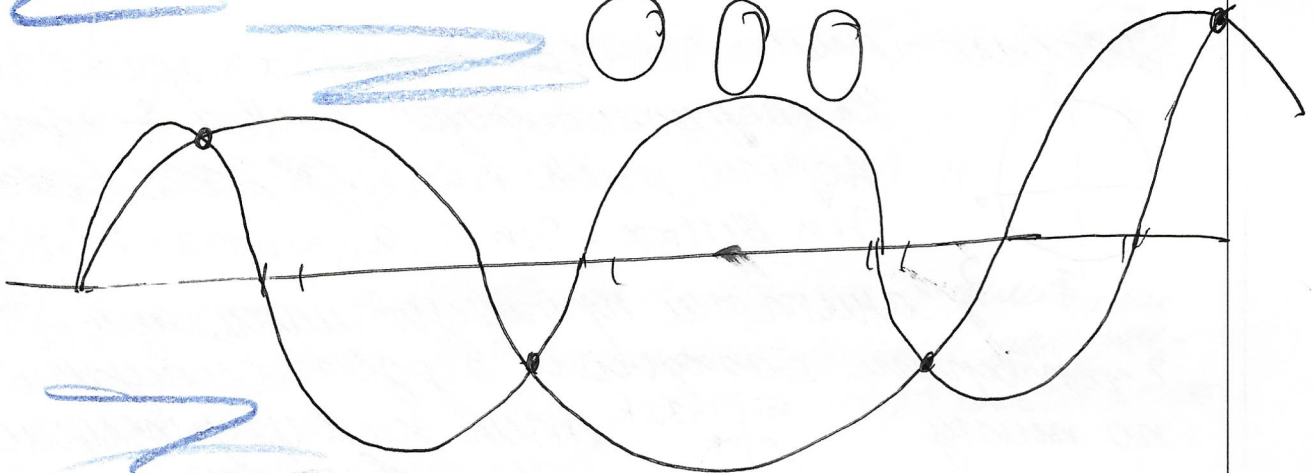
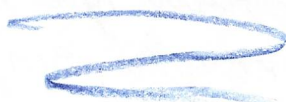
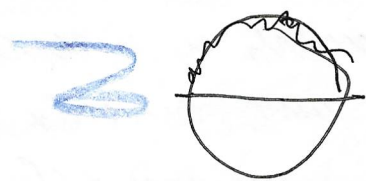
Ответ: 83

Черновики

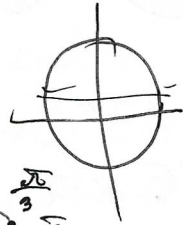


$$n \quad \sim \quad n + n$$

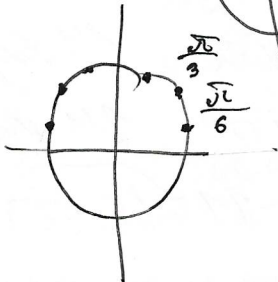
$$n \times 2 + n \quad \bigcirc$$



$$x + 3x = \pi$$



$$\frac{\pi}{2} + \frac{9\pi}{2}$$



$$\frac{2\pi}{6} + \frac{10\pi}{6}$$

