0 101660 430005

10-16-60-43
(128.1)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 10 классы

Место проведения г. Ульяновск
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Дорониной Дениса Владимировича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

поменял ручку в конце Зад 3

Дата
«29» марта 2026 года

Подпись участника

 70 (семьдесят)

10-16-60-43 (128.1)

№4

Чистовик

Ответ: $\sqrt[2026]{\frac{1}{2}}$

ОДЗ: $a>0,\ a\neq 1$

$$\frac{a^{2x}-3a^{x+1}+2a^2}{\log_2 a}\geq 0$$

$$\frac{a^2\left(a^{2(x-1)}-3a^{x-1}+2\right)}{\log_2 a}\geq 0 \quad a^2\geq 0 \text{ всегда} \Rightarrow \frac{a^{2(x-1)}-3a^{x-1}+2}{\log_2 a}\geq 0$$

$$\frac{(a^{x-1}-1)(a^{x-1}-2)}{\log_2 a}\geq 0 \quad \text{2 случ: 1) } a>1,\ \text{2) } a<1$$

1) $\log_2 a>0 \Rightarrow (a^{x-1}-1)(a^{x-1}-2)\geq 0$, но т.к. $a>1$, то при бесконеч. многих x $a^{x-1}>2$ потому, что если $x-1$ — натур, тогда и $a=1+\varepsilon$, то $a^{x-1}=(1+\varepsilon)^{x-1}\geq 1+(x-1)\varepsilon>2$ при $x>\frac{1}{\varepsilon}+1$

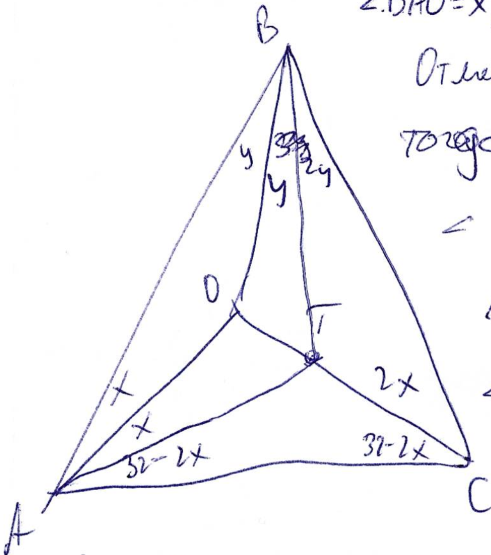
2) $\log_2 a<\log_2 1=0 \Rightarrow (a^{x-1}-1)(a^{x-1}-2)\leq 0$, $a^{x-1}-1>a^{x-1}-2 \Rightarrow$

$$\begin{cases} a^{x-1}-1\geq 0, \\ a^{x-1}-2\leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^{x-1}\geq 1 \Leftrightarrow x-1\leq 0 \ (\text{т.к. } a<1) \\ a^{x-1}\leq 2 \end{cases}$$

тогда т.к. решением этой сист. явл. отр-к дл. 2026, то $x-1\geq -2026$, $a^{-2026}>a^0=1$, a^{-2026} должно $=2$, т.к. если $a^{-2026}<2$, то в силу того, что a^{x-1} принимает все положительные значения найдется такое $t<-2026$, что $2>a^t>a^{-2026}$, но тогда решением сист. будет отрезок длины >2026. $a^{-2026}=2 \Rightarrow \frac{1}{a^{2026}}=2 \Rightarrow$ $a=\sqrt[2026]{\frac{1}{2}}$

№6 Чистовик

$\angle BAO = x, \angle OCB = 2x, \angle ABO = y, \angle ABC = 3y$ $\triangle ACT$ - р/б.



Отметим на CO точку T так, что $\angle TAC =$

тогда $\angle TAO = \angle CAO - \angle TAC = \cancel{32}\,\angle CAB - \angle BAO - \angle TAC = 32 - x - (32 - 2x) = x$

$AT = TC$, $AB = BC$, $\angle TAB = \angle TCB = 2x \Rightarrow$

$\triangle ABT = \triangle BTC \Rightarrow \angle ABT = \angle TBC = \frac{\angle ABC}{2} = 2y$

$\angle OBT = \angle ABT - \angle ABO = 2y - y = y$

в $\triangle ABT$: AO - бис, BO - бис $\Rightarrow$ TO - бис $\Rightarrow \angle ATO = 180 - x - y$

в $\triangle ATC$ $\angle ATO = \angle TAC + \angle TCA = 64 - 4x$

$\cancel{180} - x - y$

$\cancel{180}\ 90 - y = 64 - 3x$

$x = \frac{y - 26}{3}$

в $\triangle ABC$: $\angle A + \angle B + \angle C = 180 \Rightarrow \angle C = 180 - \angle A - \angle B = 180 - 2\cdot 32 = 180 - 64 = 116$

$4y = 116 \quad y = \frac{116}{4} = 29 \Rightarrow x = \frac{y - 26}{3} = \frac{29 - 26}{3} = 1$

$\angle AOB = 180 - x - y = 180 - 1 - 29 = 150$

$\frac{\angle AOB}{\angle BAO} = \frac{150}{1} = 150$

Ответ: 150

10-16-60-43 (128.1)

№2 Чистовик

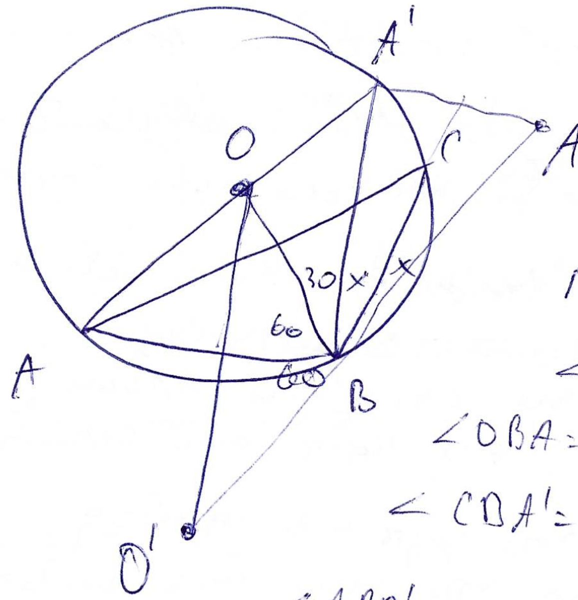
пусть a – кол-во ~~стро~~ строк в выбр. прямоуг, b – кол-во столбц. Тогда $1 \le a, b \le 100$, т.к. при $a = 101$ или $b = 101$ мы выр. либо весь кв 101×101, либо он раз. на 2 прямоуг. Чтобы не было дырки внутри нужно, чтобы ≥ 1 сторона выбр. прямоуг. была на краю доски. Разобьем ~~на~~ выр. прямоуг на 4 случ.:

1) одна из сторон прям. это часть 1-й строки,
2) одна из сторон прям. это часть 101-й строки,
3) одна из сторон прям это часть 1-го столбца
4) одна из сторон прям это часть 101-го столбца

1): рассм. самую лев. кв. выбр. прям. в 1-й стр. тогда ~~если~~ если ее номер i, то для самой правой кв. прям. в 1 стр. $10\cancel{2}1-i$ вар, ~~т.к.~~ это любая кл., правее i-й (~~если~~ лев. и пра. кл. могли совпасть), если $i = 1$, то таких вар 100, т.к. $b \le 100$. ~~тогда таких прям 100~~ а число строк любое от 1 до 100. Тогда таких прям. $100(100+100+99+...+1) =$
$100 \cdot (100 + \frac{100 \cdot 101}{2}) = 100 \cdot 5150$. Аналог. разб. случ. 2)
они не пере., т.к. $a \le 100$

3) ни одна из сторон не может лежать в 1-м или 101-м строках, т.к. мы их учли в случ 1, 2. ~~Тогда для~~ ~~для~~ число строк в прям ~~…~~ если самая верх. кл. в 1-м столбце имеет ном. i (нумер. ~~строк~~ кл. от 2-й сверху, до 100-й сверху) $\frac{100}{3}$ $\cancel{99}-i$. ~~Тогда кол-во прям.~~ $=$ ~~100~~ число столб. в таких прям ≤ 100 поэтому таких прям $= 100(99+...+1) = 100 \cdot \frac{99 \cdot 100}{2} = 100 \cdot 99 \cdot 50$.
Аналог. случ. 4, случ. 3 и 4 не перес, т.к. $b \le 100$
~~Все~~ ответ: $2 \cdot 100 \cdot 5150 + 2 \cdot 100 \cdot 4950 = 200 \cdot 10100 = 2020000$
Ответ: 2020000

№3 черновик



Пусть AA' - диаметр. $\Rightarrow$ $\angle ABA' = 90^\circ$

$\angle C = 30^\circ \Rightarrow \angle AOB = 2\angle C = 60^\circ$

$\angle AOB = 60^\circ$, $AO = OB \Rightarrow AOB$ - равностор. $\Rightarrow \angle OBA = 60^\circ$.

$\angle A'OB = \angle A'BA - \angle OBA = 30^\circ$

$\angle OBA = \angle ABO' = 60^\circ$ из сим.

$\angle CBA' = \angle CBA''$ из сим.
$= x$

$\angle ABO' + \angle ABO + \angle OBA' + \angle A'BC + \angle A''BC = 180^\circ \Rightarrow$

$60 + 60 + 30 + x + x = 180$

$150 + 2x = 180$

$2x = 30$

$x = 15$

$\angle B = \angle ABO + \angle OBA' + \angle CBA' =$

$60 + 30 + 15 = 105$

Ответ: 105°

10-16-60-43 (128.1)

№5 чистовик

Ответ: $\sqrt{3}$

Пример: $x = y = z = \frac{\pi}{6}$ $tg\frac{\pi}{6} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$3\,tg\frac{\pi}{6} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

Оценка:

~~БОО $x \le y \le z$.~~

~~Пусть какие-то 2 буквы не равны. БОО $x \ne y$.~~

Тогда докажем Пусть какая-то буква $> \frac{\pi}{6}$, а какая-то $< \frac{\pi}{6}$

(если таких нет, то $x = y = z = \frac{\pi}{6}$) БОО $y > \frac{\pi}{6}$, $x < \frac{\pi}{6}$.

тогда ~~рас рассмотр. t такое, что $\frac{\pi}{6}$~~ возьмем

$t = \min\left(\frac{\pi}{6} - x,\ y - \frac{\pi}{6}\right)$. Тогда докажем, что

$tg x\, tg y < tg(x+t)\, tg(y-t)$ $(*)$.

$a = \sin x$
$b = \cos x$
$c = \sin y$
$d = \cos y$
$e = \sin t$
$f = \cos t$

~~$(*)$: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} < \sin(x+$~~

$\sin(x+t) = \sin x \cos t + \cos x \sin t = af + be > 0$

$\cos(x+t) = \cos x \cos t - \sin x \sin t = bf - ae > 0$

$\sin(y-t) = \sin y \cos t - \cos y \sin t = cf - de > 0$

$\cos(y-t) = \cos y \cos t + \sin y \sin t = df + ce > 0$

$(*)$: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \overset{?}{<} \frac{af+be}{bf-ae} \cdot \frac{cf-de}{df+ce}$

$ac(bf-ae)(df+ce) \overset{?}{<} bd(af+be)(cf-de)$

$\underline{abcdf^2} + abce^2f - a^2cdef - a^2c^2e^2 \overset{?}{<} \underline{abcdf^2} - abde^2f + b^2cdef - b^2d^2e^2$ $| : e$

$abe^2ef - b^2cdef + abd^2ef - a^2cdef + b^2de^2 - a^2c^2e^2 \overset{?}{<} 0$ $| : e$

черновик ?

$bcf(ac-bd)+adf(bd-ac)+e(bd-ac)(bd+ac) \overset{?}{<} 0$

$bd-ac = \cos x\cos y - \sin x \sin y = \cos(y+x) > 0$

$-bcf + adf + e(bd+ac) \overset{?}{<} 0$

$adf + ebd + eac - bcf \overset{?}{<} 0$

$f(ad-bc) + e(ac+bd) \overset{?}{<} 0$

~~$ad-bc = \sin x \cos y$~~

$f(bc-ad) - e(ac+bd) \overset{?}{>} 0$

$bc-ad = \sin y \cos x - \cos y \sin x = \sin(y-x) > 0$

$ac+bd = \sin x \sin y + \cos x \cos y = \cos(y-x) > 0$

$\cos t \cdot \sin(y-x) - \sin t \cos(y-x) \overset{?}{>} 0$

$\sin(y-x-t) > 0$

$y-x-t > 0 \Rightarrow \sin(y-x-t) > 0.$

Значит. макс. у выр. $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z$ достиг. при $x=y=z$

$\boxed{!}$ мы доказали данное нер-во шгурнам с сохранением суммы, т.к. $x+y+z = x+t+y-t+z$.

черновик

$abc^2f - a^2cdf - a^2c^2e \vee -b^2d^2e + b^2cdf - abd^2f$

$bcf(\underbrace{ac-bd}_{<0}) + adf(\underbrace{bd-ac}_{>0}) + e(\underbrace{b^2d^2-a^2c^2}_{>0}) \vee 0$

$\sin x \sin y = ac$

$\cos x \cos y = bd$

$bc - ad = \cos x \sin y - \sin x \cos y = \sin(y-x)$

$bd - ac = \cos(y+x) > 0$

$bd + ac = \cos(y-x) > 0$

$adf + e(bd+ac) < bcf$

$adf + bde + ace < bcf$

$\sin t \cdot \cos(y-x) < \cos t \cdot \sin(y-x)$

$\Updownarrow$

$\sin(y-x-t) > 0$

Черновик

$$\frac{\sin x \sin y \cos(x+y)}{\cos x \cos y \sin(x+y)}$$

$29\cdot 4+2\cdot 32$

$\parallel$

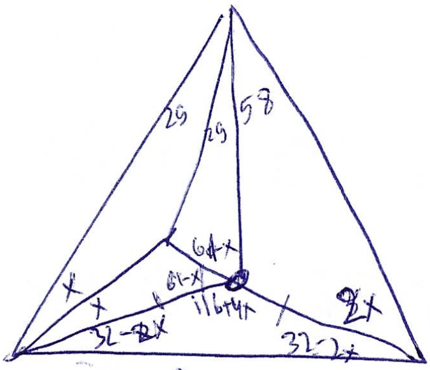
$(58+32)\cdot 2$

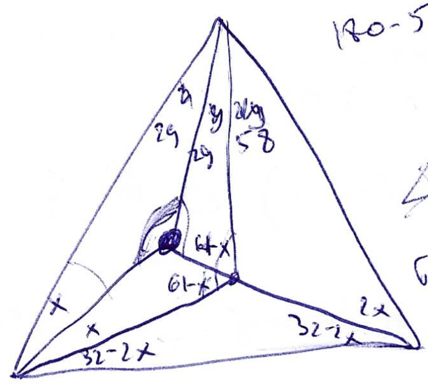
$29\cdot 2=$

abc^2f-abd^2f+

$$\frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y}$$

$180-58=122$

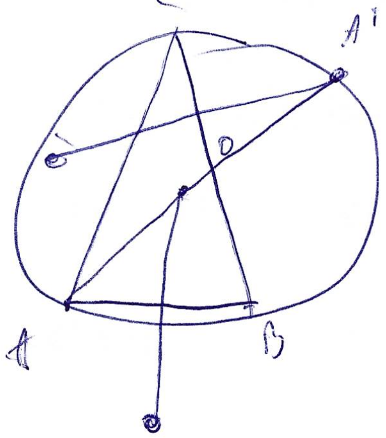


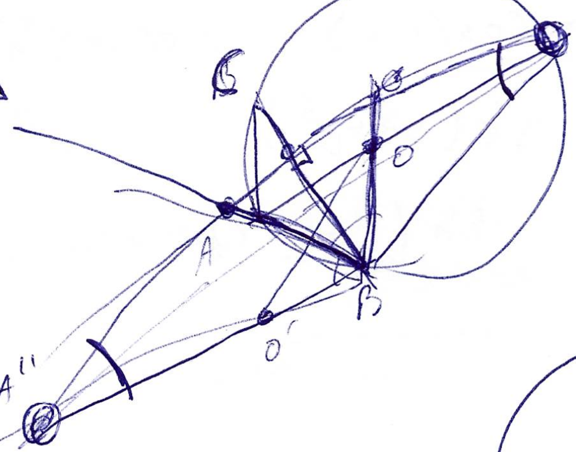


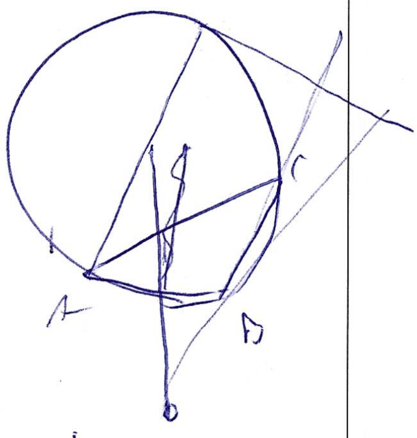
$61-x=64-4x$

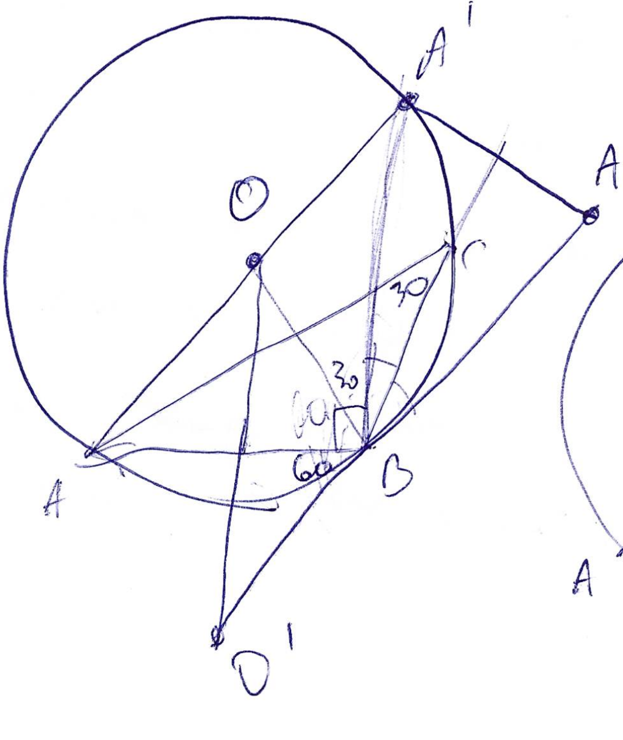
$3x=3$

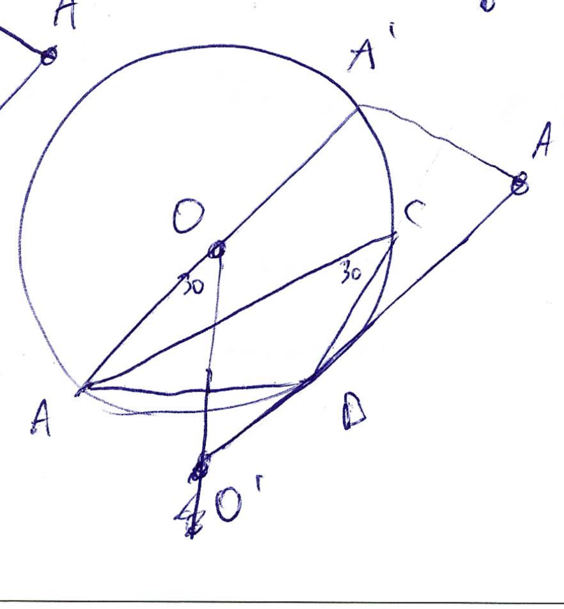
$x=1$





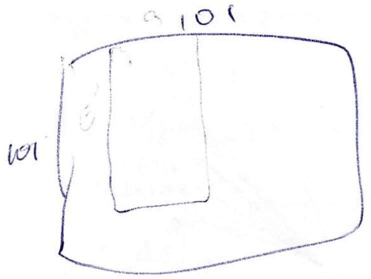






Черновик

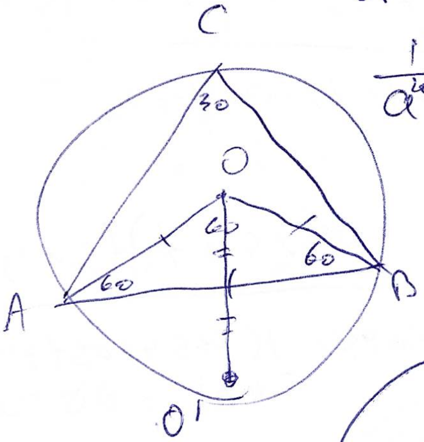
$1 \le a, b \le 100$



$a^{-2026} = 2$

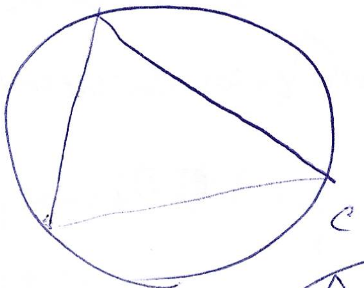
$\frac{1}{a^{2026}} = 2$

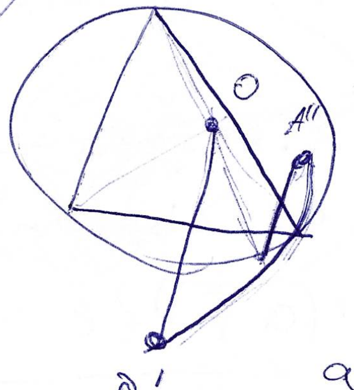
$a = \sqrt[2026]{\frac{1}{2}}$



$\left(\frac{1}{2}\right) \quad 2^{\frac{1}{2026} \cdot 2026}$

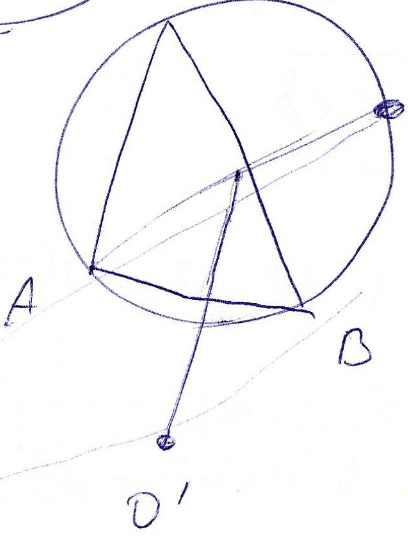
$2^{\frac{2025}{2026}}$





$a > 0$

$a \ne 1$



$$\frac{a^2(a^{2x-2} - 3a^{x-1} + 2)}{\log_2 a} \ge 0$$

$a(a-1)(a^{2x-3} - 2)$

$(a-1)(a^{2x-3} + a^{2x-4} + \dots + a^{x-1} - 2$

$$\frac{a^{2x-2} - 3a^{x-1} + 2}{\log_2 a} \ge 0$$

$\cancel{x-1 = t}$

$\cancel{a^t}$

$a^{x-1} = t$

$a^{2t} - 3a^t + 2$

$$\frac{t^2 - 3t + 2}{\log_2 a} \ge 0 \qquad \frac{(t-1)(t-2)}{\log_2 a} \ge 0$$

$$\frac{(a^{x-1} - 1)(a^{x-1} - 2)}{\log_2 a} \ge 0$$

<0

>0

$\boxed{a < 1}$ $\quad a = 1 \quad a > 1$

$a \in (0, 1)$ $\quad (-\infty, +\infty)$

$\boxed{x - 1 \le 0}$

$x \le 1$

$a^{x-1} - 1 \ge 0$

$a^{x-1} - 2 < 0$

$a^{x-1} \ge 1$

$a^{x-1} \le 2$

$x - 1 \le 0$

$x > 0$

$x \le 1$

$x \ge -2025$

$x - 1 \ge -2026$

$x - 1 \ge -1$

черновик

$\sin x = a$ $\quad \sin y = c$ $\quad \sin t = e$

$\cos x = b$ $\quad \cos y = d$ $\quad \cos t = f$

$tg x \cdot tg y \to tg(x+t)\, tg(y-t)$

$\frac{\sin x \cdot \sin y}{\cos x \cos y}$ $\quad \frac{\sin(x+t)\sin(y-t)}{\cos(x+t)\cos(y-t)} = (\sin x \cos t + \cos x \sin t$

$tg(y-t)$, $tg(x+t)$, $tg x$

$$\frac{(\sin x \cos t + \cos x \sin t)(\sin y \cos t - \cos y \sin t)}{(\cos x \cos t - \sin x \sin t)(\cos y \cos t + \sin y \sin t)}$$

$\sin x \sin y \cos^2 t - \sin x \cos y \sin t \cos t + \cos x \sin y \sin t \cos t - \cos x \cos y \sin^2 t$

$$\frac{(af+be)(cf-de)}{(bf-ae)(df+ce)}$$

$tg(x+t) - tg x \,?\, tg y - tg(y-t)$

$ac(bf-ae)(df+ce) \vee bd(af+be)(cf-de)$

$aebdf^2 + abc^2ef - a^2cdef - a^2c^2e^2 \vee abcdf^2 - b^2d^2e^2 + b^2cdef - b^2abd^2ef$

$abc^2f - a^2cdf - a^2c^2e \vee -b^2d^2e + b^2cdf - abd^2f$

$99 \times 5 = 495$

101

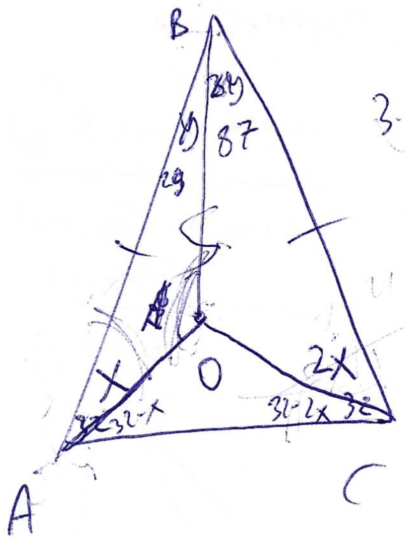
$100 \cdot \left(\frac{100 \cdot 101}{2} + 100\right) \cdot 2 + 2 \cdot 100(99+98+ \ldots +1)$

$2 \cdot 100 \cdot \frac{99 \cdot 100}{2}$

$2 \cdot 100 \cdot (5150 + 4950) = 200 \cdot 10000 = 202000$

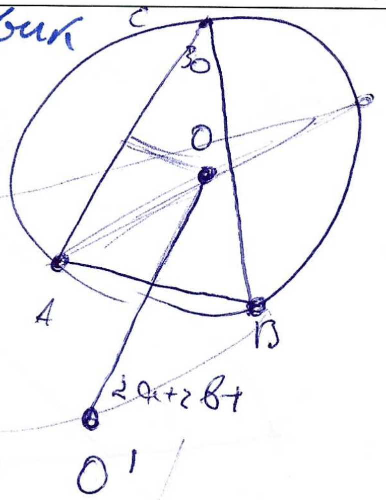
$99 \cdot 100 \cdot 100(99 \cdot 100 + 9900 + 99 + \ldots + 1)$

черновик



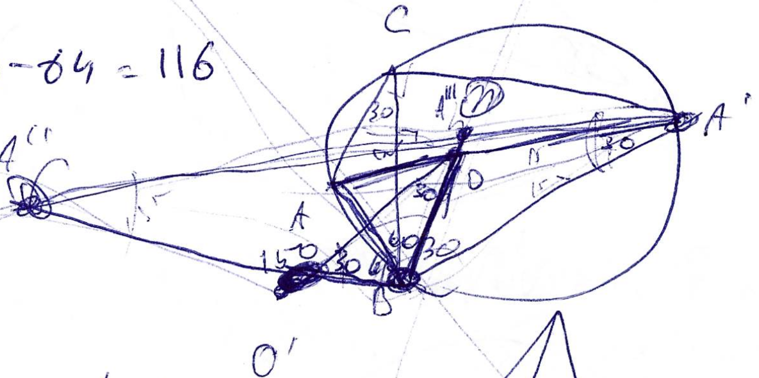
$3 \cdot 29 = 87$

$180 - 87 = 93$



$4y = 180 - 2 \cdot 32 = 180 - 64 = 116$

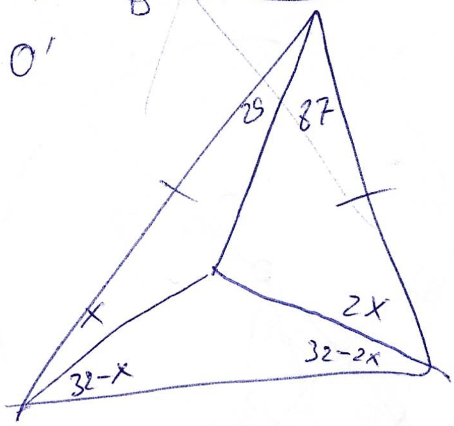
$y = 29$



$180 - 29 = 151$

$\frac{151 - x}{x}$

$\frac{\sin 151 - x}{\sin x} = \frac{\sin 93 - 2x}{\cancel{\sin 2x}}$ $2\sin\cos$



$\sin 151 \cos x - \cos 151 \sin x$

$\frac{\sin 93 \cos 2x - \cos 93 \sin 2x}{2\cos x}$

$2\cos^2 x = \cos^2 x + 1 - \sin^2 x$

$\frac{\sin 151 - x}{\sin x} = \frac{\sin 93 - x}{\sin 2x}$

$2\sin 151 - x \cos x = \sin 93 - 2x$

$\sin 151 \cdot 2\cos^2 x - \cos 151 \sin 2x$

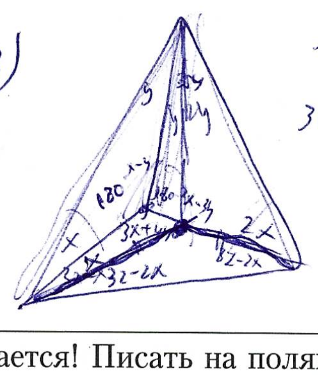
$\sin 151 + \sin(2(151 - 2x)) = \sin(302 - 4x)$

$\sin 151 + \sin(302 - 4x) = \sin(93 - 2x)$

$\sin 151 + \sin(4x - 58)$

$\frac{180 - x - y}{x}$?

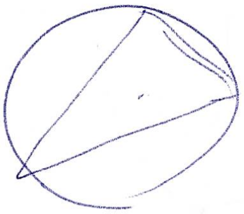
$360 - 3x - 4y$

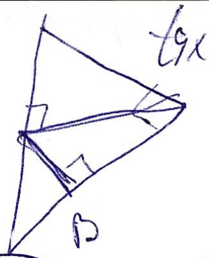


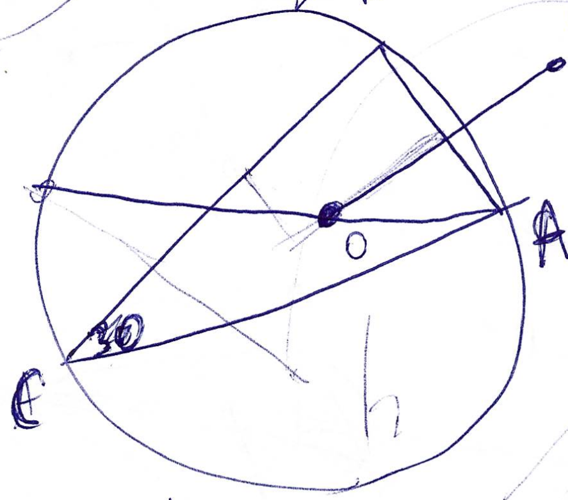
$tg\,x + tg\,y + tg(\frac{\pi}{2} - x - y)$ черновик

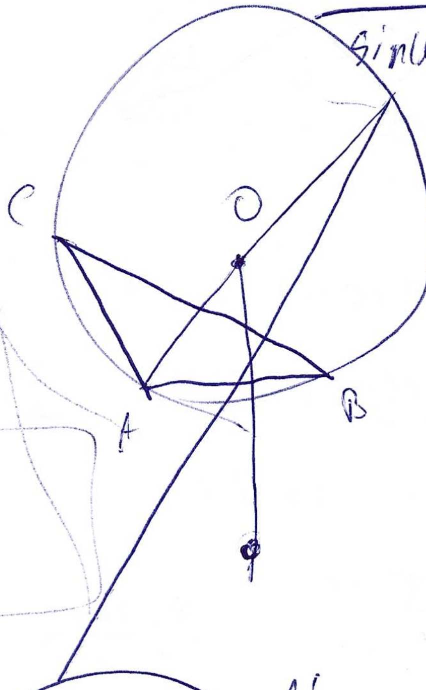
$\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-(x+y))}{\cos(\frac{\pi}{2}-(x+y))} = \frac{\cos(x+y)}{-\sin(x+y)}$ $\frac{-\sin(x+y)}{\cos(x+y)}$

$\frac{\cos(x+y)}{\sin(x+y)}$



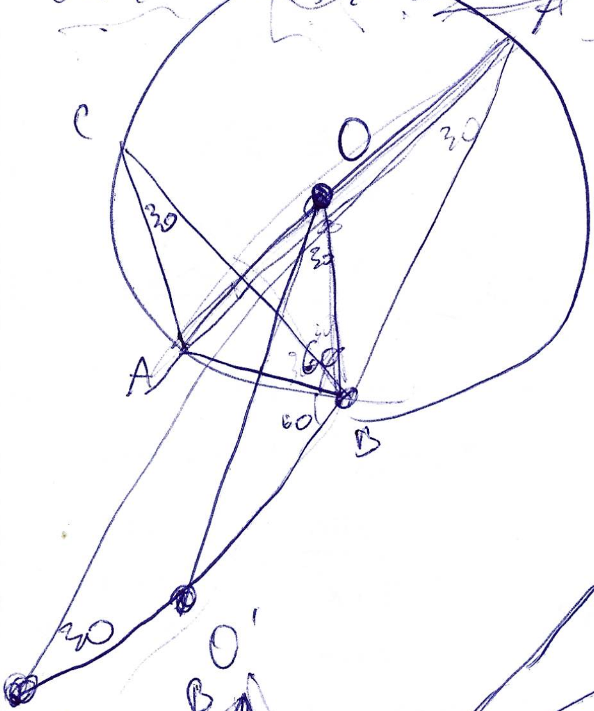


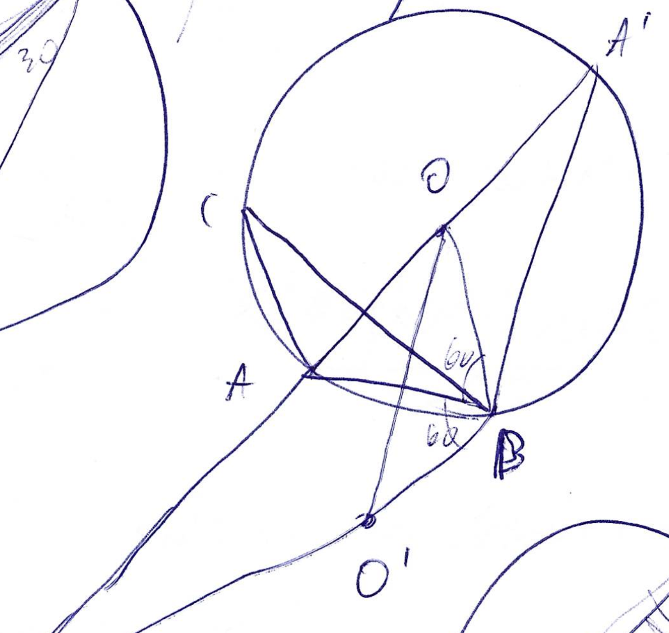


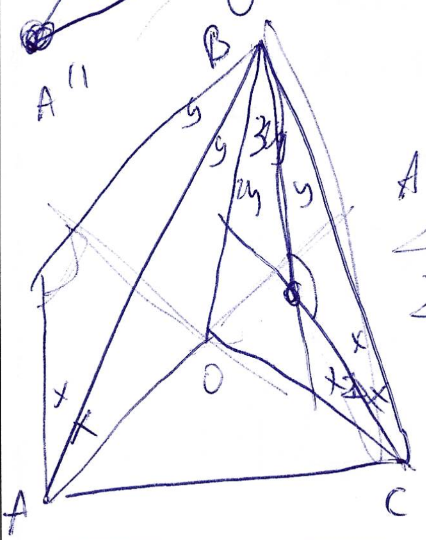


$\sin(\frac{\pi}{2}-x) = \sin\frac{\pi}{2}\cos x - \cos\frac{\pi}{2}\sin x$

$\cos(\frac{\pi}{2}-x) = \cos\frac{\pi}{2}\cos x + \sin\frac{\pi}{2}\sin x$







$\frac{\angle BOA}{\angle BAO}$