

0 665592 250006
66-55-92-25
(123.9)



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 10 КЛАСС

Место проведения МОСКВА
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников ЛОМОНОСОВ
наименование олимпиады

ПО МАТЕМАТИКЕ
профиль олимпиады

АУГАРЖАПОВАЙ ЮМХАНЫ ЗОРИКТОЕВНЫ
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

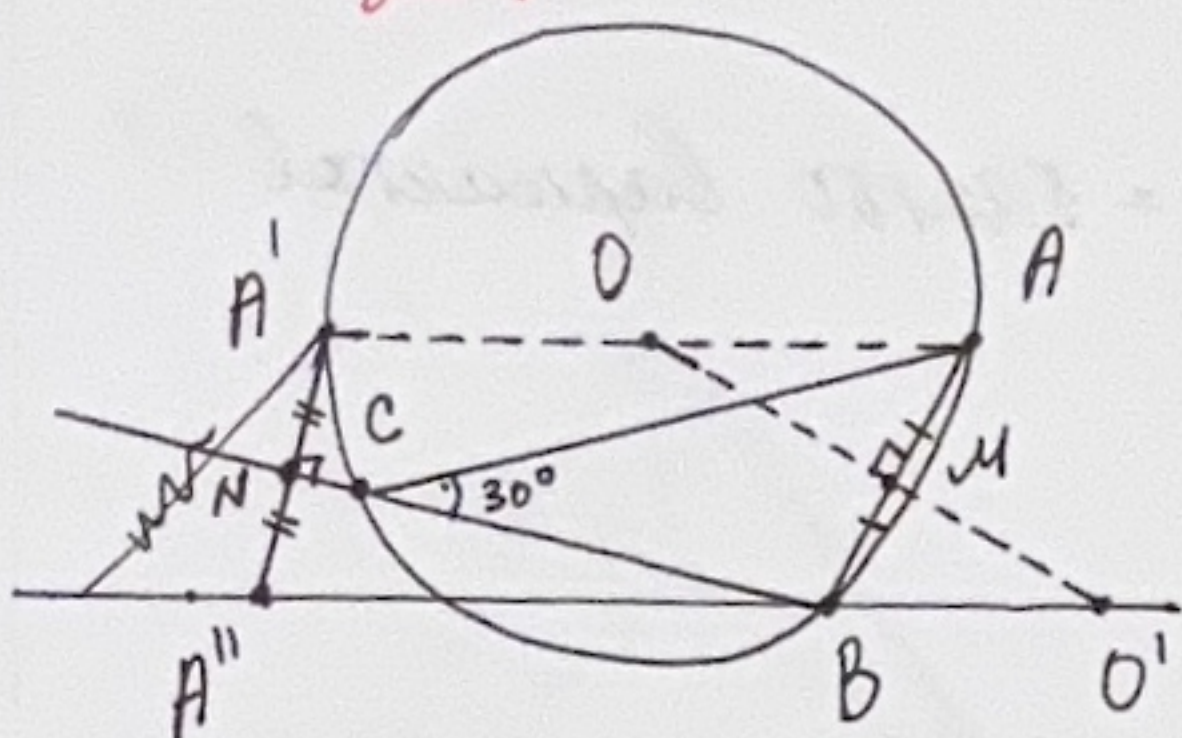
Дата
«29» МАРТА 2026 года

Подпись участника
[Подпись]

66-55-92-25
(123.9)

№3.

~~лист~~

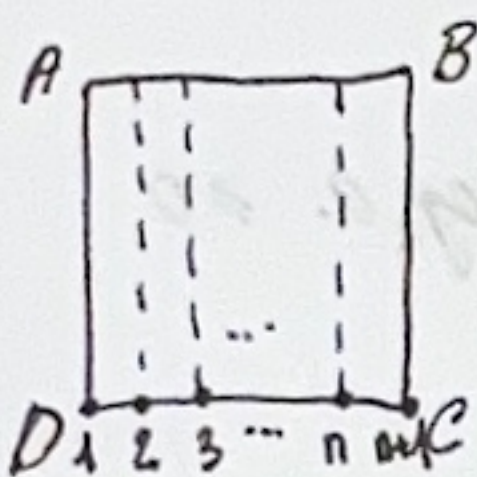


$OB = OA = OC = OA'$ по условию.
Т.к. O' симметрична O ,
то $OO' \perp AB$ в $T.M$ и $OM = O'M \Rightarrow$
 \Rightarrow в $\triangle OBO'$ BM - высота и
медiana $\Rightarrow \triangle OBO'$ - равнобедренный $\Rightarrow OB = O'B$.
Аналогично $OA = O'A$ в $\triangle OAO'$ и
 $A'B = A''B$ в $\triangle A'BA''$.

Т.к. $OA = OB$ и $O'B = OB$ и $O'A = OA$, то $O'B = O'A = OA = OB \Rightarrow$
 $\Rightarrow OAO'B$ - ромб. $\angle AOB = 2\angle ACB = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ \Rightarrow$
 ~~$\Rightarrow \angle ABO = 60^\circ$~~ $\Rightarrow \angle OBO' = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$
(т.к. $OAO'B$ - ромб) $\Rightarrow \angle ABO' = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$.
 $\angle ABA' = 90^\circ$, т.к. AA' - диаметр по условию \Rightarrow
 $\Rightarrow \angle A'BA'' = 180^\circ - \angle ABO' - \angle ABA' = 180^\circ - 60^\circ - 90^\circ = 30^\circ$.
Т.к. $\triangle A'BA''$ - равнобедренный, то BN в нем - биссектриса $\Rightarrow \angle A''BC = \frac{30^\circ}{2} = 15^\circ \Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle ABC = 180^\circ - \angle ABO' - \angle A''BC = 180^\circ - 60^\circ - 15^\circ = 105^\circ$.
Ответ: 105° .

№2.

Т.к.



у оставшейся фигуры не должно быть дырок,
то отрезать нужно от боковой стороны,
разделить ее на 3 части (2 останутся,
одна отрезется). Т.к. квадрат клетчатый,
то ~~на~~ пронумеруем точки разбивки
на его сторонах (на каждой нумера-
ция от 1 до 102). Квадрат можно
поворачивать \Rightarrow посчитали варианты разрезания
относительно одной стороны (например, стороны AB)
1) Не берем точки с номерами 1 и $n+1$ в общем виде.
 $n = 101$). Тогда выбрать ширину и 2 вершины
прямоугольника можно $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ способами.
Длину можно выбрать n способами, чтобы
кв. не распался на 2 части. Итого $\frac{n(n-1)(n-2)}{2}$
 $= \frac{101 \cdot 100 \cdot 99}{2} = 499950$.

2) Берем одну точку (либо с номером 1, либо с $n+1$),
итого другую не с номером 1 или $n+1$. Итого,
 ~~$\frac{(n-1)(n-2)}{2}$~~ $2(n-1)^2 = 20000$

3) Берем обе точки с координатами 1 и n+1.
 Итого $2(n-1) = 200$.
 Всего $499950 + 20000 + 200 = 520150$ вариантов разрезов.

N1.
 $A = 2026$.
 $A = abc + 2(ab+bc+ca) + 4(a+b+c)$, где a, b, c - стороны пирамиды. П.к. a, b, c равносильны, то пусть $0 < a < b < c$.
 $(a+2)(b+2)(c+2) = abc + 2(ab+bc+ca) + 4(a+b+c) + 8$
 $\Rightarrow (a+2)(b+2)(c+2) = A + 8 = 2026 + 8 = 2034$.
 $2034 = 2 \cdot 3^2 \cdot 113$. П.к. $a > 0$, то $a+2 > 2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow a+2 = 3, b+2 = 2 \cdot 3, c+2 = 113 \Rightarrow$
 $\Rightarrow a = 1, b = 4, c = 111 \Rightarrow abc = 444$

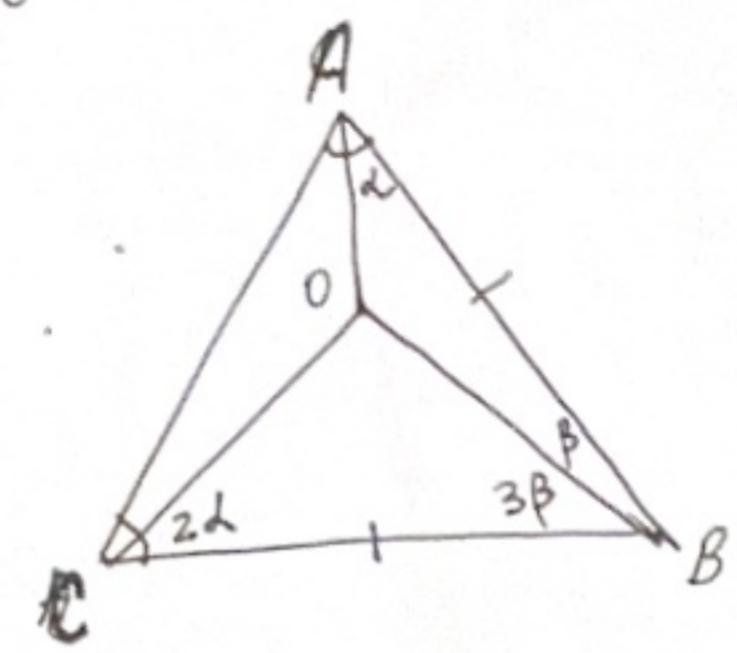
Ответ: 444.

N4
 $\frac{a^{2x} - 3a^{x+1} + 2a^2}{\log_2 a} \geq 0 \Leftrightarrow (a^{2x} - 3a^{x+1} + 2a^2) \log_2 a \geq 0$
 ОДЗ: $\log_2 a \neq 0 \Rightarrow a \neq 1$.
 $\log_2 a > 0$
 $a^{2x} - 3a^{x+1} + 2a^2 = (a^{2x} - 3a^{x+1} + \frac{9}{4}a^2) - \frac{1}{4}a^2 =$
 ~~$= (a^x - \frac{3}{2}a)^2 - \frac{1}{4}a^2 = (a^x - \frac{3}{2}a - \frac{1}{2}a)(a^x - \frac{3}{2}a + \frac{1}{2}a) =$~~
 $= (a^x - \frac{3}{2}a) - \frac{1}{4}a^2 = (a^x - \frac{3}{2}a - \frac{1}{2}a)(a^x - \frac{3}{2}a + \frac{1}{2}a) =$
 $= (a^x - \frac{2}{2}a)(a^x - \frac{4}{2}a) = (a^x - a)(a^x - 2a)$.
 $(a^x - a)(a^x - 2a) \log_2 a \geq 0$.
 1) $a^x - a = 0 \Rightarrow a^x = a \Rightarrow a^{x-1} = 1 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ a=1 \end{cases}$

66-55-92-25
(1239)

2) $a^x - 2a = 0 \Rightarrow a^x = 2a \Rightarrow a^{x-1} = 2$.

N6

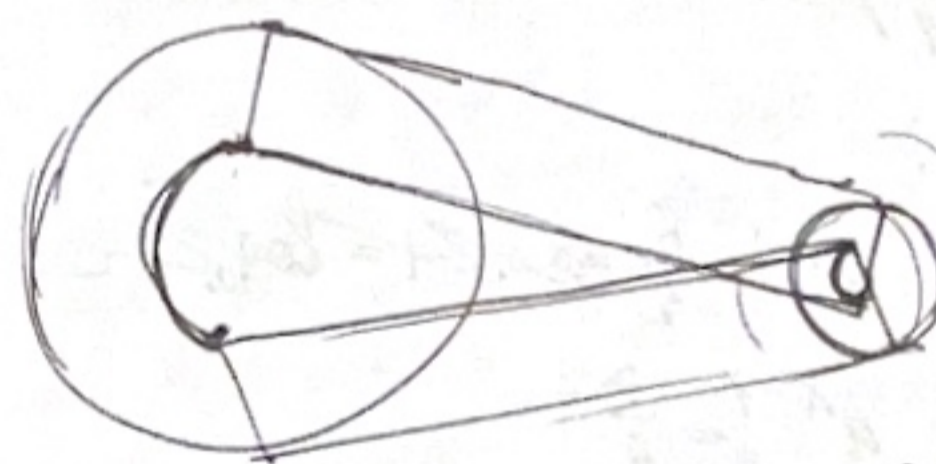
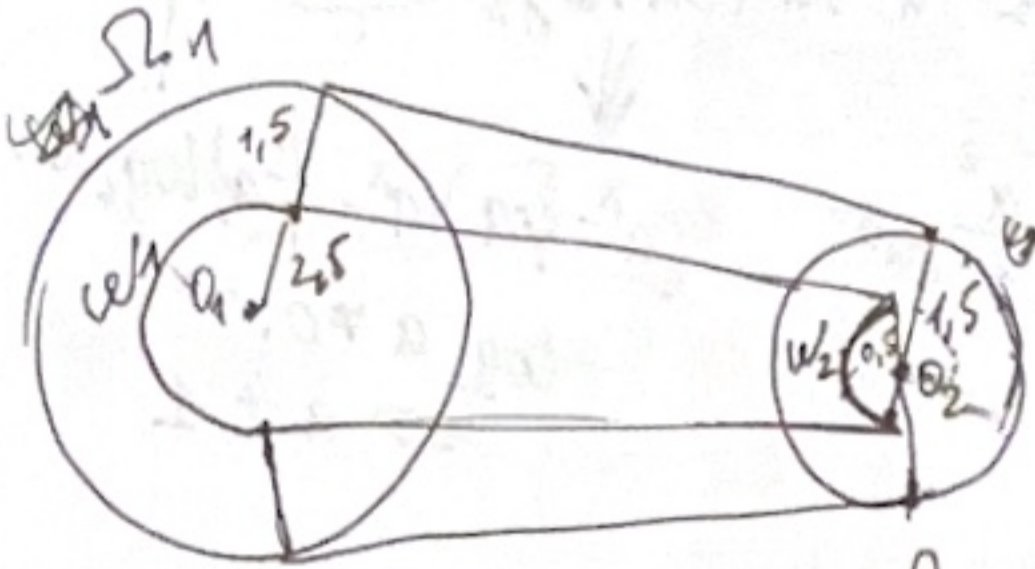
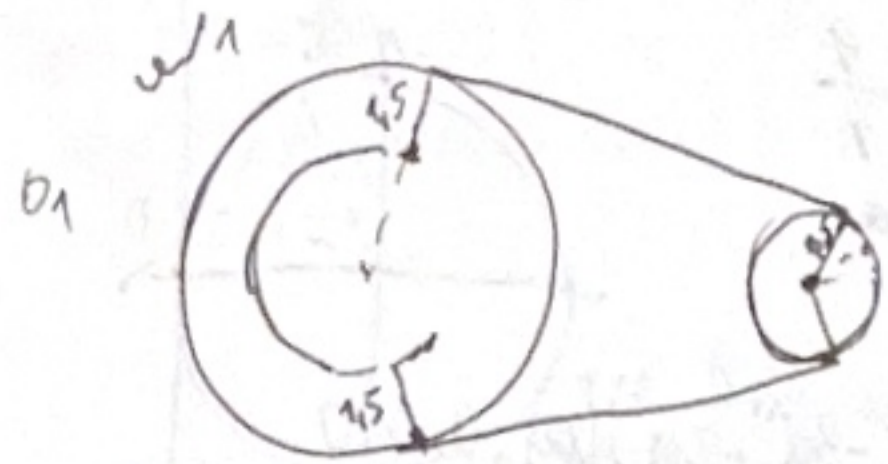


$\angle BAC = \angle BCA = 32^\circ \Rightarrow$
 $\Rightarrow AB = CB$ и $\angle ABC = 116^\circ$.
 Пусть $\angle BAO = \alpha, \angle ABO = \beta \Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle BCO = 2\alpha, \angle CBO = 3\beta \Rightarrow$
 $\Rightarrow 4\beta = 116^\circ \Rightarrow \beta = 29^\circ$.

$$(a^x - a)(a^x - 2a) \log_2 a \geq 0.$$

$$a^x - a = 0 \Rightarrow a^x = a \Rightarrow a^{x-1} = 1 \Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ a=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ a=1 \end{cases}$$

$$a^x - 2a = 0 \Rightarrow a^x = 2a \Rightarrow a^{x-1} = 2 \Rightarrow x-1 = \log_a 2$$



$$\begin{array}{r} 2034 \mid 2 \\ \underline{-2} \quad 1017 \\ \quad \underline{-3} \quad 339 \\ \quad \quad \underline{-3} \quad 113 \\ \quad \quad \quad \underline{-1} \quad 1 \end{array}$$

$$r_{w_1} = 2,5$$

$$r_{w_2} = 1,5$$

$$0 < a < b < c$$

$$A = abc + 2(ab + bc + ca) + 4(a + b + c) = 2026$$

$$(a+2)(b+2)(c+2) = (ab + 2a + 2b + 4)(c+2) = abc + 2ab + 2ac + 4a + 2bc + 4b + 4c + 8 =$$

$$\begin{array}{r} 2034 \mid 2 \\ 1017 \mid 3 \\ 339 \mid 3 \\ 113 \mid 113 \\ 1 \end{array}$$

$$= abc + 2(ab + bc + ca) + 4(a + b + c) + 8 = A + 8 \Rightarrow (a+2)(b+2)(c+2) = 2034$$

$$(a+2)(b+2)(c+2) = 2 \cdot 3^2 \cdot 113$$

$$\begin{cases} a+2 \neq 2 \\ b+2 \neq 2 \\ c+2 \neq 2 \end{cases} \text{ иначе } \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$a+2 > 2 \text{ иначе } a < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b=2, a=3, c=113 \rightarrow abc = 1 \cdot 4 \cdot 111 = 444$$

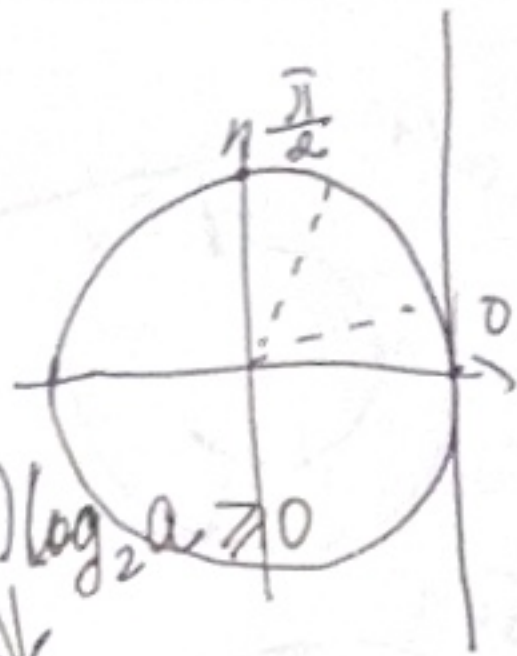
$$\begin{array}{r} 113 \mid 7 \\ \underline{-7} \quad 43 \\ \quad \underline{-42} \quad 1 \end{array}$$

$$0 < x, y, z < \frac{\pi}{2}$$

$$x + y + z = \frac{\pi}{2}$$

$$x \leq y \leq z$$

$$\frac{9}{4}$$



$$a^{2x} - 3a^{x+1} + 2a^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a^{2x} - 3a^{x+1} + 2a^2) \log_2 a \geq 0$$

$$a > 0.$$

$$1) a^{2x} - 3a^{x+1} + 2a^2 \geq a + \frac{a^2}{4}$$

$$(a^x - \frac{5}{4}a)(a^x - \frac{7}{4}a) \log_2 a \geq 0$$

$$\log_2 a \neq 0 \Rightarrow a \neq 1$$

$$(a^x - \frac{3}{2}a)^2 + \frac{a^2}{4} \geq 0$$

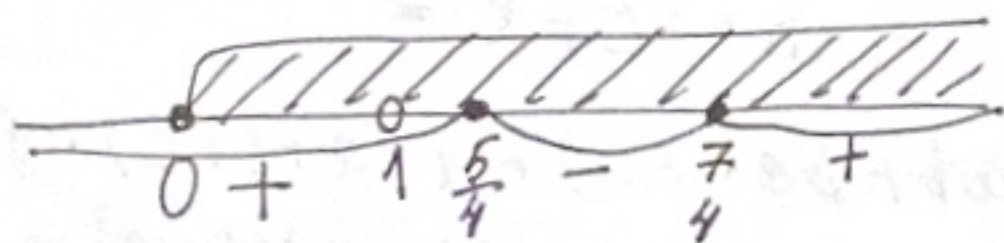
$$(a^x - \frac{3}{2}a - \frac{1}{4})(a^x - \frac{3}{2}a + \frac{1}{4}) \geq 0$$

$$(a^x - \frac{5}{4}a)(a^x - \frac{7}{4}a) \geq 0$$

$$a^x = \frac{5}{4}a \Rightarrow a^{x-1} = \frac{5}{4} \Rightarrow x-1 = \log_2 \frac{5}{4}$$

$$a^x = \frac{7}{4}a \Rightarrow a^{x-1} = \frac{7}{4}$$

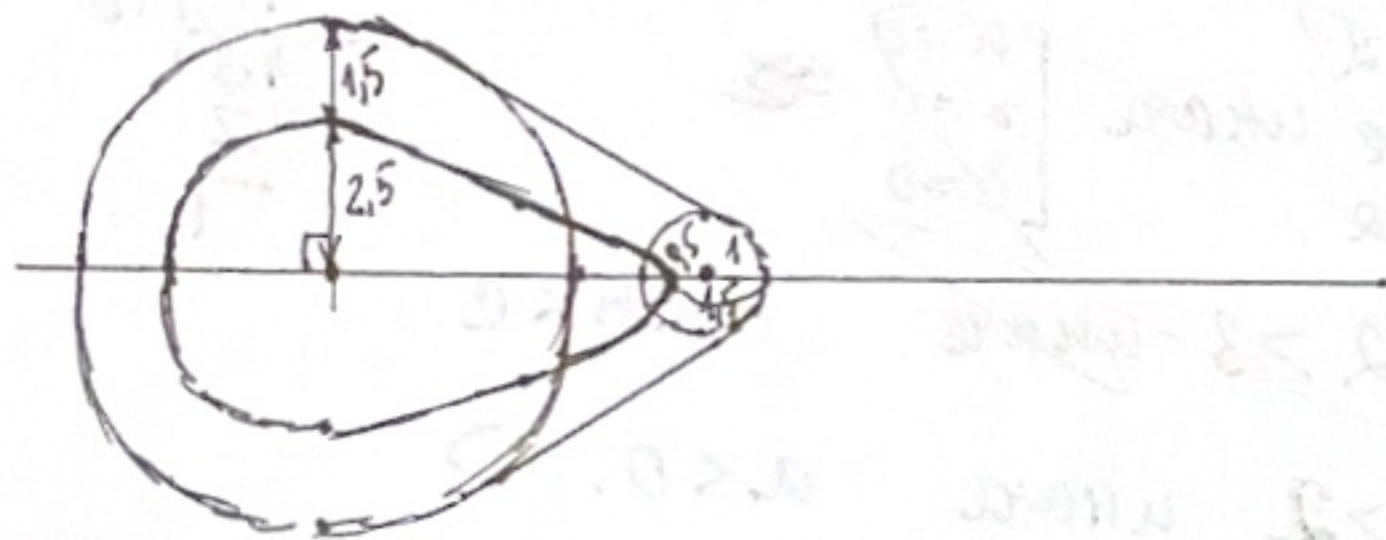
$$a^{x-1} \in (0; \frac{5}{4}] \cup [\frac{7}{4}; +\infty)$$



$$a=0. \log_2 0 = -1.$$

$$\log_2 a \neq 0.$$

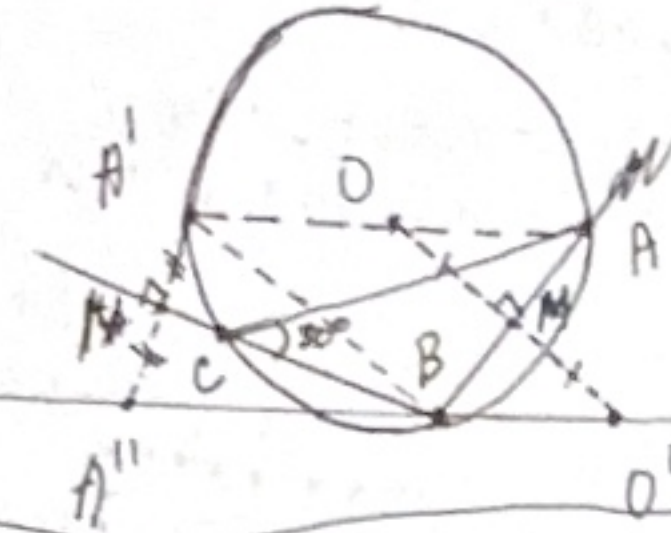
$$a=1.$$



№ 3.1

$$OB = OA = OC = OA' \text{ в т. м.}$$

т.к. O' симм. O , то $OO' \perp AB$ и $O'M = AM$, $\angle OMB = \angle O'MB$ и $\angle OMB = \angle O'MB$ и $\angle OMB = \angle O'MB$ и $\angle OMB = \angle O'MB$



Аналогично $\angle AOB = \angle A'OB = 60^\circ \Rightarrow$

$\angle AOB = \angle A'OB = 60^\circ \Rightarrow \angle AOB = 60^\circ \Rightarrow$
 $\angle AOB = 60^\circ \Rightarrow \angle AOB = 60^\circ \Rightarrow$
 $\angle AOB = 60^\circ \Rightarrow \angle AOB = 60^\circ \Rightarrow$

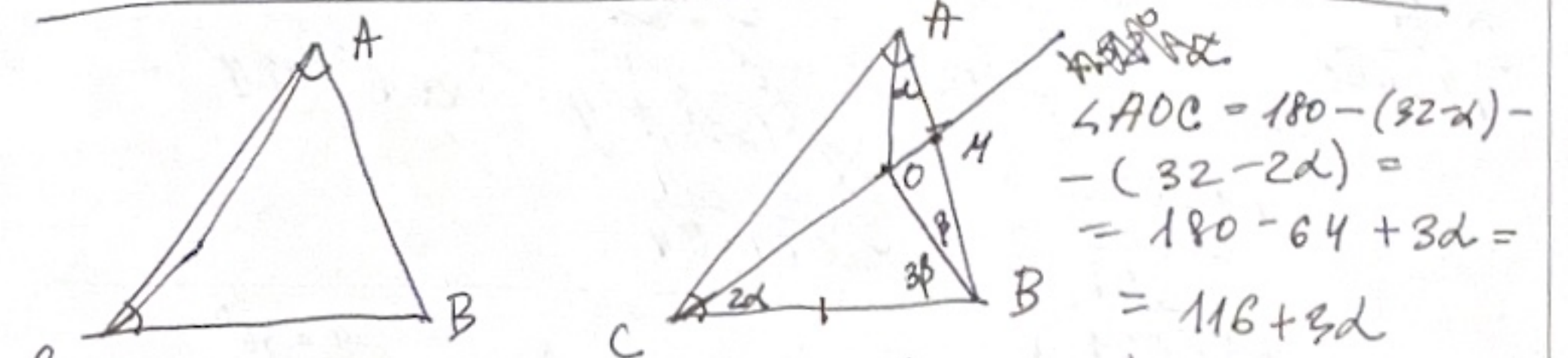
$\angle ABA' = 90^\circ$, т.к. AA' - диаметр. \Rightarrow

$$\Rightarrow \angle A'BA'' = 180^\circ - \angle ABO' - \angle ABA' = 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

т.к. A'' симм. A' , то $A'A'' \perp$ прямой BC в т. N и $A'N = A''N \Rightarrow \triangle A'BA''$ - pl $\Rightarrow \angle NBA'' = \angle NBA'$

$$\Rightarrow \angle NBA'' = \frac{\angle A'BA''}{2} = \frac{30^\circ}{2} = 15^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle ABC = 180^\circ - \angle ABO' - \angle NBA'' = 180^\circ - 60^\circ - 15^\circ = 105^\circ \text{ От вет: } 105^\circ$$

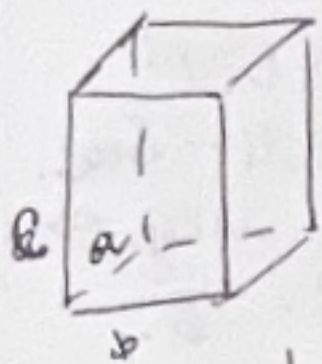


$$(180 - \alpha - \beta) + (180 - 2\alpha - 3\beta) + (116 + 3\delta) = 360 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 360 + 116 - 3\alpha + 3\delta - 4\beta = 360 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 116 = 4\beta \Rightarrow \beta = 29^\circ \quad (\angle ABC = 180 - 64 = 116^\circ)$$

Продолжим CO до пересеч. с AB в т. M . $\angle AOM = \angle CAO + \angle ACO = 64 - 3\delta$. как внеш.



$a \neq b \neq c$
 $V = abc$

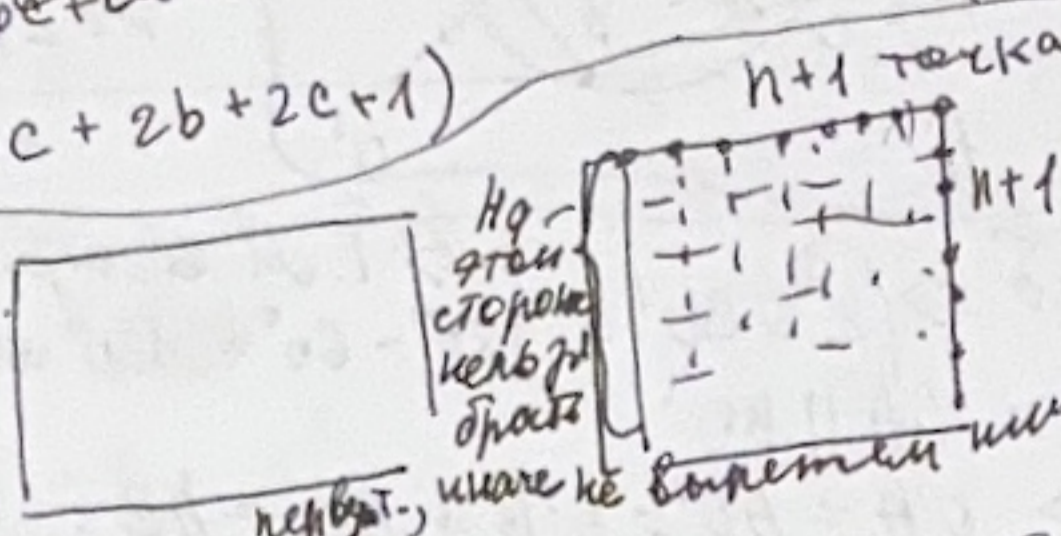
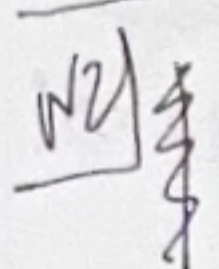
$S = 2ab + 2bc + 2ca$

$abc + 2ab + 2bc + 2ca + a + b + c = 2026$
 $abc + ab + bc + ca + a + b + c + 1 = X$

$(a+1)(b+1)(c+1) =$
 $= (ab + a + b + 1)(c+1) =$
 $= abc + ac + bc + c + ab + a + b + 1$

$a(bc + 2b + 2c + 1)$

$(b+1)(c+1) = bc + b + c + 1$



1) Не берем крайние (угловые)

$\frac{(n-1)(n-2)}{2} \cdot 4 =$
 $= \frac{n(n-1)(n-2)}{2}$

2) 1 крайняя

$n(n-1)$

3) 2 крайние

n^2

$\frac{(n-1)(n-2)}{2} = \frac{100^2 \cdot 99}{2} = 495000$

Таких 4 (4 стороны) $499950 + 20200 = 520150$

$\frac{101 \cdot 100 \cdot 99}{2}$

$\begin{array}{r} \times 9900 \\ \times 50 \\ \hline 495000 \end{array}$

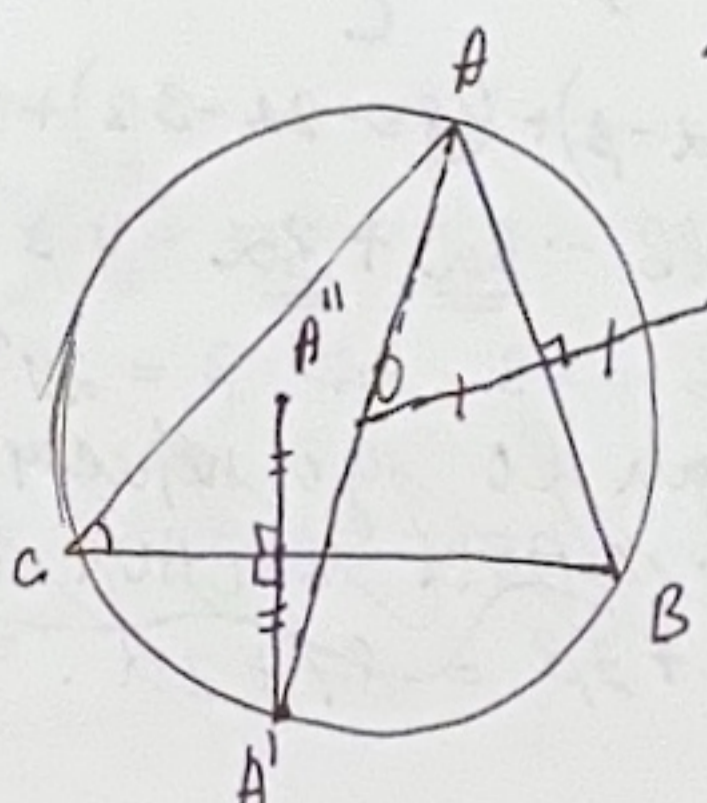
$2(n-1)n = 2 \cdot 100 \cdot 101 = 20200 = 10100$

$n = 101$

$\begin{array}{r} \times 51550 \\ \times 4 \\ \hline 206200 \end{array}$

$\begin{array}{r} 1 \\ + 495000 \\ + 20200 \\ + 101 \\ \hline 515301 \end{array}$

$\angle C = 36^\circ$



$\begin{array}{r} \times 101 \\ \times 99 \\ \hline 909 \\ 909 \\ \hline 9999 \\ \times 50 \\ \hline 499950 \end{array}$

$\begin{array}{r} 11.6 \overline{) 4} \\ 8 \overline{) 29} \\ \underline{36} \\ \underline{36} \\ \hline 0 \end{array}$

$\begin{array}{r} \times 29 \\ \times 3 \\ \hline 87 \\ 87 \\ \hline 151 \end{array}$