0 549062 250003

54-90-62-25
(129.4)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 3

Место проведения Усть-Лабинск
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Дударенко Дарьи Вадимовны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

+1 лист

Дата

«29» марта 2026 года

Подпись участника

54-90-62-25 (129.4)

Чистовик!

№1

$$\sqrt{3(1-ctg^2x)}=2\sqrt{2}\cos x$$

$$3(1-ctg^2x)=\cancel{2\sqrt{2}}\,8\cos^2x$$

$$3\left(1-\frac{\cos^2x}{\sin^2x}\right)=8\cos^2x$$

~~т~~ т.к. $\sin^2x+\cos^2x=1$, то $\sin^2x=1-\cos^2x$

$$\Rightarrow 3\left(1-\frac{\cos^2x}{1-\cos^2x}\right)=8\cos^2x$$

$\rceil$ $\cos^2x=t \Rightarrow$

$\Rightarrow t\geq 0$ и $t\leq 1$

$\Rightarrow t\in[0;1]$ т.к.

$-1\leq\cos x\leq 1$

Получаем

$$3\left(1-\frac{t}{1-t}\right)=8t \quad |\cdot(1-t)$$

$$3(1-t-t)=8t-8t^2$$

$$3-6t=8t-8t^2$$

$$8t^2-14t+3=0$$

$\cancel{D}$ $D=4\cdot 49\cancel{4}-4\cdot 24=4\cdot 25$

$\Rightarrow$ ~~D=25~~ $t=\frac{7\pm 5}{8}$; $t_1=\frac{2}{8}$ – уд.

$t_2=\frac{12}{8}$ – не уд. т.к. $\frac{12}{8}>1$

$t_1=\cos^2x=\frac{1}{4} \Rightarrow \cos x=\cancel{\pm}\frac{1}{2}$ т.к. $\cos x\geq 0$

$\Rightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$ – уд. ОДЗ.

~~$x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$~~

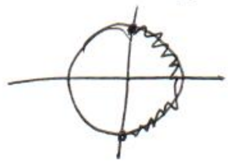
Ответ: $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$.

ОДЗ

1) $2\sqrt{2}\cos x\geq 0$

$\cos x\geq 0$

$\Rightarrow x\in\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\frac{\pi}{2}+2\pi k\right]$



2) из $ctg\,x$

~~cos~~ $\sin x\neq 0$

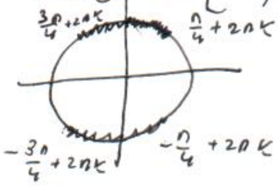
$\Rightarrow x\neq\pi k$

3) $3(1-ctg^2x)\geq 0$

$1-ctg^2x\geq 0$

$ctg^2x\leq 1$

$ctg\,x\in[-1;1]$



№2 Чистовик 2

1) Пусть B - число принадлежащее A, а β - сумма цифр числа B. тогда

$$\frac{B}{\beta} = 9 \cdot k \text{, где } k \in N \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B = 9k \cdot \beta \Rightarrow B \vdots 9.$$

2) т.к. $B \vdots 9$, то и $\beta \vdots 9$ по св-ву делимости на 9. $\Rightarrow \beta = 9n$ и $B = 9k \cdot \beta = 9k \cdot 9n = 81kn$
$\Rightarrow B \vdots 81$

Найдем все ~~число~~ трехзначные числа кратные 81:

162 (81·2) 243 (81·3) 324 (81·4) 405 (81·5) 486 (81·6) 567 (81·7) 648 (81·8) 729 (81·9) 810 (81·10) 891 (81·11) 972 (81·12) Далее числа уже четырехзначные
=> второе число - это 243, шестое - 567, а последнее - 972

$243 + 567 + 972 = 1792$

Ответ: 1792

54-90-62-25
(129.4)

Чистовик 3

№3 Найдем к-во точек в множестве F.

к-во точек равно 11·11·11 т.к. у x, y и у z по 11 значений, ведь: x, y и z ∈ ∈[-5; 5] и x, y, z ∈ Z

] мы имеем треугольник ABC, где A - вершина при прямом угле => A - $(x_0; y_0; z_0)$, B и C - вершины острых углов с координатами $(x_0; y_1; z_0)$; $(x_1; y_0; z_0)$ или $(x_0; y_0; z_1)$ т.е. B и C могут принимать одно из этих трех значений причем $B \neq C$.

Начнем строить треугольники относительно т. A, тогда к-во вариантов ее расположения равно 11^3

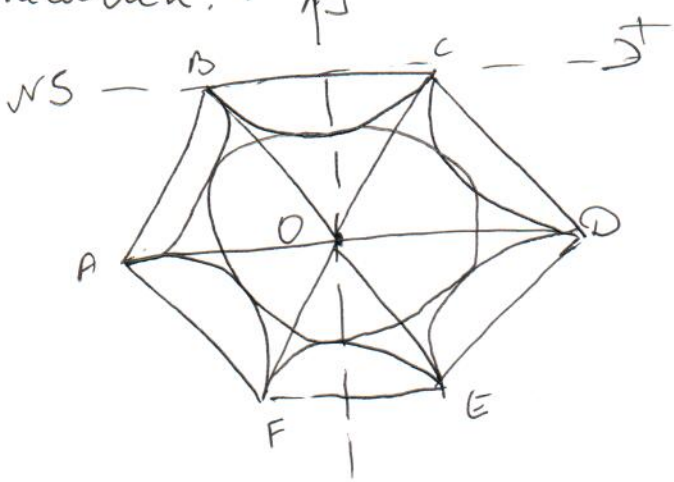
Далее найдем к-во вариантов расположения B и C - это к-во вариантов выбора одной из оставшихся коор-т умноженное на к-во пар осей.

$10 \cdot 10 \cdot 3 = 300$

$\Rightarrow$ всего $= 11^3 \cdot 300 = 399300$

Ответ: 399300

Черновик. 4



$AB = BC = CD = DE = EF = AF$ по усл.

$\Rightarrow$ шестиугольник правильный

$\exists$ начало координат находится в ~~ц~~ центре BC

$B(-0,5; 0)$ $C(0,5; 0)$ $O\left(0; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\exists$ $BO \in$ прямой y_1, а $CO \in$ прямой y

1) $y_1 = kx + b$

$$\begin{cases} 0 = -0,5k + b \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} = b \end{cases} \Rightarrow y_1 = -\sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

2) $y_2 = kx + b$

$$\begin{cases} 0 = 0,5k + b \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} = b \end{cases} \Rightarrow y_2 = \sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

~~По сравн~~ ур Найдем к-ты вершины параболы

$y = cx^2 - h$, h − расстояние от центра коор-ная, до вершины параболы

54-90-62-25
(129.1)

черновик 8

при $x>0$ a-монотонно убывает $\Rightarrow$ точно захватит от $(-\frac{1}{2}, 0)$ каким либо подинтервалом начиная с 1 $\Rightarrow$ нужно, чтобы он max точкой касался единицы

$f(x)=2x\log_{\frac{1}{a}}x$

~~$f(x)=2$~~

$f'(x)=2\log_{\frac{1}{a}}x+2x\cdot\cancel{x\ln a}\cdot\frac{1}{x\ln\frac{1}{a}}=$

$=2\log_{\frac{1}{a}}x+\frac{2}{\ln\frac{1}{a}}$

Получаем, что $f'(x)>0$ до момента когда $\cancel{2}\log_{\frac{1}{a}}x=-\cancel{2}\log_{\frac{1}{a}}e$

$\log_{\frac{1}{a}}x=\log_{\frac{1}{a}}e^{-1}\Rightarrow x=e^{-1}=\frac{1}{e}$

в этой точке $f(x)=1$

$2\cdot\frac{1}{e}\log_{\frac{1}{a}}\frac{1}{e}=1$

$\log_{\frac{1}{a}}\frac{1}{e}=\frac{e}{2}$

$\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{e}{2}}=\frac{1}{e}\Rightarrow\frac{1}{a}=e^{-\frac{2}{e}}$

$\Rightarrow a=e^{-\frac{e}{2}}$

Ответ: $a=e^{-\frac{e}{2}}$

Черновик: 7

№8

$8x^2\log_a x - \log_x a - 2x \geq 0$

ОДЗ

$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$

$\log_x a = \frac{1}{\log_a x}$

$8x^2\log_a x - \frac{1}{\log_a x} - 2x \geq 0$

87

$\frac{8x^2\log_a^2 x - 2x\log_a \cancel{x} - 1}{\log_a x} \geq 0$

$t = 2x\log_a x$

~~$8x^2\log$~~

~~8~~

$\frac{\cancel{2}t^2 - t - 1}{\log_a \cancel{x}} \geq 0$

$\frac{(t-1)(2t+1)}{\log_a x} \geq 0$

$\frac{(t-1)(t+\frac{1}{2})}{\log_a x} \geq 0 \quad \Big| \cdot \frac{1}{2x}$ т.к. $x > 0$

$\frac{(t-1)(t+\frac{1}{2})}{t} \geq 0 \Rightarrow t \in [-\frac{1}{2}; 0) \cup [1; +\infty)$

$t = 2x\log_a x = \log_a x^{2x}$

1) $a > 1$

с некоторого момента

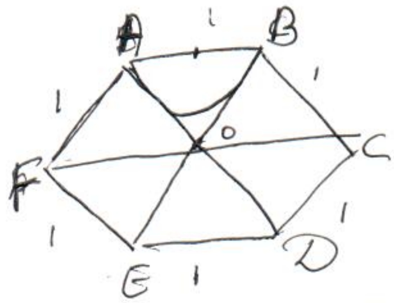
$x^{2x} \to \infty \Rightarrow$ вариант не подходит

2) $a < 1$ $\quad t \in [-\frac{1}{2}; 0)$ ~~при $a<1$~~

1) $a < 1$

$t = -2x\log_{\frac{1}{a}} x$ при $x \in (0; 1) > 0$

№5 $y = cx^2$ Черновик 6



Правильный т.к. все стороны равны 1

каждая парабола вписана в треуг.

$A(-0,5;0)$ $B(0,5;0)$ $O(0;-\frac{\sqrt{3}}{2})$

$y_1 - AO$ $y_2 - BO$

1) $y = kx + b$

$x_1 = -\frac{1}{2}$ $y_1 = 0$

$x_2 = 0$ $y_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$0 = -\frac{1}{2}k + b$ $y_1 = -\sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}}{2}$

$-\frac{\sqrt{3}}{2} = b \Rightarrow k = -\sqrt{3}$

2) $0 = \frac{1}{2}k + b$

$-\frac{\sqrt{3}}{2} = b \Rightarrow k = \sqrt{3}$ $y_2 = \sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}}{2}$

Построим ур. параболы

$y = cx^2 - h$, где y_1 – кас. в т.(A) и y_2 – кас в т.(B)

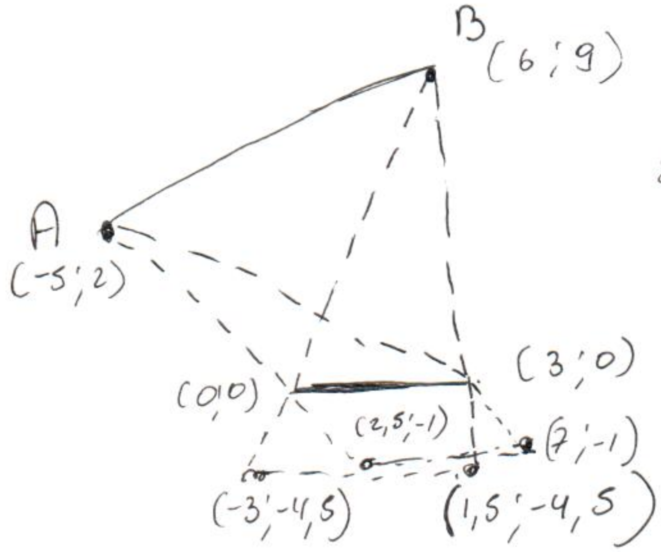
$c \cdot \frac{1}{4} - h = 0$

$2c \cdot (-\frac{1}{2}) = -\sqrt{3}$

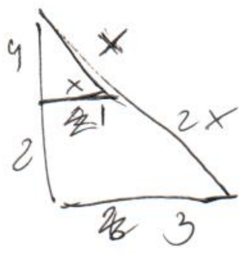
$h = \left| \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right| = \frac{\sqrt{3}}{4}$

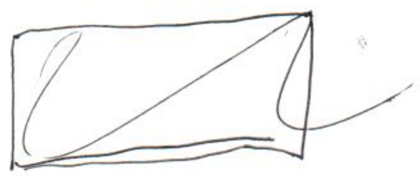
$c = \sqrt{3}$ $h = \frac{\sqrt{3}}{4}$

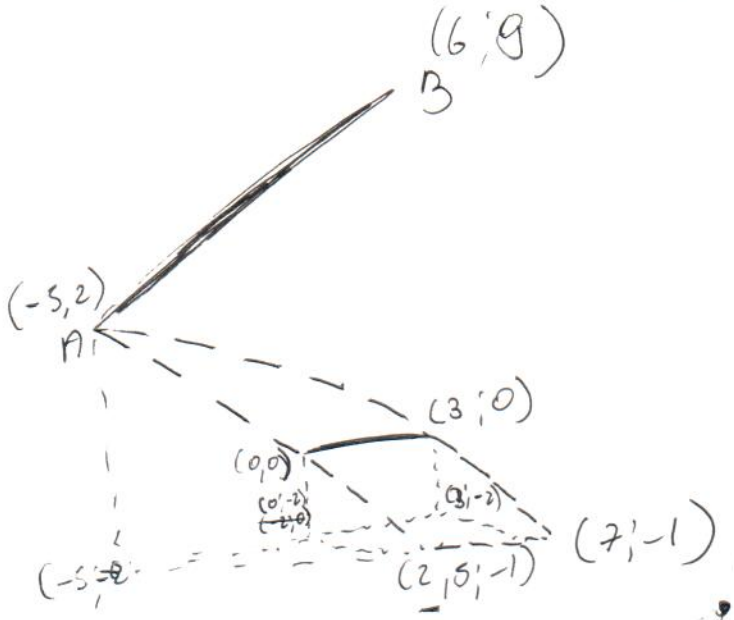
№6 Черновик 5

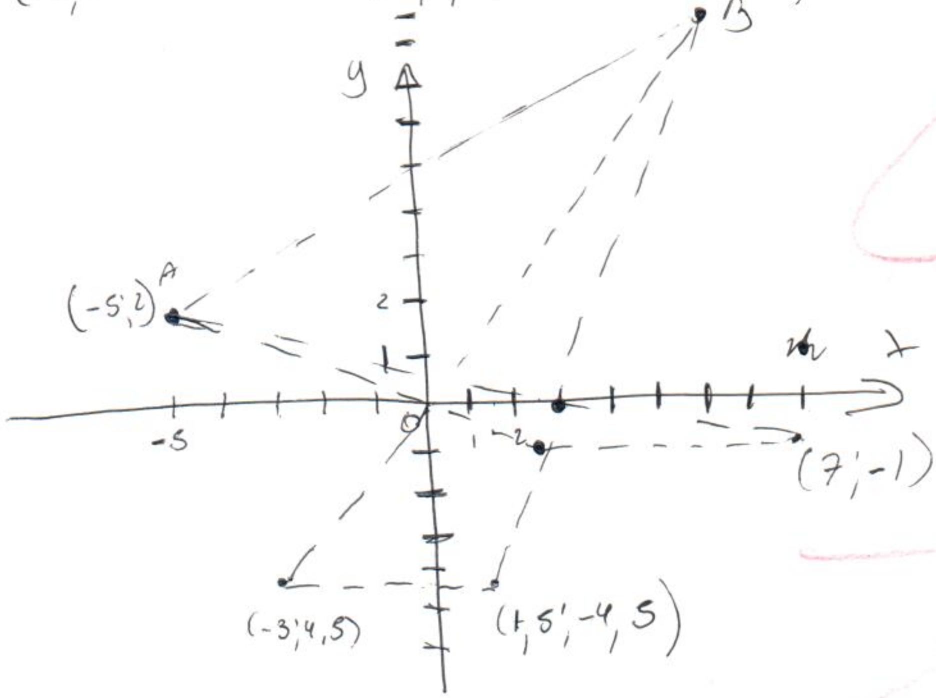


$S = 10\cdot 4,5 - \frac{1}{2}(3\cdot 4,5 + 4\cdot 1 + 3,5\cdot 5,5) = 45 - \frac{1}{2}\cdot 36,75 = 26,625$









Выбрать каким из 3-х осей будет
Черновик
4

$11\cdot11\cdot11\cdot10\cdot10\cdot3 = 399300$

$$\begin{array}{r} 121 \\ \times\ 11 \\ \hline 121 \\ 121 \\ \hline 1331 \\ \times\ 3 \\ \hline 3993 \end{array}$$

№ 4

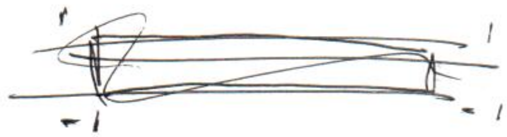
$0 \le x \le 1;\ -1 \le y \le 1$

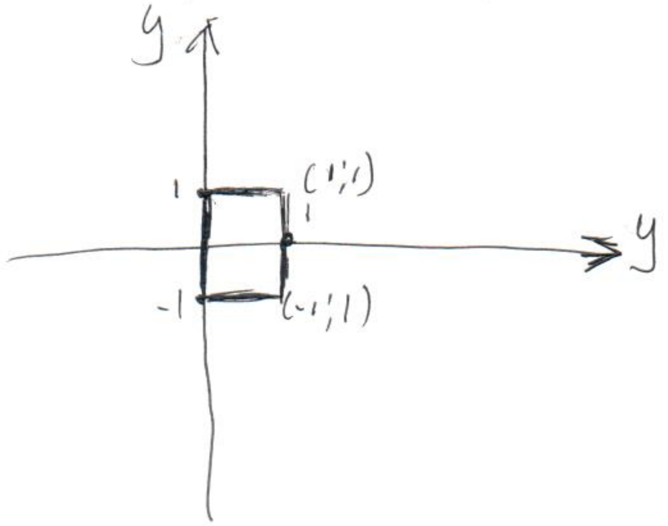
$y = \sin k\pi x$, где $k \in \{11, 15, 17\}$

1) $y = \sin 11\pi x$

2) $y = \sin 15\pi x$

3) $y = \sin 17\pi x$





(2;1)

Черновик 3

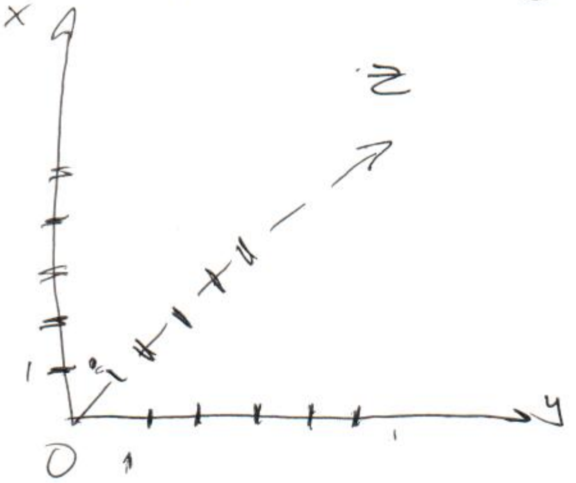
$x>0 \quad x\neq 1 \quad a>0 \quad a\neq 1$

№8 $8x^2\log_a x - \log_x a - 2x \geq 0$

$\cancel{8x^2t - 2x - t = 0}$

$8x^2\log_a x - 2x - \log_x a - \cancel{z} \geq 0$

№3



1) $5\cdot 5\cdot 3 = 75$

2) $\cancel{(4\cdot 5\cdot 3)\cdot 6} = 4\cdot 5\cdot 3\cdot 6 = 360\cdot 2^6$

3) $3\cdot 5\cdot 3\cdot 5\cdot 4$

~~4) 6·8·9·5~~

4) $5\cdot 8\cdot 8\cdot 5$

Множество F - множество $(x;y;z)$ такие что $|x,y,z|\in \mathbb{Z}$ и <5 всего с. $F = 11\cdot 11\cdot 11 = 11^3$

Зададим вершины:

A - прямой угол $(x_0;y_0;z_0)$

B - $(x_0;y_1;z_0)$ - катет вдоль y

C - $(x_1;y_0;z_0)$ - катет вдоль x

По 11 значений $x_0\ y_0\ z_0$ x_1 - 10 значений y_1 - 10 значений

№2 Черновик 2

каждое из чисел точно кратно 9.

$$\cancel{ab} \quad \frac{100a+10b+c}{a+b+c}=9k$$

$$81 \times 12: \quad 162 + 81 = 972$$

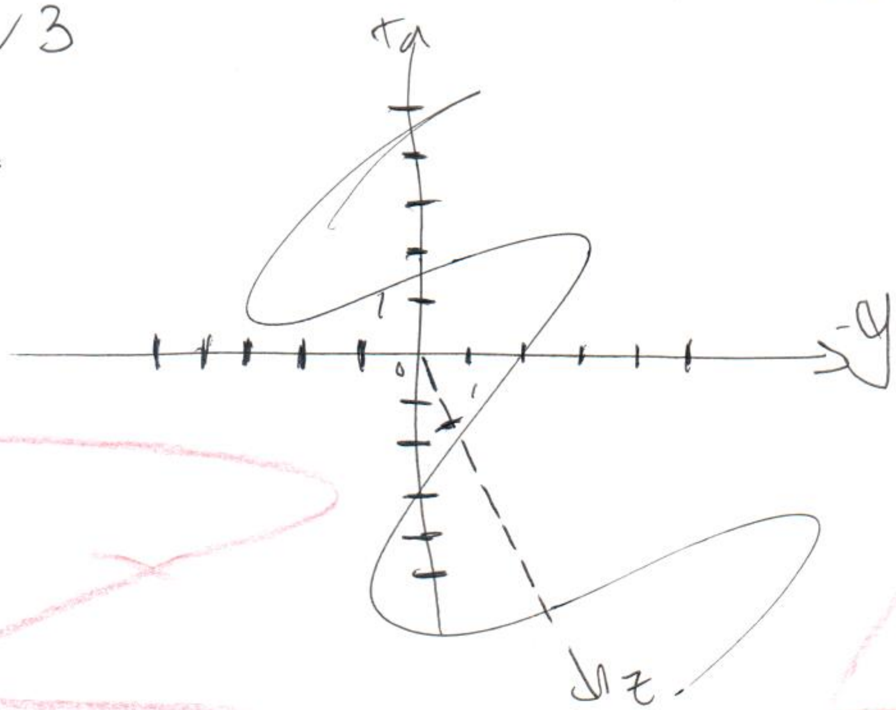
$$100a+10b+c=81k$$

162, 243, 324, 405, ~~3~~486, 567, 648, 729, 810, ~~9~~891, 972

$$243+567+972=81\cdot3+81\cdot7+81\cdot12=81\cdot10+81\cdot12=81\cdot22=891\cdot2=1782$$

Ответ: 1782

№3



Черновик!

$$\sqrt{3(1-ctg^2x)} = 2\sqrt{2}\cos x$$

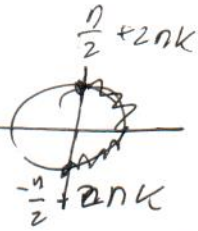
$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1+tg^2 x$$

$$\sin^2 x \quad 1+\cancel{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}\ \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{1}{\sin^2 x}.$$

ОДЗ

$\cos x \geq 0 \Rightarrow x \in$



$$3(1-ctg^2x) = 8\cos^2 x$$

$$3\left(1-\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right) = 8\cos^2 x$$

$$3\left(1-\frac{\cos^2 x}{1-\cos^2 x}\right) = 8\cos^2 x$$

$$3\left(1-\frac{t}{1-t}\right) = 8t \qquad 1\cdot(1-t) \Rightarrow t \neq 1$$

$$\cos^2 x \neq 1$$

$$x \neq \pi k$$

$$3(\cancel{1-t-t}) = 8t-8t^2$$
$1-t-t$

$$3-6t = 8t-8t^2$$

$$8t^2-14t+3=0$$

$$D = \cancel{196}\ 4\cdot 49 - 4\cdot 24 = 4\cdot 25$$

$$t = \frac{7\pm 5}{\cancel{16}\ 8} = \frac{12}{8} \qquad = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \qquad x = \pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$$

+ ОДЗ для ctg!!! $\cos x = -\frac{1}{2}$ $x = -$

54-90-62-25 (129.4)

Чистовик 5

при этом $y' = k \Rightarrow$ (геом. смысл производной)

$$\begin{cases} c \cdot \frac{1}{4} - h = 0 \\ 2 \cdot c \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow c = \sqrt{3} \text{ и } h = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

~~Но~~ $r = H - h$, где H - высота $\triangle BCO$

$$\Rightarrow r = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{4}$

№8

$$8x^2 \log_a x - \log_x a - 2x \geq 0$$

ОДЗ

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$$

$$\log_a x = \frac{1}{\log_x a}$$

$$\Rightarrow 8x^2 \log_a x - (\log_a x)^{-1} - 2x \geq 0$$

$$\frac{8x^2 \log_a^2 x - 2x \log_a x - 1}{\log_a x} \geq 0$$

$x > 0 \Rightarrow$ если ~~умножить~~ разделить все на $2x$ знак не изменится

$$\frac{8x^2 \log_a^2 x - 2 \log_a x - 1}{2x \log_a x} \geq 0$$

$\exists\ 2x^2 \log_a x = t$

Тогда: Чистовик: 6

$\cancel{(t-1)(t}$

$$\frac{4t^2-t-1}{t}\geq 0$$

$$\frac{(2t+1)(t-1)}{t}\geq 0$$

$\Rightarrow t\in[-\frac{1}{2};0)\cup[1;+\infty)$

1) $a>0$ $t=2x\log_a x=\log_a x^{2x}$

при $a>0$ с некоторого момента ~~$x\log_a x^{2x}$ стрем~~ x^{2x} стремиться к ∞ ⇒ этот вариант не подходит.

2) $a<1$ $t\in[-\frac{1}{2};0)$

$t=-2x\log_{\frac{1}{a}}x$, где $\frac{1}{a}>1$ и $x\in(0;1]$

1. при $x>1$ а монотонно убывает ⇒ точно захватит $(-\frac{1}{2};0)$ каким либо полуинтервалом ⇒ нужно чтобы $max=1$

$f(x)=2x\log_{\frac{1}{a}}x$

$f'(x)=2\log_{\frac{1}{a}}x+2x\cdot\frac{1}{x\ln\frac{1}{a}}=2\log_{\frac{1}{a}}x+\frac{2}{\ln\frac{1}{a}}$

$\Rightarrow f'(x)>0$ до момента, когда

$2\log_{\frac{1}{a}}x=-\log_{\frac{1}{a}}e$

Чистовик

в этой точке $f(x) = 1$

$$\Rightarrow 2 \cdot \frac{1}{e} \log_{\frac{1}{a}} \frac{1}{e} = 1$$

$$\log_{\frac{1}{a}} \frac{1}{e} = \frac{e}{2}$$

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{e}{2}} = \frac{1}{e} \Rightarrow \frac{1}{a} = e^{-\frac{2}{e}}$$

$$\Rightarrow a = e^{-\frac{e}{2}}$$

Ответ: $a = e^{-\frac{e}{2}}$

№6