0 725601 020003

72-56-01-02
(123.1)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 10 класс

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по Математике
профиль олимпиады

Еговой Марии Николаевной
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

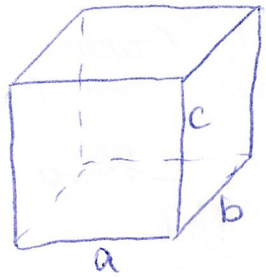
Дата

«29» Марта 2026 года

Подпись участника

Чистовик

№1



$a, b, c \in \mathbb{N}$

$\underbrace{abc+2ab+2ac+2bc+4a+4b+4c}_{(a+2)(b+2)(c+2)-8}=2026$

$\underbrace{(a+2)}_{\in \mathbb{N}}\underbrace{(b+2)}_{\in \mathbb{N}}\underbrace{(c+2)}_{\in \mathbb{N}}=2026+8=2034$

без потери общ.: $a<b<c$

$a=3-2=1$

$b=6-2=4$

$c=113-2=111$

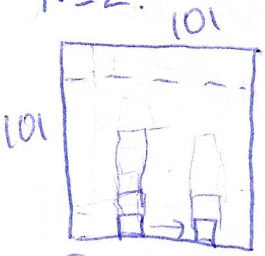
2034	2
1017	3
339	3
113	

, 113 — простое $a+2\neq 2$, $c+2\neq 2$, $b+2\neq$, т.к. $a\in$, $c\in$, $b\in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ для минимального abc одна из скобок ровна 113, другая 6, другая 3

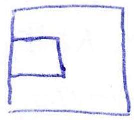
$\Rightarrow V=abc=1\cdot 4\cdot 111=444$

Ответ: 444

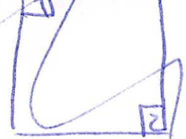
№2.



Чтобы разрез подходил под условия, мы можем резать только по краям (полностью) и в середине примерно так:



~~Для краев: мы выбираем 1 вершину начало и 2-конец прямоуголь-ника — $C^1_{101}\cdot C^1_{100}$, это для прямоугольника $1\cdot n$ Прямоугольник мы задаём двумя вершинами 1 вершина доп~~



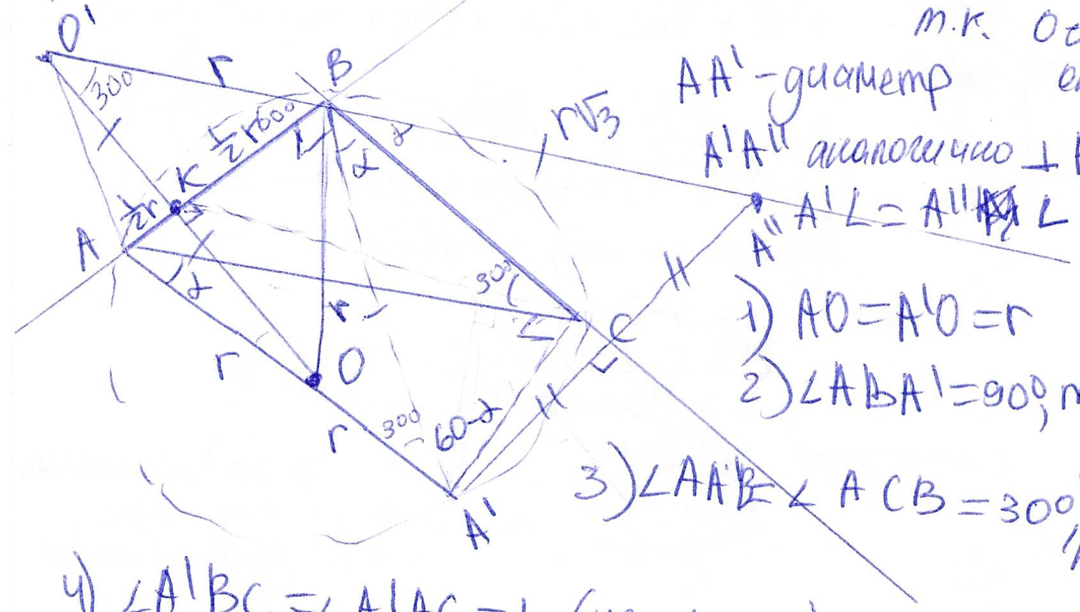
Для краёв:

Мы выбираем 1 вершину начало и 2 — конец прямоугольника — $101\cdot 100$ вариантов, это для прям-ника $1\cdot n$, таким образом для нижнего края таких „увеличенных" прямоугольников $101\cdot 100\cdot 100$ (не можем брать длину 101) + для верхнего края ещё $101\cdot 100^2$ прямоугольник, и для боковых, итого $101\cdot 100^2\cdot 4$ (как раз )

Итого — $101\cdot 100^2\cdot 4=40400$ Ответ: 40400

Чистовик

№3



$OO' \perp AB$ и $O'K = OK$, т.к. O симм. O' отн. AB

AA' - диаметр

$A'A''$ аналогично $\perp BC$ и $A'L = A''L$

1) $AO = A'O = r$

2) $\angle ABA' = 90°$, т.к. оп. на диаметр

3) $\angle AA'B = \angle ACB = 30°$, т.к. оп на 1 дугу

4) $\angle A'BC = \angle A'AC = \alpha$ (на 1 дугу)

5) $\angle ACA' = 90°$ (оп. на диаметр)

6) $OK \perp AB$, $A'B \perp AB \Rightarrow OK \parallel A'B$, $AO = OA'$, по т. Фалеса $AK = KB$, т.к. $\angle AA'B = 30° \Rightarrow AB = \frac{1}{2}AA' = r \Rightarrow$
$\Rightarrow AK = KB = \frac{1}{2}r$

7) $\angle BA'C = 180° - \alpha - 120° = 60° - \alpha \Rightarrow \angle AA'C = 90 - \alpha$
(из $\Delta A'BC$)

по т. ~~кос~~ синусов в $\Delta AA'C$:

$$\frac{AC}{\sin(90-\alpha)} = 2r \Rightarrow AC = \frac{2r}{\sin(90-\alpha)} = \frac{2r}{\cos\alpha}$$

8) по т. синусов в ΔABC:

$$\frac{AC}{\sin(90+\alpha)} = 2r$$

$$\frac{2r}{\cos^2\alpha} = 2r \Rightarrow \cos^2\alpha = 1$$

7) по т. Фалеса $OK = KO'$, $A'C = CA'' \Rightarrow CK \parallel O'A'' \parallel AA'$,
в $O'BOA$: $AK = KB$, $O'K = OK \Rightarrow AO'BO$ - парал-м $\Rightarrow O'B = r$,
$\Delta A'BA''$ - р/б, т.к. BC - меди высота $\Rightarrow A'B = BA'' = r\sqrt{3}$

~~8) $AC = 2AB$, т.к. $\angle C = 30 \Rightarrow AC = r$, по т. синусов в ΔABC:~~
~~$\frac{r}{\sin B} = 2r \Rightarrow \sin B = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle B = 150°$, т.к. $\angle B$ - тупой Ответ: 150°~~

№4 Чистовик

$$\frac{a^{2x} - 3a^{x+1} + 2a^2}{\log_2 a} \geq 0 \qquad \log_2 a = t \Rightarrow$$

$\Rightarrow 2^t = a$

$a > 0$

$$\frac{2^{2tx} - 3^{t(x+1)} + 2\cdot 2^{2t}}{t} \geq 0$$

если $t > 0$:

$2^{tx} - 3^{t(x+1)} + 2\cdot 2^{2t} \geq 0 \qquad t > 0 \Rightarrow 2^t > 0$

$\cancel{2^t}\,2^{tx} - 3\cdot 2^{t(x+1)} + 2\cdot 2^{2t} \geq 0 \qquad$ пусть $2^x - y$

~~$y^t - 6\cdot 2y^t + 2\cdot 2^{2t} \geq 0$~~

$\cancel{y^t - 3y^t}\cdot(2^x)^t - 3\cdot(2^x\cdot 2)^t + 2\cdot 4^t \geq 0$

$y^t - 3\cdot(\cancel{2})y^t\cdot 2^t + 2\cdot 4^t \geq 0$

№3.

8) BC – бисс в $A'BA'' \Rightarrow \angle A'BA'' = 2\alpha$

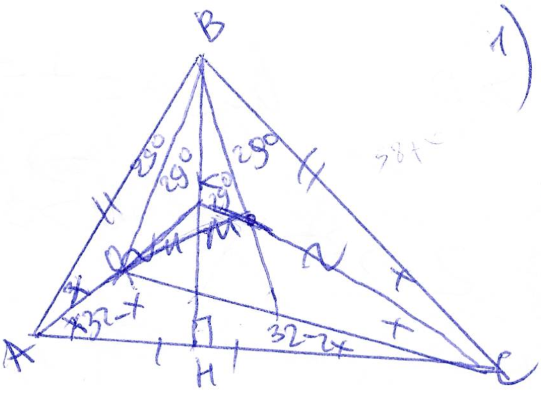
9) $O'KB = \frac{1}{2}r$, $O'B = r \Rightarrow \angle KO'B = 30$, $\Rightarrow \angle O'BK = 60^\circ$

10) $60^\circ + 90^\circ + 2\alpha = 180^\circ$ (O', B, A'' – на 1 прямой) $\Rightarrow$

$\Rightarrow 2\alpha = 30^\circ \Rightarrow \alpha = 15^\circ \Rightarrow \angle B = 90^\circ + 15^\circ = 105^\circ$

Ответ: 105°

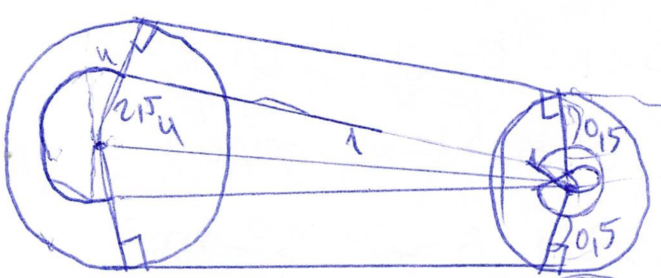
№6. Чистовик



1) Можно разделить углы как на рисунке, тогда BH – мед, бисс, высота в р/б $\triangle ABC$ (углы при осн. равны)

2) $AK \cap KC = K$, $K \in BH$, т.к. $\triangle AKC$ – р/б, KH – бисс и высота ($\angle A = \angle C = 32^\circ - x$)

№7.

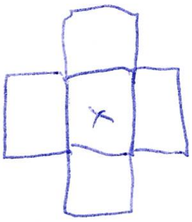


У маленькой окр. будет петля, т.к. $r < 1,5$, но можно симметрично отразить

Нам нужно найти длину внутренней фигуры

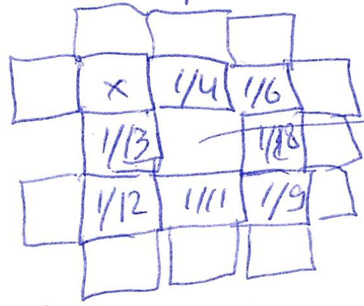
прямые участки можно найти из прямоугольных $\triangle$, а длины «окружностей» из подобия радиусов

№8. Чистовик



Когда он покрасил первый квадрат у него на выбор 4 клетки, затем 6, 8 и т.д.

в итоге:



→ 1/12 итого вероятность

$\frac{1}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 9\cdot 11\cdot 12\cdot 13\cdot 12}$

Ответ: $\frac{1}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 9\cdot 11\cdot 12\cdot 13\cdot 12}$

№5

$x = \frac{\pi}{2} - (y+z) \Rightarrow tg x \cdot tg(y+z) = 1$

$tg x \cdot \frac{tg y + tg z}{1 - tg y \cdot tg z} = 1$

$tg(2x+2y+2z) = 0 \Rightarrow$ если упростить через формулу $tg((2y+2z)+2x)$,

то

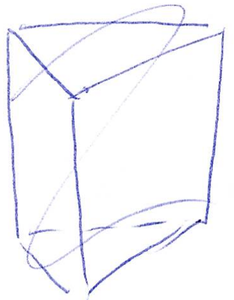
$tg 2x + tg 2z + tg 2y = tg 2x \cdot tg 2z \cdot tg 2y$

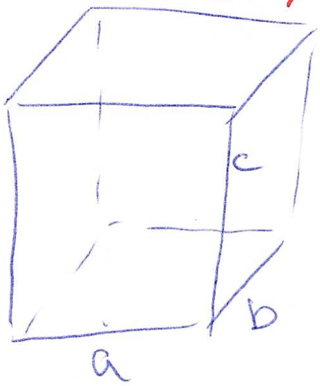
$\Rightarrow$ симметричное уравнение, самая выгодная ситуация, когда $x = y = z = \frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow tg x \, tg y \, tg z = \cancel{\sqrt{3}\sqrt{3}\sqrt{3}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3$

Ответ: $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3$

Черновик





$a \cdot b \cdot c = V^3$

$2a \cdot b + 2cb + 2ac =$
$= S$

$4a + 4c + 4b = L$

$abc + 2ab + 2cb + 2ac + 4a + 4c + 4b = 2026$

$2a(1+b) + 2c(1+b) + 2b($

$abc = 2026 - (2ab + 2cb + 2ac + 4a + 4c + 4b)$

$abc = 2026 - (\underbrace{(a+b+c)^3}_{a^3+b^3+c^3} - a^3 - b^3 - c^3 + 4a + 4c + 4b)$

$abc = 2026 - ((a+b+c)^3 - a(a^2-4) - b(b^2-4) -$
$-c(c^2-4))$

1 2 3

$abc = 2026 - ((a+b+c)^3 - a(a-2)(a+2) - b(b-2)(b+2) -$
$-c(c-2)(c+2)$

$(a+2)(b+2)(c+2) =$

$(ab + 2a + 2b + 4)(c+2) =$ 444

$= abc + 2ab + 2ac + 4a + 2bc + 4b + 4c + 8 =$

$(a+2)(b+2)(c+2)$

$(ab + 2a + 2b + 4)(c+2) = abc + 2ab + 2ac + 4a +$
$+ 2bc + 4b + 4c + 8$

$(a+2)(b+2)(c+2) - 8 = 2026$

113 6 3

$(a+2)(b+2)(c+2) = \cancel{2018}$ 2034

1 2

113 | 13, 104 | 8

1009 | 13, 91, 99 | 87

2026 − 8 = 2018 56

2026 + 8 = 2034

2034 | 2
1017 | 3
339 | 3
113 |

$b = 4$
$a = 111$
$c = 1$

$2034 = 2 \cdot 3 \cdot 3$

$2034 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 113$

2008

113 | 7, 7, 4 | 1

113 | 17, 3 | 9

113 | 19, 3 | 7

1009

1009 | 11, 99, 19 | 9

113 | 29

1009 | 19, 95, 59 | 5

10009

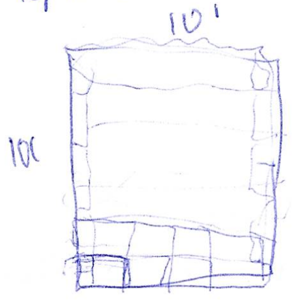
1009 | 17, 85, 159 | 59

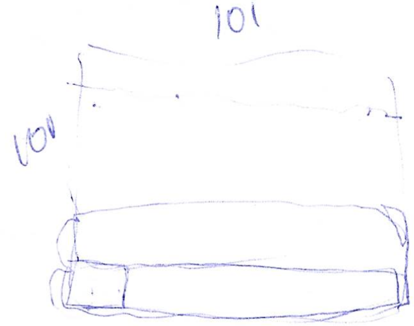
1009 | 7, 7, 30, 28, 29 | 14

159

15 × 3 = 77

Черновик





1 · n — 101 способ · 4

2 · n

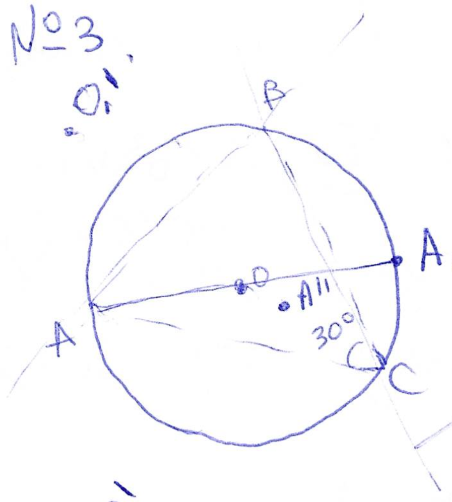
горизонтально: $C^1_{101} \cdot C^1_{100} \cdot 100 \cdot 2$

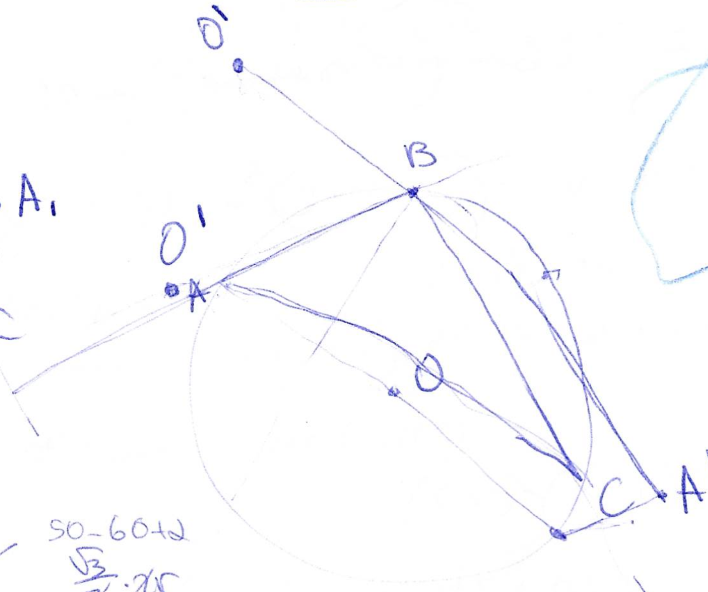
$\frac{\cancel{101!}\,101}{\cancel{100!}} \cdot \frac{\cancel{100!}\,100}{\cancel{99!}} \cdot 100 \cdot 2 =$

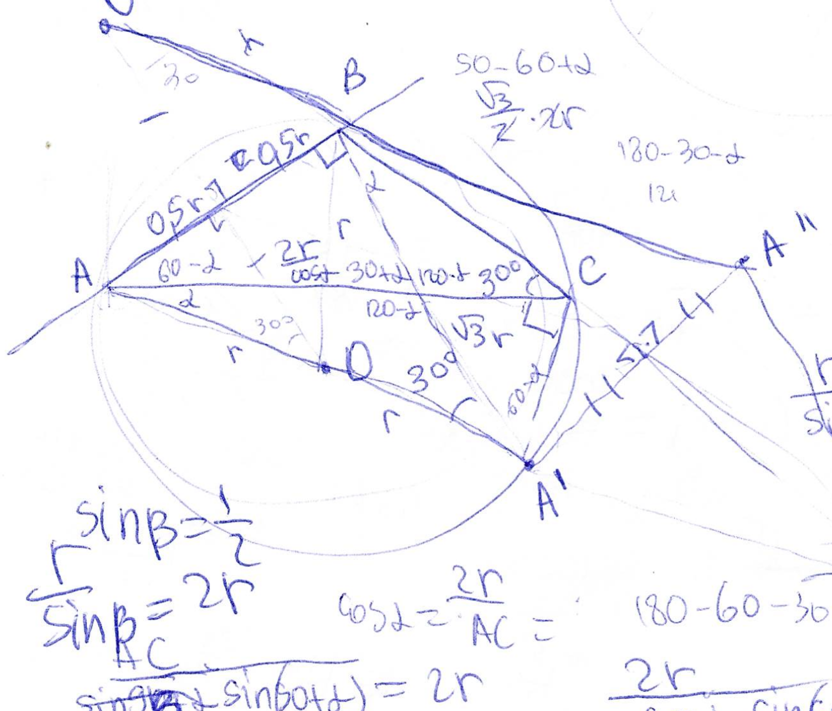
$= 101 \cdot 10000 \cdot 2 =$

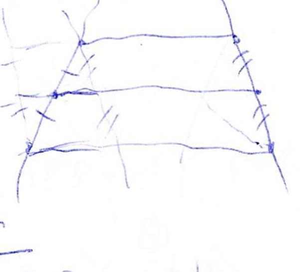
$= 2020000$

№3









$B = 90 + 15° = 105°$

$\sin\beta = \frac{1}{2}$

$\frac{r}{\sin\beta} = 2r$

$\frac{AC}{\sin\ldots \cdot \sin(60+\alpha)} = 2r$

$\cos\alpha = \frac{2r}{AC} =$

$180 - 60 - 30 + \alpha$

$\frac{2r}{\cos\alpha \cdot \sin(60+\alpha)} = 2r$

$\frac{2r}{\sin\alpha\cos\alpha} = 2r$

$\sin\alpha\cos\alpha = 1$

$\sin 2\alpha = \frac{1}{2}$

$2\alpha = 30°$

$\alpha = 15°$

72-56-01-02 (123.1)

Черновик.

$$\frac{a^{2x}-3a^{x+1}+2a^2}{\log_2 a}\geq 0 \qquad a>0$$

$$\frac{a^2(a^x - 3a^{x-1}+2)}{\log_2 a}\geq 0$$

$$\frac{2^t(2^{2x}-3\cdot 2^{x+1}+8)}{+}\geq 0$$

$$\frac{2^x - 3\cdot 2^{x+1}+8}{+}\geq 0$$

$a\neq 0$

$$\frac{a^x - 3a^{x-1}+2}{\log_2 a}\geq 0 \qquad a>0$$

либо 0 либо отриц.

отрицат

А если $\log_2 a$ ~~положительный~~

$a^x+3a^{x-1}+2=0$ $\qquad t>0:\ 2^{2x}-3\cdot 2^{x+1}+8>0$

$a^x+3a^{x-1}=-2$ $\qquad 2^{2x-1}-3\cdot 2^x+4>0$

$a^{x-1}(a-3)=-2$ $\Rightarrow$ нет решени

$a=1$

$1-2=$ $\qquad 2^x\cdot 2^x-3\cdot 2\cdot 2^x+8>0$

$\log_2 a$ — положительный

$a^x+3a^{x-1}+2>0$ — удовл при любых x $\qquad 2^x(2^x-3\cdot 2)+8>0$

$2^x(2^x-6)+8>0$

$\log_2 a$ — отриц:

$a^x+3a^{x-1}+2<0$ $\qquad 4^{x+}-3\cdot 2^{t(x+1)}+$

$a^{x-1}(3-a)=2$

$\log_2 a=t$

$2^t=a$ $\qquad \log_2 y=x \quad 2^x=y$

$$\frac{2^{2x+}-3a2^{t(x+1)}+2\cdot 2^{2t}}{t}\geq 0$$

$$\frac{2^{2x+}-3\cdot 2^{t(x+1)}+2\cdot 2^{2t}}{+}\geq 0$$

$$\frac{2^{2x+t}-3\cdot 2^{t(x+1)}+2\cdot 2^{2t}}{t}\geq 0$$

$$\frac{2^t(2^{2x}-3\cdot 2^{x+1}+2\cdot 2^2)}{t}\geq 0$$

$(y-2)(y-4)$

$y(y-6)+8>0$

$y^2-6y+8>0$

$y\in(-\infty;2]\cup[8;+\infty)$

$y\in[2]\cup[8;+\infty)$

$t<0:$

$2^{2x}-3\cdot 2^{x+1}+8\leq 0$ $\quad y\in[2;8]$

$2^x(2^x-y$

Черновик

$\operatorname{tg}x \operatorname{tg}y \operatorname{tg}z$

$\sin \cos x$

$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}y}{1 - \operatorname{tg}x \cdot \operatorname{tg}y}$

$\frac{\sin x \cancel{\cos} \sin y \sin z}{\cos x \cos y \cos z} = \operatorname{tg}(x+y+z) = \frac{\operatorname{tg}(x+y) + \operatorname{tg}z}{1 - \operatorname{tg}(x+y) \cdot \operatorname{tg}z}$

$= \frac{\frac{\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}y}{1 - \operatorname{tg}x \cdot \operatorname{tg}y} + \operatorname{tg}z}{1 - \frac{\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}y}{1 - \operatorname{tg}x \operatorname{tg}y} \cdot \operatorname{tg}z} =$

$= \frac{\frac{\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}y + \operatorname{tg}z - \operatorname{tg}z \cdot \operatorname{tg}x \cdot \operatorname{tg}y}{1 - \operatorname{tg}x \operatorname{tg}y}}{\frac{1 - \operatorname{tg}x \operatorname{tg}y - \operatorname{tg}x \operatorname{tg}z - \operatorname{tg}y \cdot \operatorname{tg}z}{1 - \operatorname{tg}x \operatorname{tg}y}} =$

$= \frac{\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}y + \operatorname{tg}z - \operatorname{tg}z \operatorname{tg}x \operatorname{tg}y}{1 - \frac{2\operatorname{tg}x \operatorname{tg}y + 2\operatorname{tg}x \operatorname{tg}z + 2\operatorname{tg}y \operatorname{tg}z}{2}} =$

$(x+y)(x+z)(y+z) =$

$= (x^2 + xz + yz + yx)(y+z) =$ $x, \frac{\pi}{2} - x$

$= \operatorname{tg} + \operatorname{tg}y + \operatorname{tg}z$ $x = \frac{\pi}{2} - (y+z)$ $\operatorname{tg}y \cdot \operatorname{tg}z \operatorname{tg}x$

$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\operatorname{tg}y + \operatorname{tg}z}{1 - \operatorname{tg}y \cdot \operatorname{tg}z} = \frac{1}{\operatorname{tg}x} = 1$

$\cancel{\operatorname{tg}+1}$ $\left(\frac{1 - \operatorname{tg}y \cdot \operatorname{tg}z}{\operatorname{tg}y + \operatorname{tg}z}\right) \cdot \operatorname{tg}y \operatorname{tg}z$

$\operatorname{tg}y \cdot \operatorname{tg}x + \operatorname{tg}z \cdot \operatorname{tg}x = 1 - \operatorname{tg}y \cdot \operatorname{tg}z$

$\operatorname{tg}y \cdot \operatorname{tg}x + \operatorname{tg}z \cdot \operatorname{tg}x + \operatorname{tg}x \cdot \operatorname{tg}z = 1$

$(\operatorname{tg}y + \operatorname{tg}z + \operatorname{tg}x)^3 - \operatorname{tg}^2 y - \ldots = 1$

Черновик

$$\frac{\operatorname{tg} y \operatorname{tg} z - \operatorname{tg}^2 y \operatorname{tg}^2 z}{\operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z}$$

$\operatorname{tg} \pi$

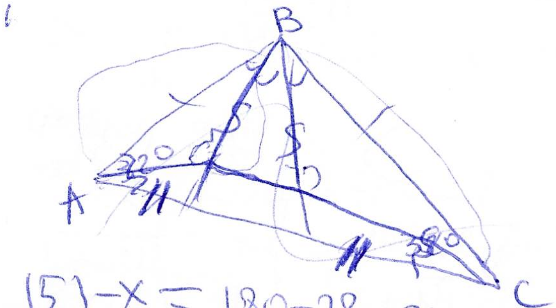
$2x + 2y + 2z = \pi$

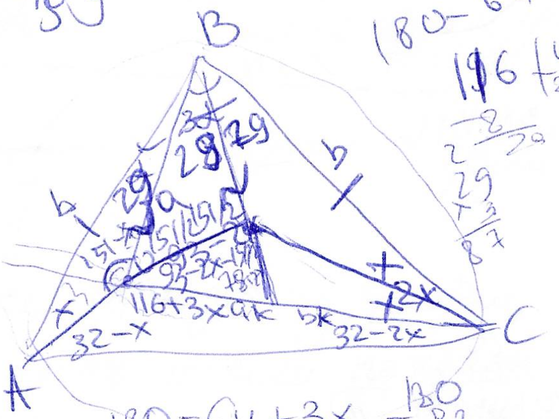
$\operatorname{tg}(2x+2y+2z) = 0$

$\operatorname{tg}(2x+2y) + \operatorname{tg} 2z$

$\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 2z + \operatorname{tg} 2y = \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg} 2z \cdot \operatorname{tg} 2y = 0$

$$\frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x} + \frac{2\operatorname{tg} z}{1-\operatorname{tg}^2 z} + \frac{2\operatorname{tg} y}{1-\operatorname{tg}^2 y}$$





$180-64$

$196\frac{4}{29}$

$151-x = 180-78-2x$

$151-x = 102-2x$

$x =$

$180-64+3x$

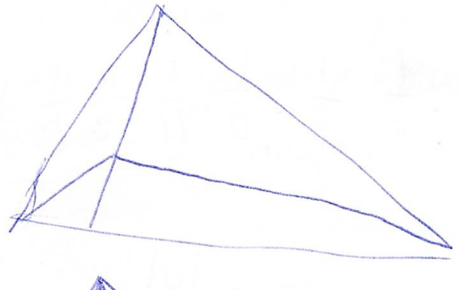
$\frac{151-x}{x}$? $180-29$ $\quad 78+2x$

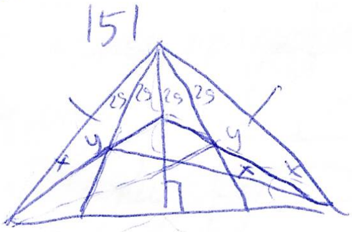
$180-87=93$

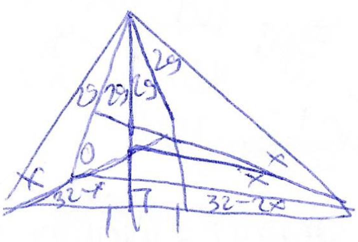
$180-29 = 151$

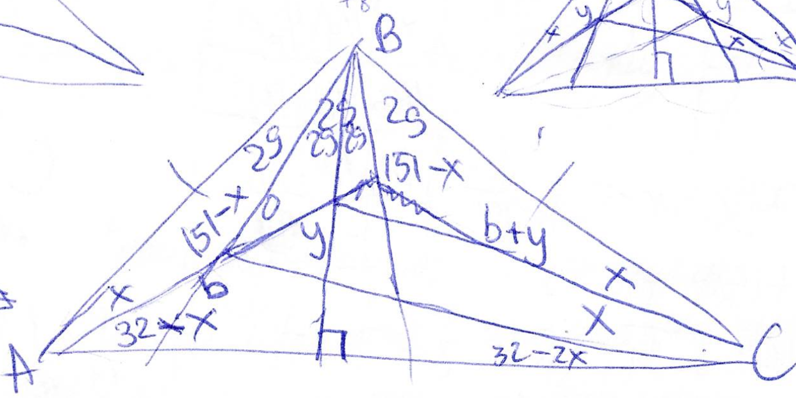
$180-29-93+2x$

$151-93=78$



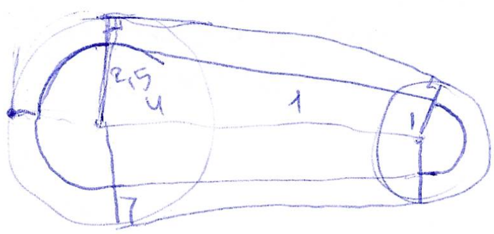


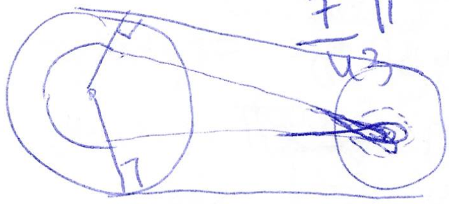




Черновик.

$113 \,|\, 7$, $113 \,|\, 13$





$13 \times 8 = 104$

$17 \times 6 = 102$

$\frac{4}{1} = \frac{L+x}{x}$

$4x = L + x$

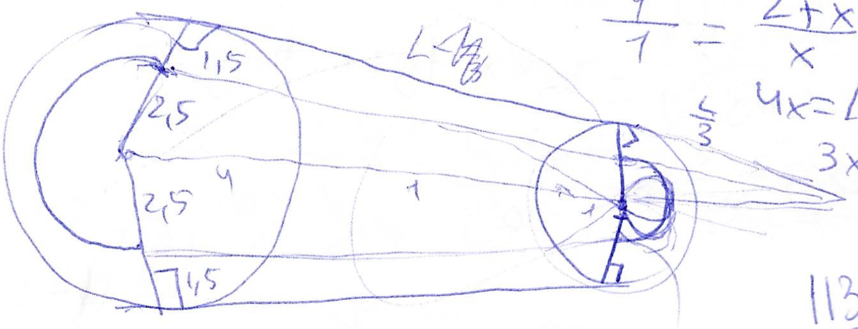
$3x = L$

$x = \frac{L}{3}$

$19 \times 5 = 95$

$19 \times 6 = 114$

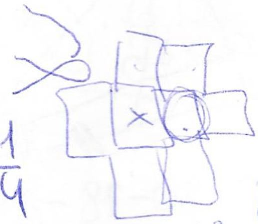
$95 + 19$



$113 \,|\, 23$, $-115 \,|\, 5$

$113 \,|\, 29$, $-116 \,|\, 4$

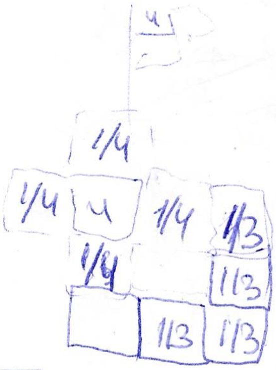
$113 \,|\, 31$, $93 \,|\, 3$

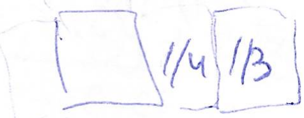


$\frac{1}{4}$

$113 \,|\, 37$, $111 \,|\, 3$

$113 \,|\, 39$, $78 \,|\, 2$





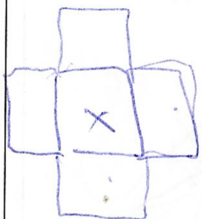
$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{12}$

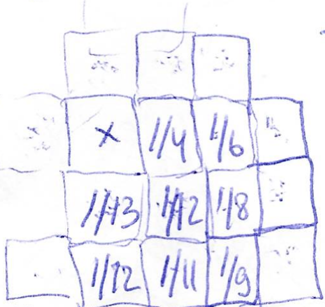
$C_{101 \cdot 101}$

$C_{100 \cdot 4}$ $101 + 10$

$101 \cdot 4 - 4$

$C_{101 \cdot 101} - 100 \cdot 4$





$2\alpha + 90^\circ - 160^\circ = 180^\circ$

$2\alpha + 150 = 180^\circ$

$\alpha = 15^\circ$

$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{12}$ $100 \cdot 4 \cdot (101 \cdot 101 - 1)$

1 $\frac{1}{4}$

2

3

$101 \times 101 = 10201$

$400 \cdot 101^2 - 400$

$10200 \cdot 400 =$

$= 408000$