62-50-37-13
(123.6)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 10 ~~кл~~ класса

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Енина Никиты Николаевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

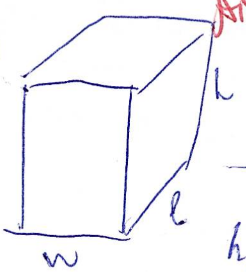
Дата
«29» марта 2026 года

Подпись участника

50 (Пятьдесят)

Чистовик

№1



Известно: $hlw + 2hl + 2hw + 2lw + 4h + 4l + 4w = 2026$

Найти: $\min(hlw) = \min(V)$

Значение hlw симметрично относительно h, l, w, поэтому, не умаляя общности, $h \le l \le w$

$$\underbrace{hlw + 2hl + 2hw + 2lw + 4h + 4l + 4w + 8} - 8 = 2026$$

$$(h+2)(l+2)(w+2) = 2034 = 2 \cdot 3^2 \cdot 113$$

$h, l, w \in \mathbb{N} \Rightarrow h+2, l+2, w+2 \in \mathbb{N}$

$$\boxed{h+2,\ l+2,\ w+2 \ge 3}$$

Рассмотрим варианты $h+2$:

$h+2 = 2034$: $h > l$, противоречие.

$h+2 = 1017$: $h > l$, противоречие.

$h+2 = 678 = 113 \cdot 2 \cdot 3$: $h > l$ противоречие.

$h+2 = 226 = 113 \cdot 2$: $(l+2)(w+2) = 9 \Rightarrow h > l$ противоречие.

$h+2 = 339 = 113 \cdot 3$: $(l+2)(w+2) = 6 \Rightarrow h > l$, противоречие.

$h+2 = 113$: $(l+2)(w+2) = 18 \Rightarrow h > l$, противоречие.

$h+2 \not\vdots 113$

$h+2 = 18$: $(l+2)(w+2) = 113 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} l+2 = 1 \\ w+2 = 1 \end{array}\right.$ противоречие ($l, w \in \mathbb{N}$)

$h+2 = 9$: $(l+2)(w+2) = 113 \cdot 2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} l+2 \le 2 \\ w+2 \le 2 \end{array}\right.$ противоречие

$h+2 = 6$: $(l+2)(w+2) = 113 \cdot 3 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} l+2 \le 3 \\ w+2 \le 3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} l \le 1 < h = 4 \\ w \le 1 < h = 4 \end{array}\right.$ противоречие

$h+2 = 3$: $(l+2)(w+2) = 113 \cdot 3 \cdot 2$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} h+2 = 3 \\ l+2 = 6 \\ w+2 = 113 \end{cases} \Rightarrow h = 1, l = 4, w = 111, \ V = 444 \\ \begin{cases} h+2 = 3 \\ l+2 = 3 \\ w+2 = 226 \end{cases} \Rightarrow h = 1, l = 1, w = 224, \ V = 224 \end{array}\right.$

Получилось 2 значения V: $V = 444$; $V = 224$. $224 < 444$

Ответ: ~~минимальный объем~~ 224

№2 Чтобы после выреза у квадрата не Чистовик было дырки, надо, чтобы вырезанный прямоугольник касался стороны (хотя бы одной) квадрата.

Чтобы после выреза квадрат не распался на части, надо, чтобы вырезанный прямоугольник, в случае, если он касается двух противоположных сторон квадрата, касался хотя бы ещё одной стороны.

Посчитаем все вырезы, где прямоугольник касается ОДНОЙ стороны квадрата:

$$\underbrace{4}_{\text{выбрали сторону квадрата}} \cdot \underbrace{C^2_{100}}_{\text{выбираем 2 пореза на этой стороне, не касающ. квадрата}} \cdot \underbrace{100}_{\text{выбираем длину прямоугольника}} = 4 \cdot \frac{100 \cdot 99}{2} \cdot 100 = 2\,990\,000$$

$= 1980.000$

Теперь для ДВУХ сторон – тут касание может быть только со смежными сторонами. Как я писал ранее, касание противоположных сторон возможно только при касании третьей стороны.:

$$\underbrace{4}_{\text{выбираем угол квадрата}} \cdot \underbrace{100 \cdot 100}_{\text{выбираем по длине стороны прямоуг.}} = 40.000$$

Для ТРЕХ сторон:

$$\underbrace{4}_{\text{выбираем незадействованую сторону квадрата}} \cdot \underbrace{100}_{\text{выбираем длину}} = 400$$

Для ЧЕТЫРЕХ: возможно, только когда прямоуг. совпадает с квадр., то тогда вообще не произойдет разреза, поэтому не считаем этот случай.

Просуммируем: 1980.000 + 40000 + 400 = 2020400

Ответ: 2020400

62-50-37-13 (123,6)

№4 $\dfrac{a^{2x}-3a^{x+1}+2a^2}{\log_2 a} \geq 0$

Чистовик

Заметим, что $a>0$ (т.к. $\log_2 a$ определён)

Пусть $a^x = t$ $\dfrac{t^2-3at+2a^2}{\log_2 a} \geq 0$

$t = \dfrac{3a \pm \sqrt{9a^2-8a^2}}{2} = \dfrac{3a \pm |a|}{2} = \dfrac{3a \pm a}{2} = \left[\begin{array}{l} a \\ 2a \end{array}\right.$

$\dfrac{(a^x-a)(a^x-2a)}{\log_2 a} \geq 0$

$\Rightarrow a \neq 1$, т.к. $\log_2 1 = 0$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \in (0;1) \\ (a^x-a)(a^x-2a) \leq 0 \end{cases} \quad (1) \\ \begin{cases} a \in (1;+\infty) \\ (a^x-a)(a^x-2a) \geq 0 \end{cases} \quad (2) \end{array}\right.$

(1): + 0 a − 2a + 1 a^x

$a^x \in [a; 2a]$

$a^1 \leq a^x \leq 2a = a^{1+\log_a 2}$

Т.к. $a<1$:

$1 \geq x \geq 1+\log_a 2$

Чтобы ответом был отрезок длиной 2026, нужно, чтобы $(1+\log_a 2) - 1 = 2026$

$\Downarrow$

$\log_a 2 = 2026 = \log_a(a^{2026})$

$2 = a^{2026}$

$\boxed{a = \sqrt[2026]{2}}$ $\sqrt[2026]{2} > 1$, противоречие

(2): 0 1 + a − 2a + a^x

$(-\infty; a]$

$a^x \in$ $\cup [2a; +\infty)$

$x \in (-\infty; 1] \cup [1+\log_a 2; +\infty)$

$\downarrow$

Не отрезок $\forall a \in (1;+\infty)$

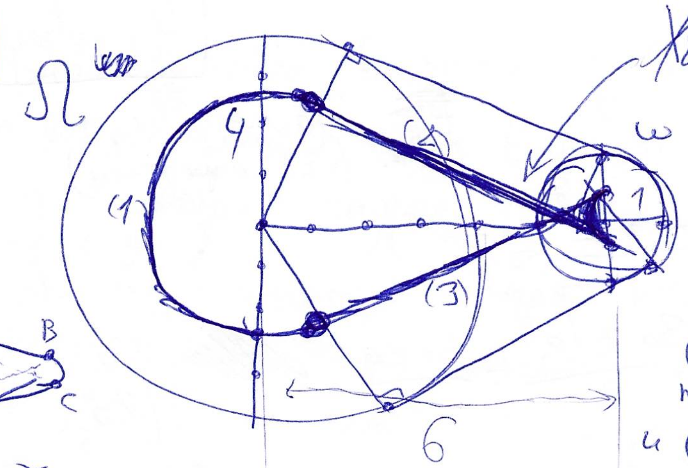
Также работает, если $2a \geq 1$, тогда просто метод интервалов выглядит так:

0 + a − 2a + a^x

Ответ: Ни при каких

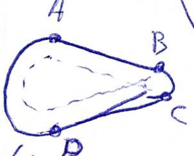
Чистовик

№7)



Жирная фигура — дорожка из травы

Она состоит из 4ёх частей: (1) — дуги окружности с $R=2,5$, (2),(3) — равных отрезков, паралельных касательным, и (4) — дуге окр. с $r=0,5$

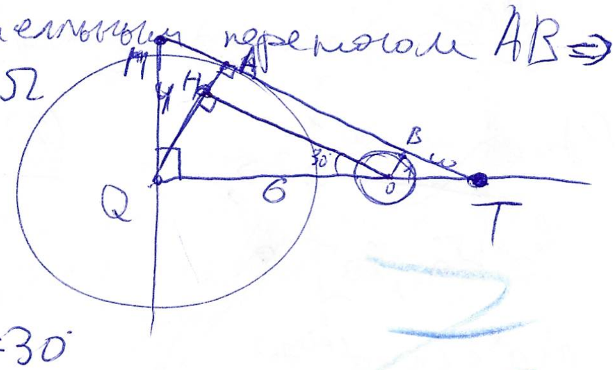


(4) — это именно дуга, а не другая фигура, т.к.:

Берем случ. т. $P \in BC$, P' — диаметрально противоположна P (в ω) тогда точка прилёта травы $G \in PP'$; $GP=1,5$; $GO=GP-PO=$ $1,5-1=0,5$ (O — центр ω). Таким образом, независимо от выбора P, $GO=0,5 \Rightarrow$ все G лежат на одной дуге.

Найдём ~~(1)~~ $(2)=(3)$:

(2) получена простым паралельным переносом $AB \Rightarrow$ $(2)=AB$.



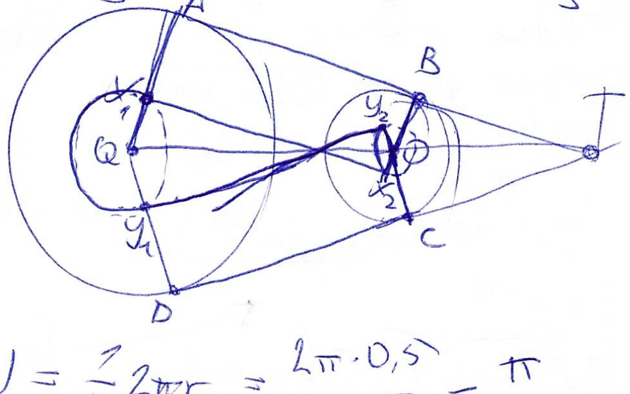
$QH=3 \Rightarrow \sin HOQ = \frac{1}{2}$
$\Downarrow$
$\angle HOQ = 30°$

$HO=AB=(2)=6\cdot\cos 30° = 3\sqrt{3}$

$QAM \sim OHQ \Rightarrow \angle AQM = \angle HOQ = 30°$

Тогда $\angle AQD = 180+30+30 = 240°$

Тогда $\frac{(1)}{2\pi R} = \frac{240°}{360°} \Rightarrow (1) = \frac{2}{3}2\pi R = \frac{4\pi\cdot 2,5}{3} = \frac{10\pi}{3}$



В силу подобия фигур $ATDQ$, $BTCO$

$\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC} = 120°$

$\Rightarrow Y_2OX_2 = 120° = BOC$ как вертикальные углы

Тогда $\frac{(4)}{2\pi r} = \frac{120°}{360°} \Rightarrow (4) = \frac{1}{3}2\pi r = \frac{2\pi\cdot 0,5}{3} = \frac{\pi}{3}$

Тогда длина дорожки $=(1)+(2)+(3)+(4) = \frac{11\pi}{3} + 6\sqrt{3}$

Ответ: $\frac{11\pi}{3} + 6\sqrt{3}$

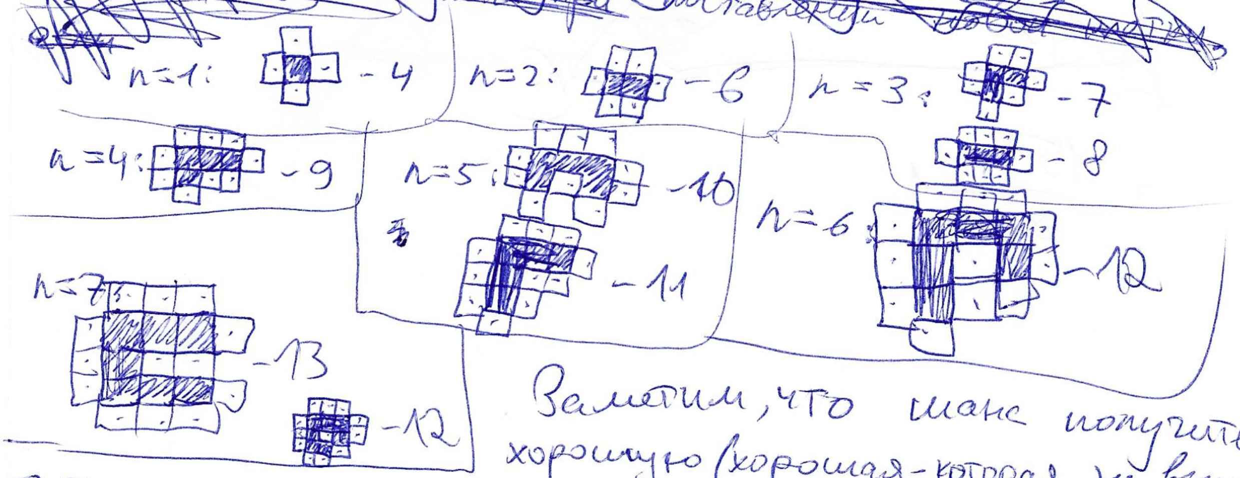
62-50-37-13 (123.6)

Чистовик

№8 Сначала определим вероятность получения "кольца".

Заметим, что если уже нарисована фигура, которая еще может стать кольцом (например, может стать кольцом, а - уже не может) и имеет на взятый момент n клеточек ($n \le 7$), то вариантов, куда можно поставить клетку, чтобы фигура могла ~~остаться~~ стать кольцом, будет ровно два (т.к. кольцо "строится" с двух сторон). Только при $n=7$ такая клетка будет одна.

Теперь посмотрим, сколько ВСЕГО можно выбрать мест при неком $n \le 7$



Заметим, что шанс получить хорошую (хорошая - которая не выходит за рамки "кольца") фигуру с $n=3$ клеток - 100%. Также, заметим, что фигуры для $n=2,4,6$ всегда выглядят одинаково.

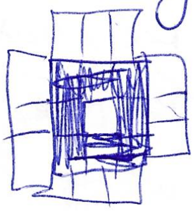
$$P(\text{получить кольцо}) = \underbrace{1\cdot1\cdot1}_{P(\text{получить три клетки})}\cdot\left(\frac{2}{7}+\frac{2}{8}\right)\cdot\underbrace{\frac{1}{9}}_{P\text{ получить 4 кл}}\cdot\left(\frac{2}{10}+\frac{2}{11}\right)\cdot\frac{1}{12}\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{13}\right) =$$

$$= \underbrace{\frac{16+14}{7\cdot8}}_{7,8\text{ клетка}}\cdot\frac{1}{9}\cdot\underbrace{\frac{22+20}{110}}_{5,6\text{ клетки}}\cdot\frac{25}{12\cdot13}\cdot\frac{1}{12} =$$

$$= \frac{30\cdot42\cdot25}{7\cdot8\cdot9\cdot110\cdot12^2\cdot13} = \frac{42\cdot25}{7\cdot8\cdot3\cdot11\cdot12^2\cdot13} = \frac{50}{8\cdot11\cdot12^2\cdot13}$$

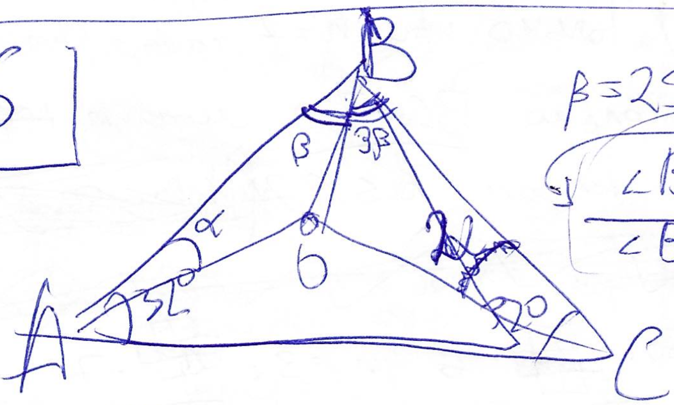
Продолжение №8 Чистовик

Тогда вероятность получить квадрат 3х3 из кольца $= \frac{\cancel{50}^{25}}{\cancel{8}_{4}\cdot 11\cdot 12^2\cdot 13}\cdot\frac{1}{13} = \frac{25}{4\cdot 11\cdot 12^2\cdot 13^2} =$



$= \frac{25}{3913074}$ Ответ: $\frac{25}{3913074}$

№6



$\beta = 29$ Просят найти

$\frac{\angle BOA}{\angle BAO} = \frac{180-\beta-\alpha}{\alpha} =$

$= \frac{151}{\alpha} - 1$

sinx siny (cosx cosy - sinx siny)

Чер|новик

144
169
36
360
9000
240
2400
60000
144
864
4
24
12
16
24
32
355734
11
355734
3557340
3913074

= 3913074

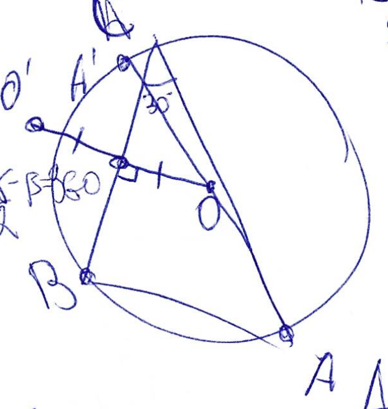
180
- 29
151

(Черновик

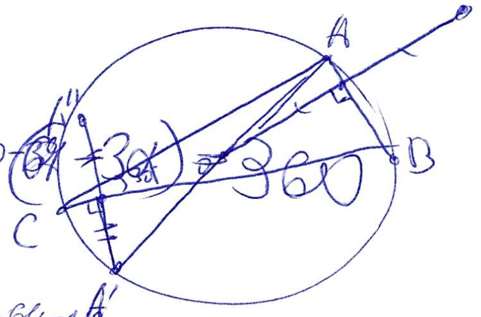
Черновик

$2034 = 2\cdot 1017 = 2\cdot 9\cdot 113$

$10 < \sqrt{113} < 11$



$2\gamma + 29 + 180 - (6\alpha + 3\alpha) = 360$



$4\beta + 3\alpha + \frac{2\gamma - \beta}{2} = 180$

$4\beta = 180 - 64 = 116$

$\beta = 29$

$\gamma = 180 - 29 - \alpha$

$180 - (32 - \alpha + 32 - 2\alpha)$

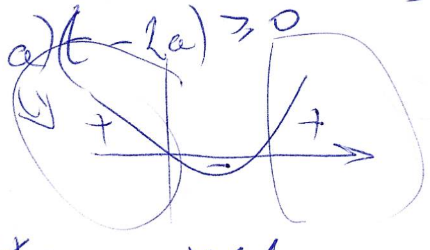
$\frac{(a^x)^2}{t^2} - 3a\cdot\frac{a^x}{t}$

$t = \frac{3a \pm \sqrt{9a^2 - 4\cdot 2a^2}}{2} = \frac{3a \pm |a|}{2} = \frac{3a \pm a}{2} =$

$(a^x - a)(a^x - 2a)$

$\frac{(t-a)(t-2a)}{\log_2 a} \geq 0$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a < 1 \\ (t-a)(t-2a) \leq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a > 1 \\ (t-a)(t-2a) \geq 0 \end{cases} \end{array}\right.$ $\Rightarrow$



$t \in [a, 2a]$

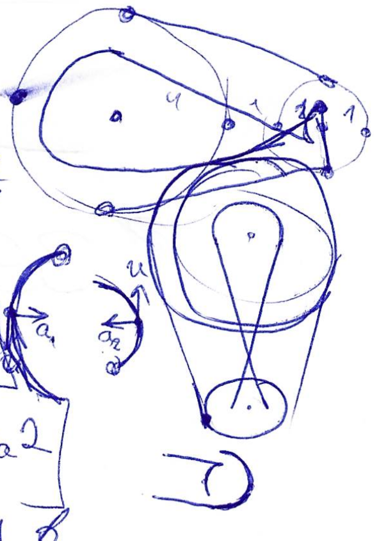
$a^x \in [a; 2a]$

$\left[\begin{array}{l} a^x \leq a \\ a^x \geq 2a \end{array}\right. \rightarrow \begin{array}{l} x < 1 \\ x > 1 + \log_a 2 \end{array}$

$x \in [1, 1 + \log_a 2]$

$\log_a 2 = 2028$

$\Rightarrow a > 1$



$z = \frac{\pi}{2} - x - y$

$tg\,x \cdot tg\,y \cdot tg(\frac{\pi}{2} - x - y)$

$tg(\frac{\pi}{2} - (x+y)) = \frac{\cos(x+y)}{-\sin(x+y)} = -ctg(x+y)$

$\frac{\sin x \cdot \sin y \cdot (\cos x\cos y - \sin x\sin y)}{\cos x\cos y \cdot (\sin x\cos y + \sin y\cos x)}$

$tg\,x \cdot tg\,y \cdot tg\,z = \frac{bdf}{ace} =$