0 203065 420008

20-30-65-42
(124.12)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11 ~~класс~~ в. 6

Место проведения г. Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Ермолова Дениса Алексеевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«29» 03 2026 года

Подпись участника

100 (сто) среди [подпись]

Черновик

$\sqrt{6(1-ctg^2x)}=4\cos x$

$6(1-ctg^2x)=16\cos^2x$

$6-6ctg^2x=16\cos^2x$

$16\cos^2x+6ctg^2x-6=0$

$16\cos^2x+6\left(\frac{\cos^2x}{\sin^2x}\right)-6=0$

$16\cos^2x\cdot\sin^2x+6\cos^2x-6\sin^2x=0 \quad |:\cos^2x\neq0$

$16\sin^2x+6-6tg^2x=0$

$6tg^2x=16\sin^2x+6$

$6tg^2x=16\sin^2x+6$

$6\frac{\sin^2x}{\cos^2x}=16\sin^2x+6 \quad |:\sin^2x\neq0$

$\frac{6}{\cos^2x}=16+\frac{6}{\sin^2x}$

$\frac{6}{\cos^2x}-\frac{6}{\sin^2x}=16$

$\frac{6\sin^2x-6\cos^2x}{\sin^2x\cdot\cos^2x}=16$

$6\sin^2x-6\cos^2x=16\sin^2x\cdot\cos^2x$

$6(\sin^2x-\cos^2x)=16\sin^2x\cdot\cos^2x$

$\sin^2x-\cos^2x=\frac{8\sin^2x\cdot\cos^2x}{3}$

$\sin^2x=\frac{8\sin^2x\cdot\cos^2x}{3}+\cos^2x$

$6(1-ctg^2x)\geq0$

$4\cos x\geq0$

$\sqrt{6(1-ctg^2x)}=4\cos x$

$\sqrt{6\left(1-\frac{\cos^2x}{\sin^2x}\right)}=4\cos x$

$\sqrt{6(ctgx\cdot tgx-ctg^2x)}=4\cos x$

$6ctgx\cdot tgx-6ctg^2x=16\cos^2x$

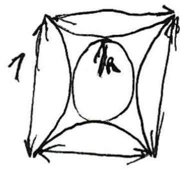
$6ctg(tgx-ctgx)=16\cos^2x$

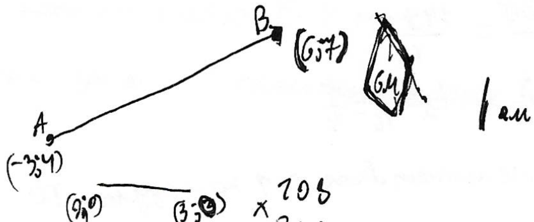
$6\frac{\cos x}{\sin x}\left(\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{\cos x}{\sin x}\right)=16\cos^2x$

$6\frac{\cos x}{\sin x}\left(\frac{\sin^2-\cos^2}{\cos x\cdot\sin x}\right)=16\cos^2x$

$\frac{6\cos x}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{6\cos x}{\sin x}\cdot\frac{\cos x}{\sin x}$

$y=cx^2$





$$\begin{array}{r} \times\ 108 \\ 343 \\ \hline 324 \\ 432 \\ 324 \\ \hline 37044 \end{array}$$

Чистовик №1

ОГР: $\sin x \neq 0$, $\cos x \geq 0$, $1 - ctg^2 x \geq 0$

$\sqrt{6(1 - ctg^2 x)} = 4\cos x$

$6(1 - ctg^2 x) = 16\cos^2 x$

$ctg^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$

$6\left(1 - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right) = 16\cos^2 x$

$6\left(\frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x}\right) = 16\cos^2 x$

пусть $t = \cos^2 x$, тогда $\sin^2 x = 1 - t$

$6\left(\frac{1 - 2t}{1 - t}\right) = 16t$

$6(1 - 2t) = 16t(1 - t)$

$6 - 12t = 16t - 16t^2$

$16t^2 - 28t + 6 = 0$

$8t^2 - 14t + 3 = 0$

$D = 196 - 4 \cdot 8 \cdot 3 = 196 - 96 = 100$

$t_{1,2} = \frac{14 \pm \sqrt{100}}{16} = \frac{14 \pm 10}{16}$

$t_1 = \frac{24}{16} = \frac{3}{2}$ $t_2 = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

Т.к. $\cos^2 x$ не может быть > 1 по модулю, то

$\cos^2 x = \frac{1}{4}$

с учётом $\cos x \geq 0$: $\cos x = \frac{1}{2}$

$x = 2\pi n \pm \frac{\pi}{3}$, $n \in Z$

Заметим, что при этом $\sin x \neq 0$, а $ctg \pm \frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, т.е. $1 - ctg^2 x = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} > 0$

Ответ: $x = 2\pi n \pm \frac{\pi}{3}$, $n \in Z$

20-30-65-42 (24.12)

Чистовик №3

Т.к. точки имеют координаты от ~~-3 до 3~~ $[-3;3]$ то по каждой из осей у нас есть 7 вариантов координат, тогда всего точек: $7^3 = 343$
Будем перебирать прямоугольные треугольники сначала по вершине прямого угла, а внутри зафиксированного прямого угла — по всем возможным двум другим вершинам. Из вершины прямого угла вдоль каждой оси можно выбрать 6 других точек. ~~Из~~ две из трех осей можно выбрать тремя способами (все возможные пары).
для каждой пары осей $6 \cdot 6 = 36$ вариантов
итого для одной вершины: $3 \cdot 36 = 108$ вариантов.
тогда всего по всем возможным вершинам прямых углов: $343 \cdot 108 =$
$= 37044$

Ответ: 37 044

№4

Рассмотрим граф, состоящий из границы полоски и трех графиков
$y = \sin(11\pi x)$, $y = \sin(13\pi x)$, $y = \sin(15\pi x)$
тогда число областей внутри полоски равно $E - V + 1$
по формуле Эйлера для связного графа в прямоугольнике.
Сначала посчитаем вершины
1. точки на границе полоски
У каждого графика концы находятся в точках $(0;0)$ и $(1;0)$
Это дает две вершины на боковых сторонах
Кроме того, график $y = \sin(kx)$ касается прямых $y = \pm 1$ ровно в k точках.
Значит всего таких касаний $11 + 13 + 15 = 39$
Но у графика с $k = 11$ и $k = 15$ общая точка $(\frac{1}{2}; -1)$
поэтому различных точек 38
еще 4 угла (прямоугольник), тогда $4 + \cancel{2}^{2} + 38 = 44$
2. точки пересечения графиков между собой
$\sin(m\pi x) = \sin(m\pi x)$
$\sin\alpha = \sin\beta \iff \alpha = \beta + 2\pi t \quad \alpha = \pi - \beta + 2\pi t \quad t \in Z$
$x = \frac{2t}{|m-n|}$ или $x = \frac{2t+1}{m+n}$
$11, 13: \; x = \frac{2t+1}{24} \Rightarrow 12$ решений

чистовик

$43,15$: $x=\frac{2t+1}{28}$ => 14 решений

$11,15$: $x=\frac{2t+1}{26}$ или $x=\frac{6}{2}$ => 13 решений (включая граничную точку $(\frac{1}{2};-1)$)

=> новых внутренних вершин 12

всего внутренних точек пересечения $12+14+12=38$ => $V=44+38=82$

ребра на границе

каждая новая вершина разбивает ребро границы на 2 => кол-во граничных ребер равно кол-ву граничных вершин $=44$

На графиках

каждый график разбивается вершинами на дуги

$y=-11ax$ $\quad$ $2+11+12+12=37$

дуг $37-1=36$

$y=-13\pi x$ $\quad$ $2+13+12+14=41$

дуг $41-1=40$

$y=-15\pi x$ $\quad$ $2+15+14+12=43$

дуг $43-1=42$

⇓

$E=44+36+40+42=162$

⇓

число областей

$E-V+1=162-82+1=81$

Ответ: 81

№2 чистовик

пусть трехзначное число равно n, а сумма его цифр равна S

по условию $\frac{n}{S}$ - целое кратное 9 $\Rightarrow n = 9\cdot k\cdot S$ для некоторого натурального k

т.к. n делится на 9, то и S делится на 9 $\Rightarrow n$ делится на 81

выпишем все трехзначные числа, кратные 81

162, 243, 324, 405, ~~486~~ 486, 648, 729, 810, 891, 972, 567

т.к. сумма цифр не превышает 27, то она может быть равна 9, 18, 27

1. если сумма цифр 27, то это число 999, оно не делится ~~даже~~ на 81
2. если сумма цифр 9, то т.к. число делится на 81, то при делении его на 9, оно будет ещё делиться на 9 и только ~~подходит~~
3. если сумма цифр равна 18, то надо просто проверить ~~что~~ число делится на 2. (суммой цифр 18 есть числа 486, 567, 648, 729, 891, 972

Только из них нечетные 567, 729, 891, их убираем

оставим 162, 243, 324, 405, 486, 648, 810, 972, из них ~~[illegible]~~ берем

$162+648+972 = 1782$

Ответ: ~~[illegible]~~ числа 162, 243, 324, 405, 486, 648, 810, 972, сумма 1782

№5

поместим центр фигуры в начало координат. т.к. углы между параболами образуют „нулевые" углы, то касательные к этим параболам в вершинах квадрата совпадают у обеих парабол.

Т.к. фигура симметрична относительно диагоналей квадрата, то касательными являются эти диагонали. т.е. прямые $y=x$, $y=-x$

верхняя парабола задается уравнением $y=cx^2+r$, где r будет радиусом окружности, вписанной внутрь. (потому что мы „подняли" в верх параболу $y=cx^2$ на радиус окружности).

$y=x$ будет касательной к $y=cx^2+r$, когда будет одна общая точка.

т.е. $cx^2+r=x$ имеет один корень

$$\Downarrow$$

$$D = 1-4\cdot c\cdot r = 0 \Rightarrow r = \frac{1}{4c}$$

т.к. сторона квадрата равна 1 (по условию про расстояние между вершинами) то координаты будут $(\pm 0{,}5);(\pm 0{,}5)$

$cx^2 + \frac{1}{4c}$ в точке 0,5 будет 0,5

$c \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4c} = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2c} = \frac{1}{2}$

$c = 1$

$r = \frac{1}{4}$

Ответ: $r = \frac{1}{4}$

№6

пусть в момент времени светлячок находится в точке $M_t = (-3+9c, 6)$, $c \in [0;7]$

нижний край забора отрезок UV, $U=(0;0;0)$ $V=(3;0;0)$

верхний край $U_1=(0;0;2)$, $V_1=(3;0;2)$

для фиксированного t тень на земле — трапеция $V_t U_t$, где V_t, U_t — проекции точек U_1, V_1 на плоскость $Z=0$, из точки M_t

найдем их т.к. высота светлячка равна 3, а высота забора 2, то

$\frac{M_t P_t}{M_t U_1} = \frac{3}{2}$, $\frac{M_t V_t}{M_t V_1} = \frac{3}{2}$

$\Downarrow$

$P_t = M_t + \frac{3}{2} \cdot (U_1 - M_t)$, $U_t = M_t + \frac{3}{2}(V_1 - M_t)$

отсюда $V_t = ($