0 014883 730008

01-48-83-73
(124.43)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11 класс, вариант 6

Место проведения г. Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников "Ломоносов"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Ермохина Георгия Алексеевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«29» 03 2026 года

Подпись участника

(1) $\sqrt{6(1-ctg^2x)} = 4\cos x$

ОДЗ: $\begin{cases} 6(1-ctg^2x) \geq 0 \Rightarrow ctg^2x \leq 1;\ ctgx \in [-1;1] \\ \cos x \geq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases}$

$6(1-ctg^2x) = 16\cos^2 x$

$6 - 6\cdot\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = 16\cos^2 x$

$6\sin^2 x - 6\cos^2 x = 16\cos^2 x\sin^2 x$

$6\cdot(-\cos 2x) = 4\sin^2 2x$

$-6\cos 2x = 4 - 4\cos^2 2x$

$4\cos^2 2x - 6\cos 2x - 4 = 0$

$2\cos^2 2x - 3\cos 2x - 2 = 0$

Замена: $t = \cos 2x$; $-1 \leq t \leq 1$

$2t^2 - 3t - 2 = 0$

$D = 3^2 + 4\cdot 2\cdot 2 = 25$

$t = \frac{3 \pm 5}{4} = \left[\begin{array}{l} 2 \text{ — не подх.} \\ -0{,}5 \end{array}\right.$

$\cos 2x = -\frac{1}{2}$

$2x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

$x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

При $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k$ $\cos x \geq 0$; $\sin x \neq 0$ только при четных k, т.е. $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$

Проверим $ctgx$: $ctgx = \frac{\cos x}{\sin x}$

$x = \frac{\pi}{3}$: $ctgx = \frac{0{,}5}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} < 1$ ✓

$x = -\frac{\pi}{3}$: $ctgx = \frac{0{,}5}{-\sqrt{3}/2} = -\frac{1}{\sqrt{3}} > -1$ ✓

~~Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k$~~

Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

(2) Т.к. число делят на его сумму цифр и получают целое число $\vdots 9$, то и само число $\vdots 9$

Но если число $\vdots 9$, то и его сумма цифр $\vdots 9$

Значит, число, входящее в множ-во A $\vdots 9^2$, т.е. $\vdots 81$

Рассмотрим 3-значные числа, к-е $\vdots 81$:

$81\cdot 2 = 162$; $81\cdot 3 = 243$; $81\cdot 4 = 324$; $81\cdot 5 = 405$; $81\cdot 6 = 486$; $81\cdot 7 = 567$; $81\cdot 8 = 648$; $81\cdot 9 = 729$; $81\cdot 10 = 810$; $81\cdot 11 = 891$; $81\cdot 12 = 972$

Все эти числа входят во множество A

другие 3-зн. числа $\not\vdots 81 \Rightarrow$ не входят во множество

первое число: $81\cdot 2 = 162$

шестое число: $81\cdot 7 = 567$ $\Rightarrow$ их сумма: $81\cdot(2+7+12) = 81\cdot 21 = 1701$.

последнее число: $81\cdot 12 = 972$

Ответ: 162; 243; 324; 405; 486; 567; 648; 729; 810; 891; 972

сумма первого, шестого и последнего $= 1701$

чистовик, стр. 2

3.) Возможные значения координаты:
$\{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$

Способов задать точку $P(x, y, z)$ всего: $7^3 = 343$

Посчитаем кол-во способов задать п/у треугольник, катеты которого параллельны координатным осям:

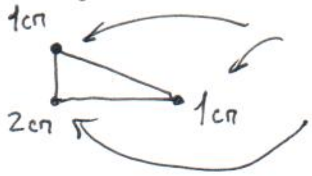
1) $7^3 = 343$ – сп. выбр. первую точку A
2) $6 \cdot 3 = 18$ – сп. выбрать вторую точку B так, чтобы отрезок AB был параллелен одной из коорд. осей
3) $12 \cdot 2 = 24$ – сп. выбрать третью точку C (по 12 сп. для каждой из точек A и B)

$\Rightarrow$ всего способов задать треугольник, уд. условием:

$343 \cdot 18 \cdot 24 = 148176$

~~Но один треугольник удовл. условиям~~

Но здесь каждый Δ-к посчитан по 4 раза:



вершины гипотенузы, для них 1 сп.

вершина прям угла, для нее 4 сп

$\Rightarrow$ всего таких треугольников: $\frac{148176}{4} = 37044$

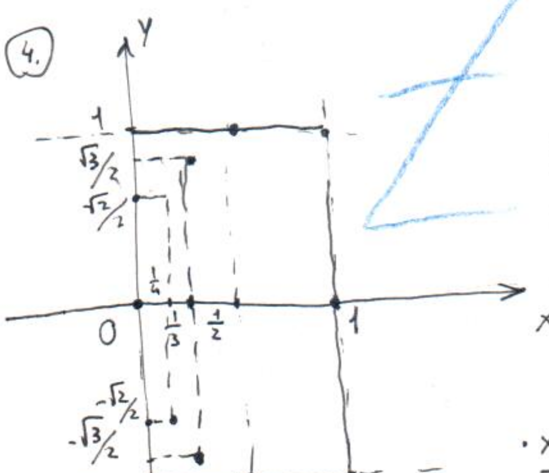
Ответ: 37044

4.) $k \in \{11, 13, 15\}$

$y = \sin(k\pi x)$

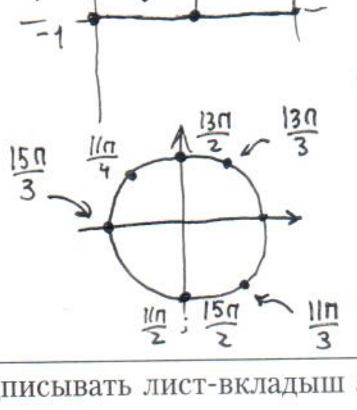
(1) $k=11$: $y = \sin(11\pi x)$
(2) $k=13$: $y = \sin(13\pi x)$
(3) $k=15$: $y = \sin(15\pi x)$

все 3 графика проходят 2-е точки $(0;0)$ и $(1;0)$ (при $x = 0$ и $x = 1$ соответственно)



Рассм. разные значения x:

• $x = \frac12$: (1) $y = \sin\left(\frac{11\pi}{2}\right) = -1$
(2) $y = \sin\left(\frac{13\pi}{2}\right) = 1$
(3) $y = \sin\left(\frac{15\pi}{2}\right) = -1$



• $x = \frac13$: (1) $y = \sin\left(\frac{11\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt3}{2}$
(2) $y = \sin\left(\frac{13\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt3}{2}$
(3) $y = \sin\left(\frac{15\pi}{3}\right) = 0$

см. стр. 3

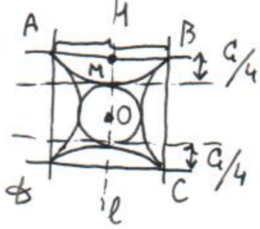
чистовик, стр. 3

• $x = \frac{1}{4}$: (1) $y = \sin\left(\frac{11\pi}{4}\right) = \sin\left(3\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(2) $y = \sin\left(\frac{13\pi}{4}\right) = \sin\left(3\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

(3) $y = \sin\left(\frac{15\pi}{4}\right) = \sin\left(4\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

5.

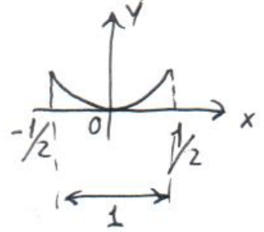


По условию, $AB = BC = CD = DA = 1$

$l \parallel AD$, прох. через т.O – центр. окр-ти

$l \cap AB = M$, $AM = MB = \frac{1}{2}$

Рассм. график $f(x) = ax^2$; $f(1/2) = \frac{a}{4}$



Рассм. от точки касания окр-ти до отрезка, соед. вершины квадрата равно $a/4$

$\Rightarrow$ диаметр впис. окр-ти $d = 1 - 2\cdot\frac{a}{4} = 1 - a/2$

т.е, радиус $r = \frac{1}{2} - \frac{a}{4}$

Углы "квадрата" являются нулевыми

$\Rightarrow$ касательные к параболам, явл. смежными сторонами совпадают, причем коэф. наклона равен 1 (т.к. квадрат)

← общая касательная.

Найдем производную параболы: $f'(x) = 2ax$

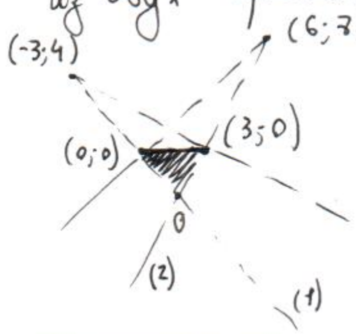
$\Rightarrow$ в вершине $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2\cdot a\cdot\frac{1}{2} = a$, но тогда $\boxed{a = 1}$

т.к. коэф. наклона касательной равен производной в этой точке.

Значит, радиус впис. окр-ти $\boxed{r = 1/2 - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}}$

Ответ: $1/4$

6. Рассм., как падает свет от светлячка из двух крайних положений $(-3;4)$ и $(6;7)$ — 1 черновик, стр 4



Свет не падает на заштрихованную часть рисунка

Найдём ур-я прямых 1 и 2

$(1): \begin{cases} 4 = -3k + b \\ 0 = b \end{cases} \Rightarrow 4 = -3k,\ k = -\frac{4}{3} \Rightarrow y = -\frac{4}{3}x \leftarrow f(x)$

$(2): \begin{cases} 7 = 6k + b \\ 0 = 3k + b \end{cases} - \Rightarrow 7 = 3k,\ k = \frac{7}{3},\ b = -7 \Rightarrow y = \frac{7}{3}x - 7 \leftarrow g(x)$

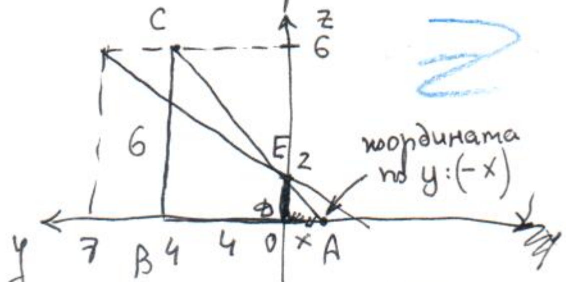
Найдем координаты т. O — точки пересечения:

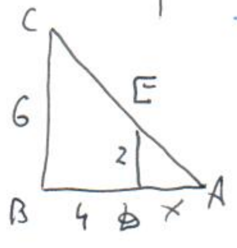
$-\frac{4}{3}x = \frac{7}{3}x - 7$; $\frac{11}{3}x = 7$; $x = \frac{21}{11} \Rightarrow y = -\frac{4}{3}\cdot\frac{21}{11} = -\frac{28}{11}$

$\Rightarrow$ т. $O\left(\frac{21}{11}; -\frac{28}{11}\right)$

Засчёт разницы в высоте ещё часть области будет освещена:

введем коорд. ось z: изн. светлячок нах. в т. $(-3;4;6)$
в конце он нах. в т. $(6;7;6)$





заштрих. часть затенена:

Из подобия треугольников $\triangle ABC$ и $\triangle ADE$ (подобны по 2 углам) следует, что:

$\frac{x}{4+x} = \frac{2}{6}$

$6x = 8 + 2x$

$4x = 8$

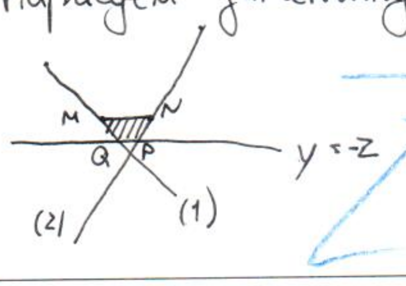
$x = 2$

$\Rightarrow$ граница затенённой части — прямая $y = -2$

Найдем пересеч. этой прямой с прямыми (1) и (2)

$(1): -2 = -\frac{4}{3}x \Rightarrow x = \frac{3}{2}$ | $(2): -2 = \frac{7}{3}x - 7$; $5 = \frac{7}{3}x \Rightarrow x = \frac{15}{7}$

Нарисуем затенённую часть: она представляет собой трапецию MNPQ



т. $M(0;0)$; т. $Q\left(\frac{3}{2}; -2\right)$

т. $N(3;0)$; т. $P\left(\frac{15}{7}; -2\right)$

$MN = 3 - 0 = 3$

$PQ = \frac{15}{7} - \frac{3}{2} = \frac{30}{14} - \frac{21}{14} = \frac{9}{14}$; $h = 2$

⑥ Продолжение:

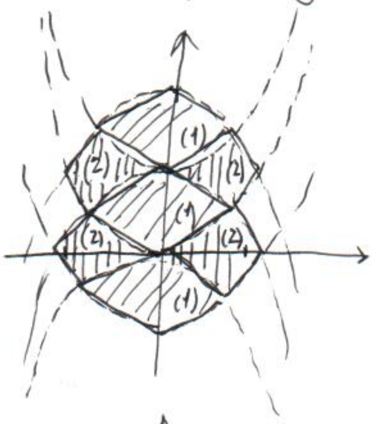
черновик, стр. 5

$S = \frac{1}{2}\cdot(MN + PQ)\cdot h = \frac{1}{2}\left(3 + \frac{9}{14}\right)\cdot 2 =$

$= 3 + \frac{9}{14} = \frac{42+9}{14} = \frac{51}{14}$ //

Ответ: $\frac{51}{14}$

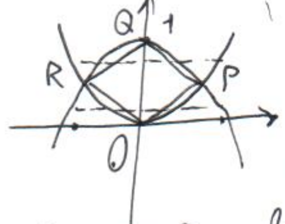
⑦ При увеличении $|x|$ ветви парабол становятся ближе друг к ~~д~~ другу => ~~их пло~~ площадь 4-угольников уменьшается



Также четырехугольники => и их площади повторяются (вид. цифрами на рис.)

~~Очевидно, что площадь (1) будет max (из утверждения выше можно понять)~~

Заметим, что наибольшей будет площ. (1) (т.к. подобные 4-уг расп. ближе всего к началу координат)



т. R и P — т. пересеч. графиков

$\frac{3}{4}x^2$ и $-\frac{3}{4}x^2 + 1$

$\frac{3}{4}x^2 = -\frac{3}{4}x^2 + 1$

$\frac{3}{2}x^2 - 1 = 0$

$\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x - 1\right)\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x + 1\right) = 0$

$x = \sqrt{\frac{2}{3}}$ или $x = -\sqrt{\frac{2}{3}}$

при $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$, $y = \frac{3}{4}\cdot\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 = \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{2}$

Площадь ромба с верш.:

$O(0;0)$; $P\left(\sqrt{\frac{2}{3}};\frac{1}{2}\right)$

$R\left(-\sqrt{\frac{2}{3}};\frac{1}{2}\right)$; $Q(1;0)$

равна

$\frac{1}{2}\cdot OQ\cdot PR = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2\sqrt{\frac{2}{3}} =$

$= \sqrt{\frac{2}{3}}$

Ответ: $\sqrt{\frac{2}{3}}$

⑧ $3x^2\log_a x - \log_x a - 2x \leqslant 0$

ОДЗ: $x > 0$; $x \neq 1$
$a > 0$; $a \neq 1$

$3x^2\cdot\log_a x - \frac{1}{\log_a x} - 2x \leqslant 0$

При $a \in (0;1)$: $\log_a x \searrow$
При $a > 1$: $\log_a x \nearrow$

$\frac{3x^2\cdot\log_a^2 x - 2x\cdot\log_a x - 1}{\log_a x} \leqslant 0$

$t = \log_a x$

$\frac{3x^2\cdot t^2 - 2x\cdot t - 1}{t} \leqslant 0$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t(3x^2\cdot t^2 - 2x\cdot t - 1) \leqslant 0$

см. стр. 6

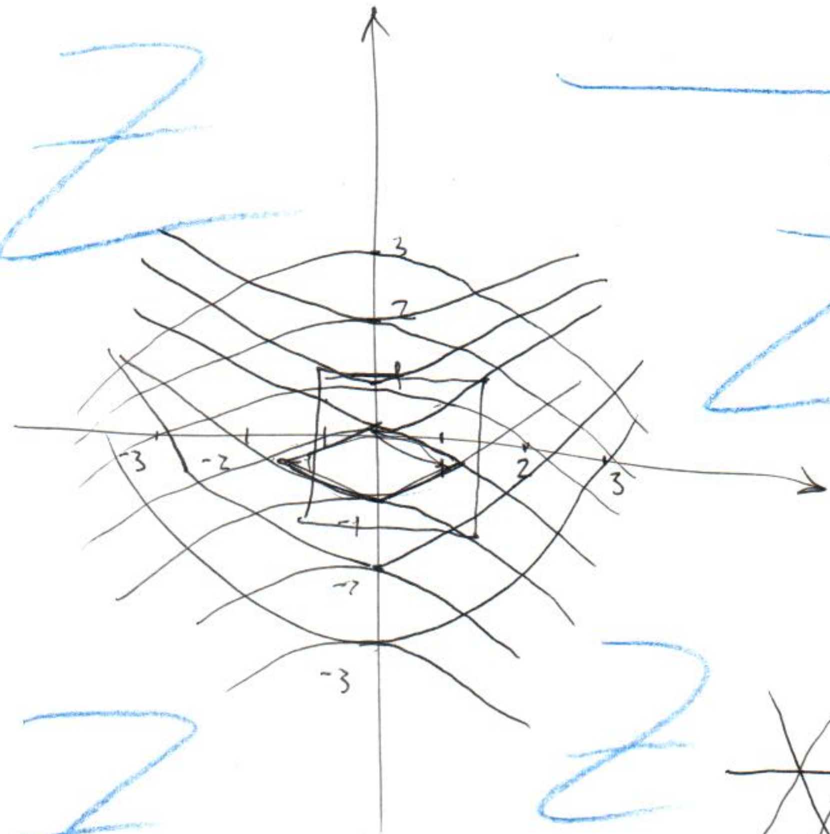
чистовик, стр. 6

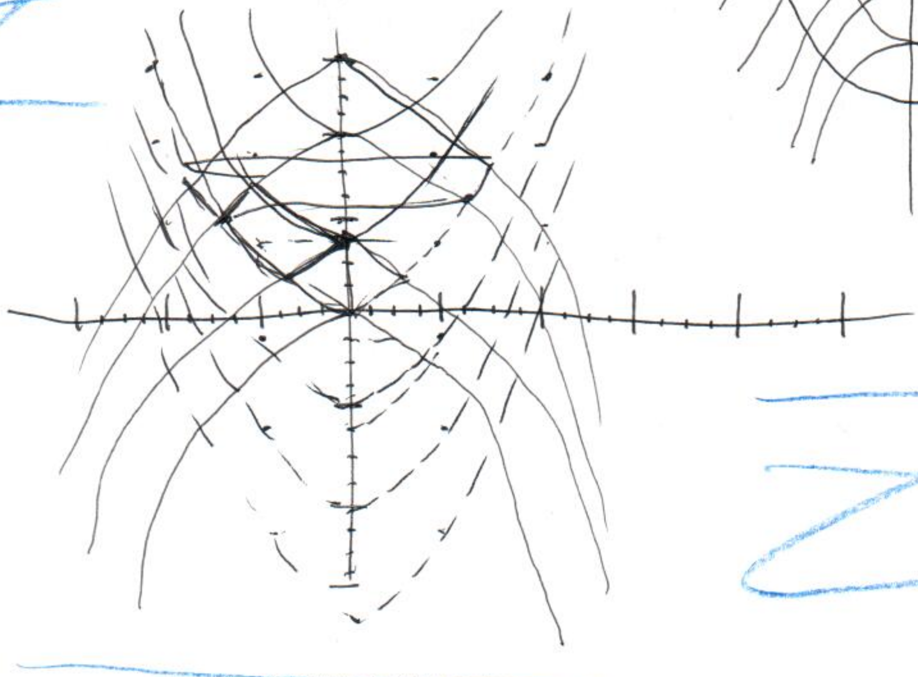
(8) Продолжение:

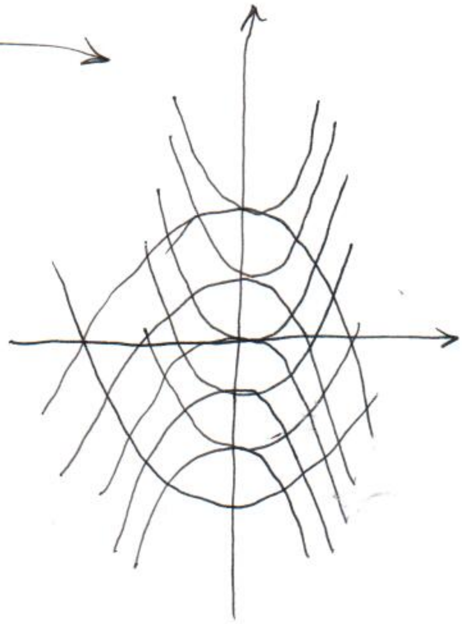
$3x^2 \cdot t^2 - 2xt - 1 = 0$

7.

Черновик, стр 4

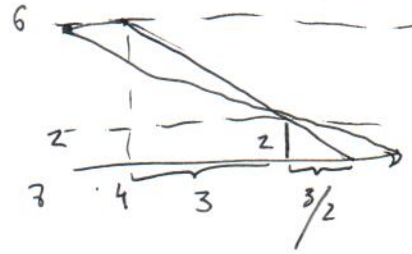






черновик, стр. 3

(6) $(0,0)$ $(3,0)$ -2 $9/8$ $\frac{42}{23}$ $\left(\frac{21}{11}; -\frac{28}{11}\right)$



$\frac{3+x}{x} = \frac{6}{2}$

$6+2x=6x$

$6=4x$

$x=3/2$

$f(x) = -\frac{3}{2} \Rightarrow -\frac{4}{3}x = -\frac{3}{2}$ $\quad x = +\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4} = \frac{9}{8}$

$g(x) = -\frac{3}{2} \Rightarrow -\frac{3}{2} = \frac{7}{3}x - 7$

$-\frac{9}{6} = \frac{14}{6}x - 7$

$7 = \frac{23}{6}x \quad x = \frac{42}{23}$

(8) $3x^2\log_a x - \log_x a - 2x \leqslant 0$

ОДЗ: $x>0;\ x\neq 1$

$a>0;\ a\neq 1$

$\frac{3x^2}{\log_x a} - \log_x a - 2x \leqslant 0 \quad |\cdot \log_x a \neq 0$

решение: $\left[\begin{array}{l} x\in(\dots;\dots]\cup\{\dots\} \\ x\in[\dots;\dots)\cup\{\dots\}\end{array}\right.$

$3x^2 - \log_x^2 a - 2x\log_x a \leqslant 0$

$x\neq 1$ и $a\neq 1 \Rightarrow \log_x a \neq 0$

$3x^2 \leqslant \log_x^2 a - 2x\log_x a$

$3x^2 \leqslant (\log_x a - 2x)\log_x a$

$3x^2\cdot\log_a x - \frac{1}{\log_a x} - 2x \leqslant 0$

≥ 0 $\frac{3x^2\cdot\log_a^2 x - 2x\log_a x - 1}{\log_a x} \leqslant 0$

$3x^2\log_a x \leqslant 2x + \log_x a$

$t=\log_a x$

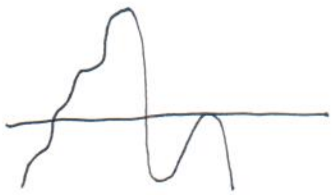
$3x^2 t \leqslant 2x + \frac{1}{t}$

$(\log_a x - \log_a 1)$

$\frac{\log_a x(3x^2\log_a x - 2x) - 1}{\log_a x - \log_a 1} \leqslant 0$

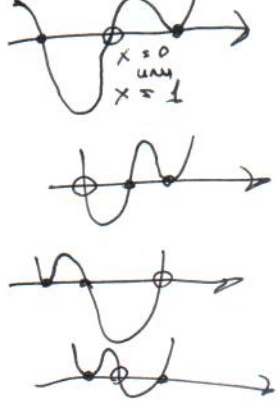
$t+\frac{1}{t}\geq 2$

$\cancel{(a-1)(x-1)(3x^2\log_a x - 2x) - 1}$

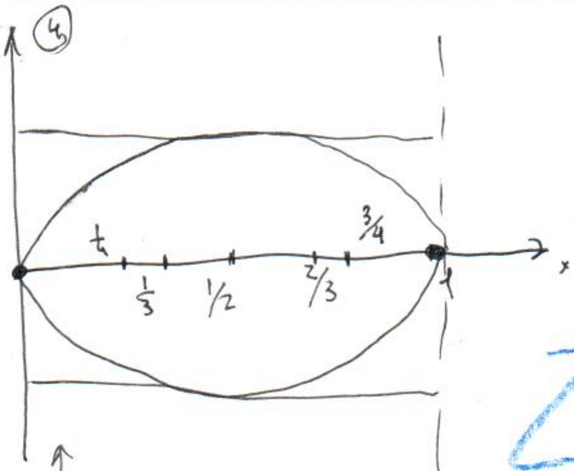


$3x^2 \cancel{\log_a - 2x = x(3x\log_a - 2)}$

$\frac{3x^2\log_a^2 x - 2\log_a x - 1}{\log_a x}$

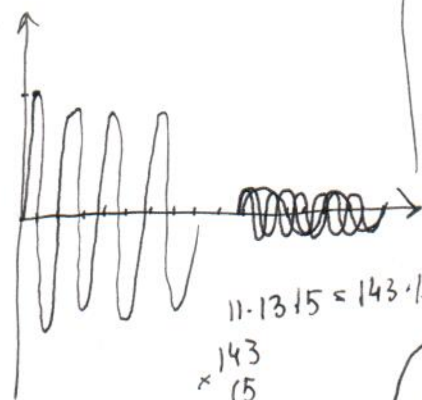


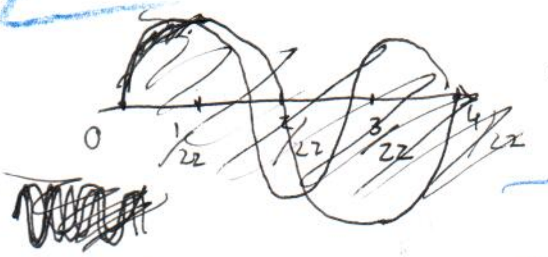
(черновик, стр. 2)



$\frac{1}{13} - 0$

$\frac{2}{13} - 0$

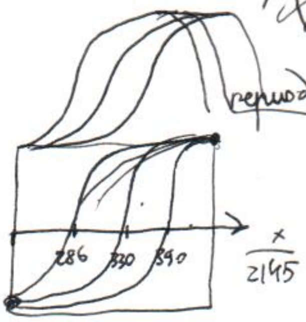




$11 \cdot 13 \cdot 15 = 143 \cdot 15$

$143 \times 15 = 715$
143
2145

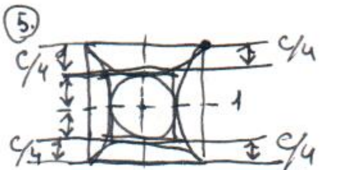
2145



период: $\frac{4}{22} = \frac{2}{11} = \frac{2 \cdot 13 \cdot 15}{2145} = \frac{30 \cdot 13}{2145} = \frac{390}{2145}$

$\frac{2}{13} = \frac{2 \cdot 11 \cdot 15}{2145} = \frac{330}{2145}$

$\frac{2}{15} = \frac{2 \cdot 13 \cdot 11}{2145} = \frac{286}{2145}$



$C/4$

$D = 1 - \frac{C}{2}$

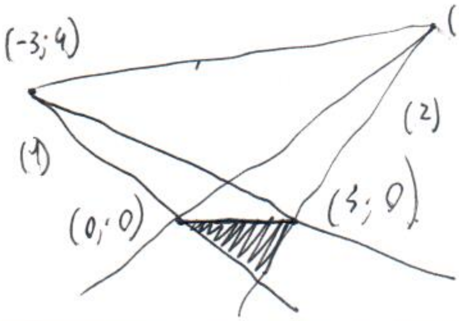
$R = \frac{1}{2} - \frac{C}{4}$

$f'(\frac{1}{2}) = 1 \Rightarrow$

$f'(x)\ 2Cx$

$2C \cdot \frac{1}{2} = C = 1$

$R = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$



(1) $4 = -3k + b$
$0 = b$
$4 = -3k;\ k = -\frac{4}{3}$ $\quad y = -\frac{4}{3}x.$

(2) $7 = 6k + b$ $\quad 7 = 3k$
$0 = 3k + b$ $\quad k = 7/3$ $\quad y = \frac{7}{3}x - 7$
$b = -7$

$-\frac{4}{3}x = \frac{7}{3}x - 7;\quad \frac{11}{3}x = 7 \quad x = \frac{21}{11};\ y = -\frac{28}{11}$

черновик, стр. 1

(2) Число сравнимо по модулю со своей суммой цифр.

$x_1 \underset{9}{\equiv} a \Rightarrow s(x_1) \underset{9}{\equiv} a$, где $s(x)$ – сумма цифр.

108 | 9, 12 ⋮ 9 102 | 3, 34 ⋮ 9 111 | 3, 37 ⋮ 9 112 | 4, 28 ⋮ 9 114 | 6, 19 ⋮ 9 ~~118 | 18~~

Заметим, что наше число об. ⋮ 9, т.е. $9n \cdot s(x_1) = x_1$

117 | 9, 13 126 | 9, 14 × 135 | 9, 15 × $9 \cdot 18 = 162$ $9 \cdot 27 = 243$

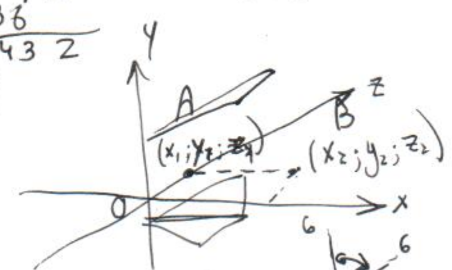
Мы делим на ~~9(1)~~ ⋮ 9 и пол. ⋮ 9 ⇒ число ⋮ 81

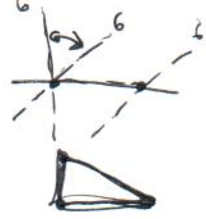
162 234 324 405 486

$81 \cdot 4 = 324$ $81 \cdot 3 = 243$ $81 \cdot 21 = 1701$ $81 \cdot 12 = 992$ $81 \cdot 5 = 405$ $81 \cdot 6 = 486$

$18 \cdot 24 = 432$ $49 \cdot 7 = 343$

(3)





$A(x_1; y_1; z_1)$

$B(x_2; y_2; z_2)$

$C(x_3; y_3; z_3)$

Возм. зн. коорд: $\{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$

⇒ Всего сп. задать точку: $7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^3 = 343$

~~рода в~~

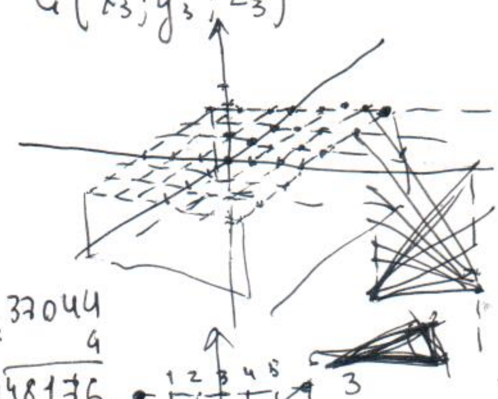
отр ∥ коорд. оси если его значения по этой оси равны

$AB \parallel Ox$, если $x_1 = x_2$

$AB \parallel Oy$, если $y_1 = y_2$

$AB \parallel Oz$, если $z_1 = z_2$

$343 \cdot 36 = 12348$



Всего есть 343 способа выбрать первую точку

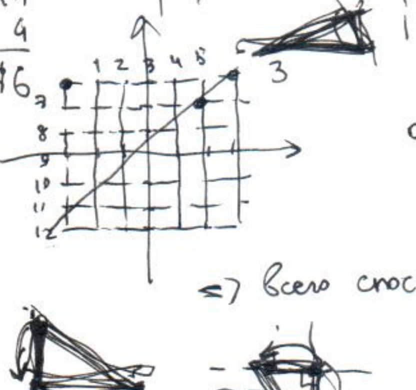
вторую точку выбираем 18 способами

~~6·3·18 способами~~

⇒ получили 1 из катетов

от одной из точек катета выбираем третью точку ⇒ $2 \cdot 6 = 12$ способов выбрать третью точку

$37044 \cdot 4 = 148176$



⇒ Всего способов: $\frac{343 \cdot 18 \cdot 12}{6}$ = $343 \cdot 18 \cdot 3$ = ~~12348~~

18522

$148176 : 4 = 37044$

$343 \cdot 54 = 18522$ $343 \cdot 432$ $3744 \cdot 4 = 14976$ 148176