0 064214 010002

06-42-14-01
(123.4)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 10 класс

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Жуковой Екатерины Денисовны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«29» марта 2026 года

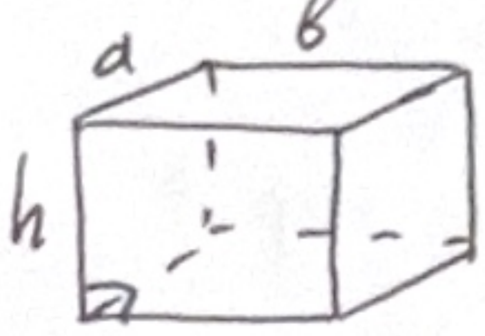
Подпись участника
Катя

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ 50 (пятьдесят) [illegible]

06-42-14-01 (123,4)

ЧЕРНОВИК

№1



$a, b, h \in \mathbb{N}$

$\boxed{V_{min} - ?}$ $a \neq b \neq h$; $a \neq h$

$V + S + P = 2026$

$V = abh$

$V = ab \cdot h \quad S = 2ab + 2ah + 2bh$

$P = 4a + 4b + 4h$

$abh + 2ab + 2ah + 2bh + 4a + 4b + 4h = 2026$

$ab(h+2) + 2a(h+2) + 2b(h+2) + 4h = 2026$

$(2a + ab + 2b)(h+2) + 4h + 8 = \cancel{2018}\ 2034$

$4(h+2)$

$(2a + ab + 2b + 4)(h+2) = 2018$

$\cancel{2a(b+1)}\ a(b+2) + 2b(b+2)$

$\cancel{(a+2b)(b+2)(h+2) = 2018}$

$2018 \mid 2$, $1009 \mid 1009$, 1

$1009 \mid 7$; $1009 \mid 13$; $1009 \mid 17$; $1009 \mid 23$; $1009 \mid 29$; $1009 \mid 43$

$13 \times 33 = 429$; $13 \times 8 = 104$; $13 \times 7 = 91$; $17 \times 7 = 119$; $47 \times 6 = 102$; $17 \cdot 5 = 95$

$1150 - 1009 = 141$; $1900 - 1009 = 891$; $19 \cdot 910$

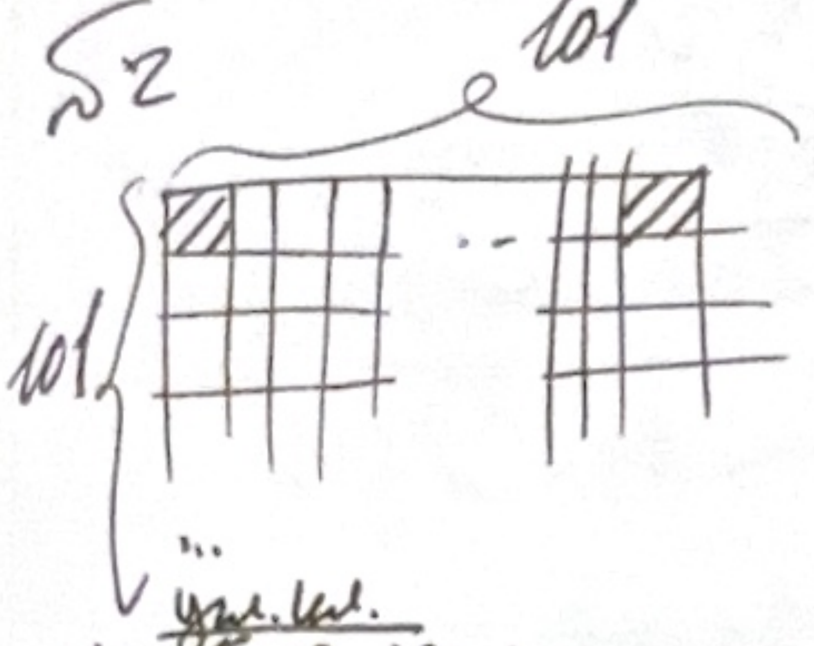
$891 \mid 3$, $297 \mid 3$, $99 \mid 9$, 11

$23 \times 7 = 161$; $29 \times 3 = 87$; $29 \times 4 = 116$

$25 \times 25 = 625$; $29 \times 29 = 841$; $31 \times 31 = 961$

$31^2 < 1009 < 32^2$

№2



$4900 - 49 = 4851$; $4851 + 101 = 4952$

$2034 \mid 2$, $1017 \mid 3$, $339 \mid 3$, 113

$4952 \times 4 = 19808$

уг. кл.

$4 \cdot (100 \cdot 100 + \cancel{101} \cdot 100 \cancel{+ 100})$

не уг. кл.

$\cancel{99}\ 4 \cdot \frac{98 \cdot 97}{2} \cdot 100$

$10^2 < 113 < 11^2$

$113 \mid 7$

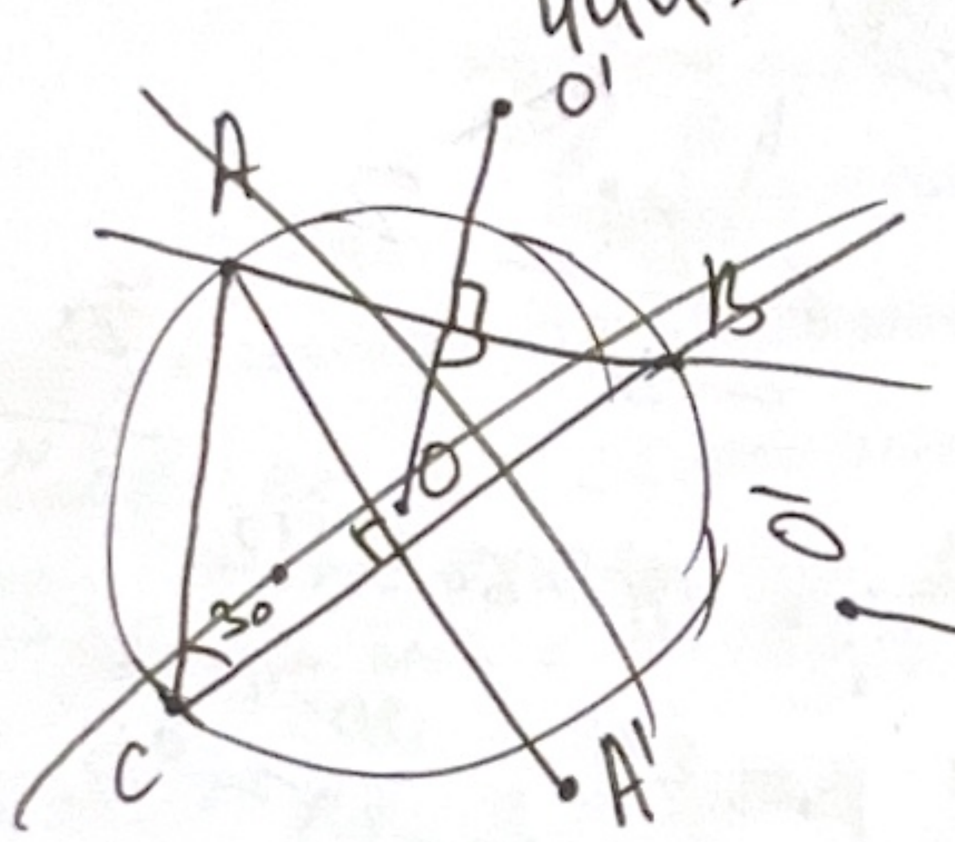
$(a+2)(b+2)(h+2) = 2034 =$

$= 2 \cdot 3^2 \cdot 113$

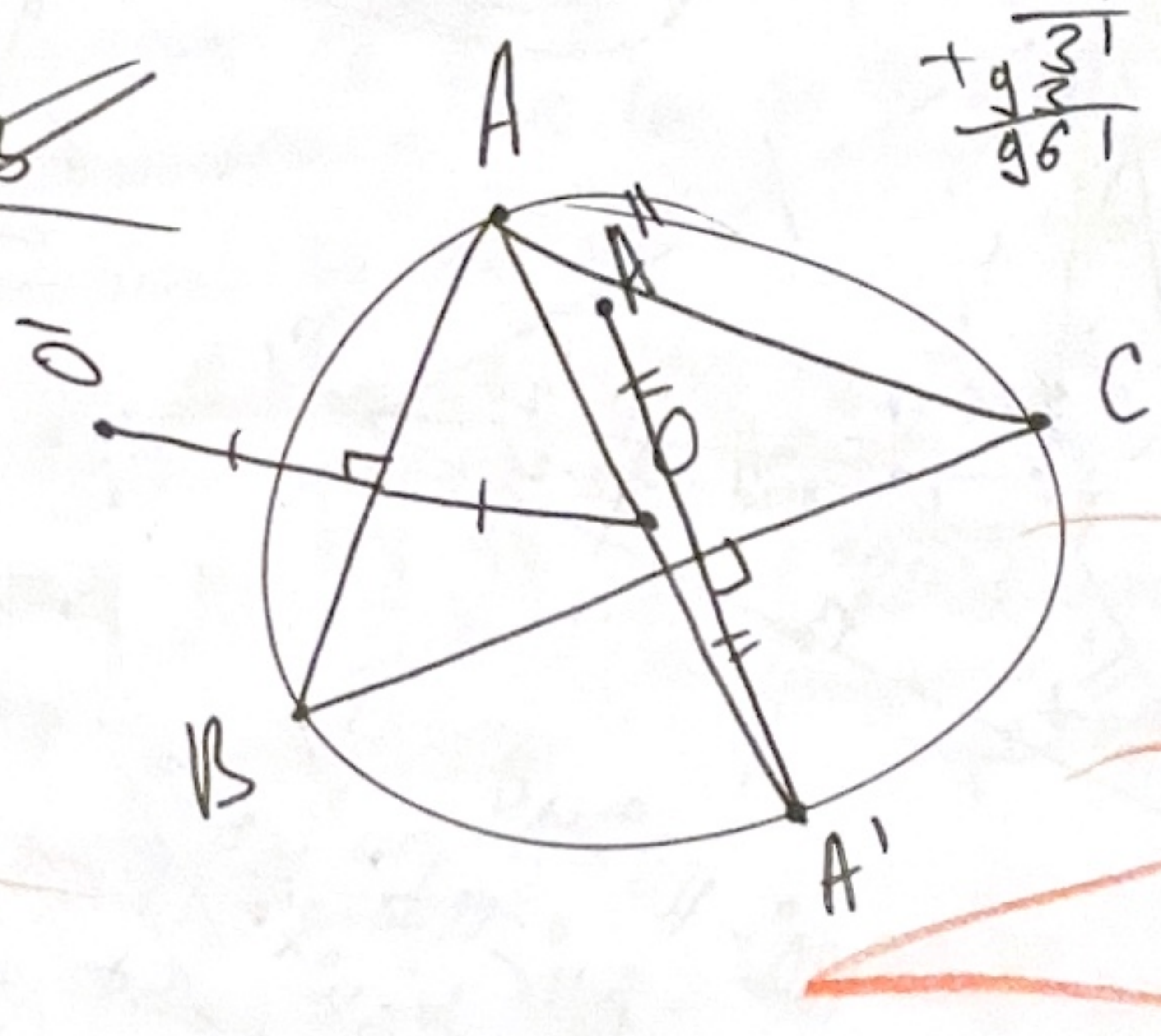
$6 \cdot 3 \cdot 113 \rightarrow 4 \cdot 1 \cdot 111 = V_{min}$

444

№3



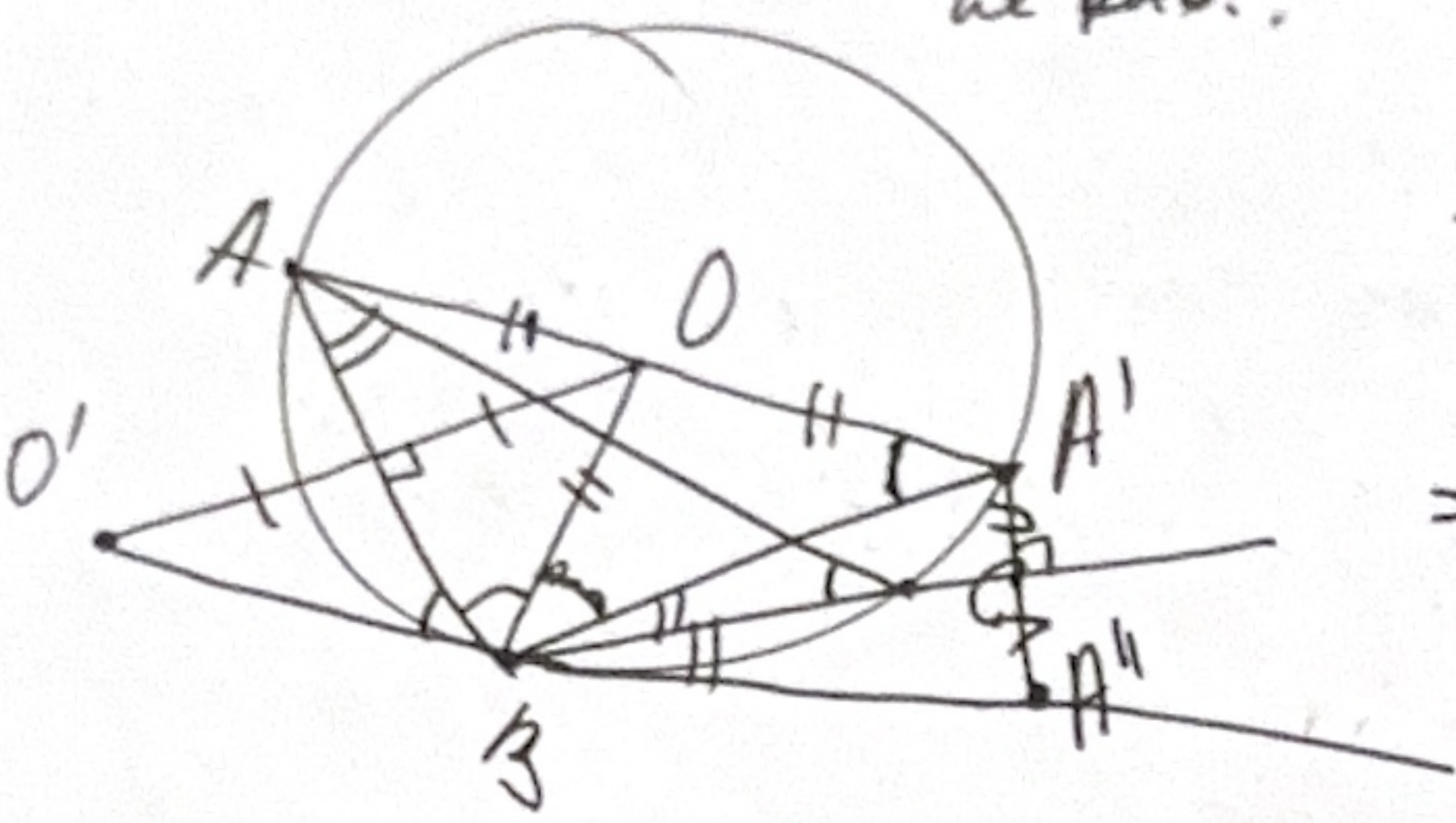
$\angle B - ?$



ЧЕРНОВИК

не кас.!

Дано:
$\angle C = 30^\circ$



$O'BA''$ - касательная к окр. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle O'BA = \angle C$

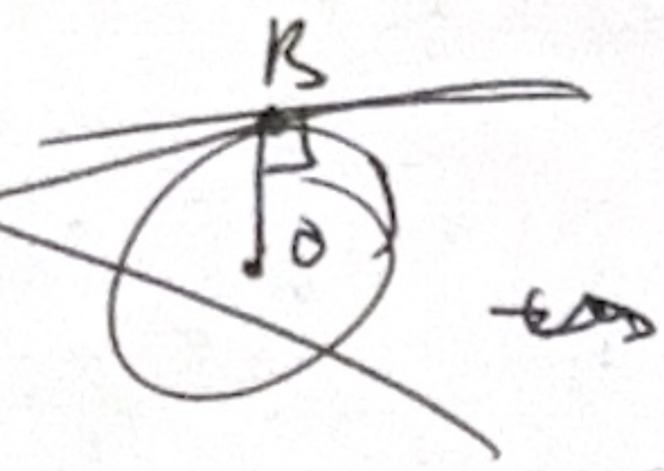
$\angle A''BC = \angle A$

$\angle AA'B = \angle ACB = 30^\circ$

опир на одну дугу.

~~OB - радиус~~

~~$OB \perp O'BA''$~~

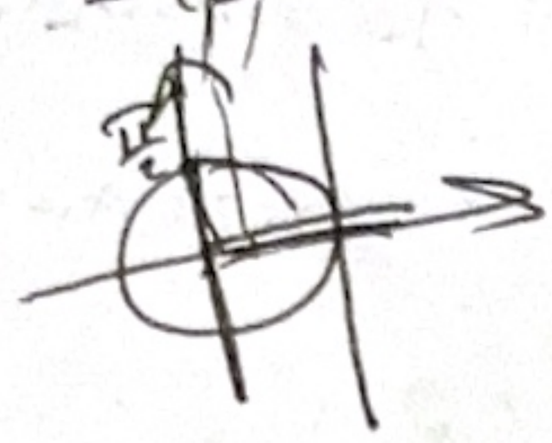


$90^\circ + 2)) = 180^\circ \Rightarrow)) = 45^\circ$

$\Rightarrow \angle B = 180^\circ - 45^\circ - 30^\circ =$
$= 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$

№4

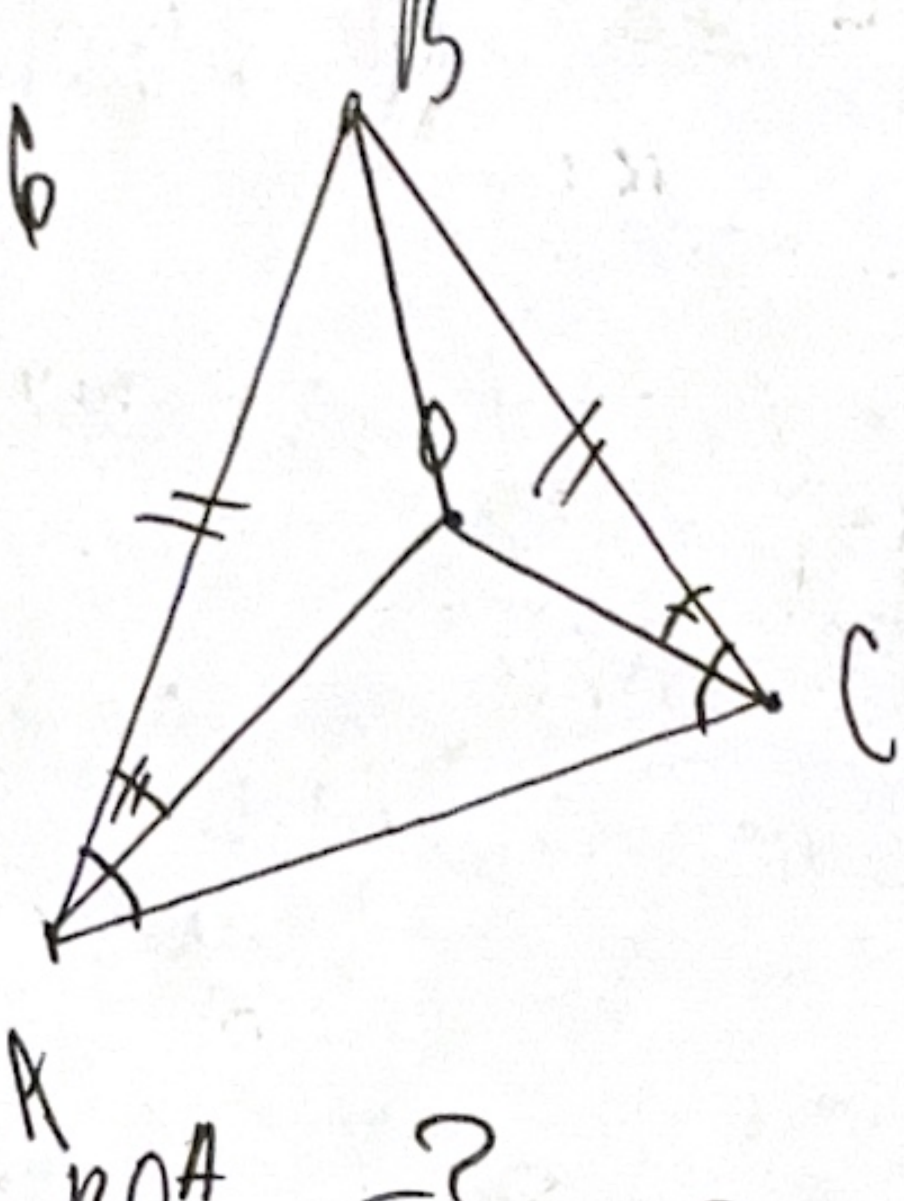
$$\frac{a^{2x} - 3a^{x+1} + 2a^2}{\log_2 a} \geq 0$$



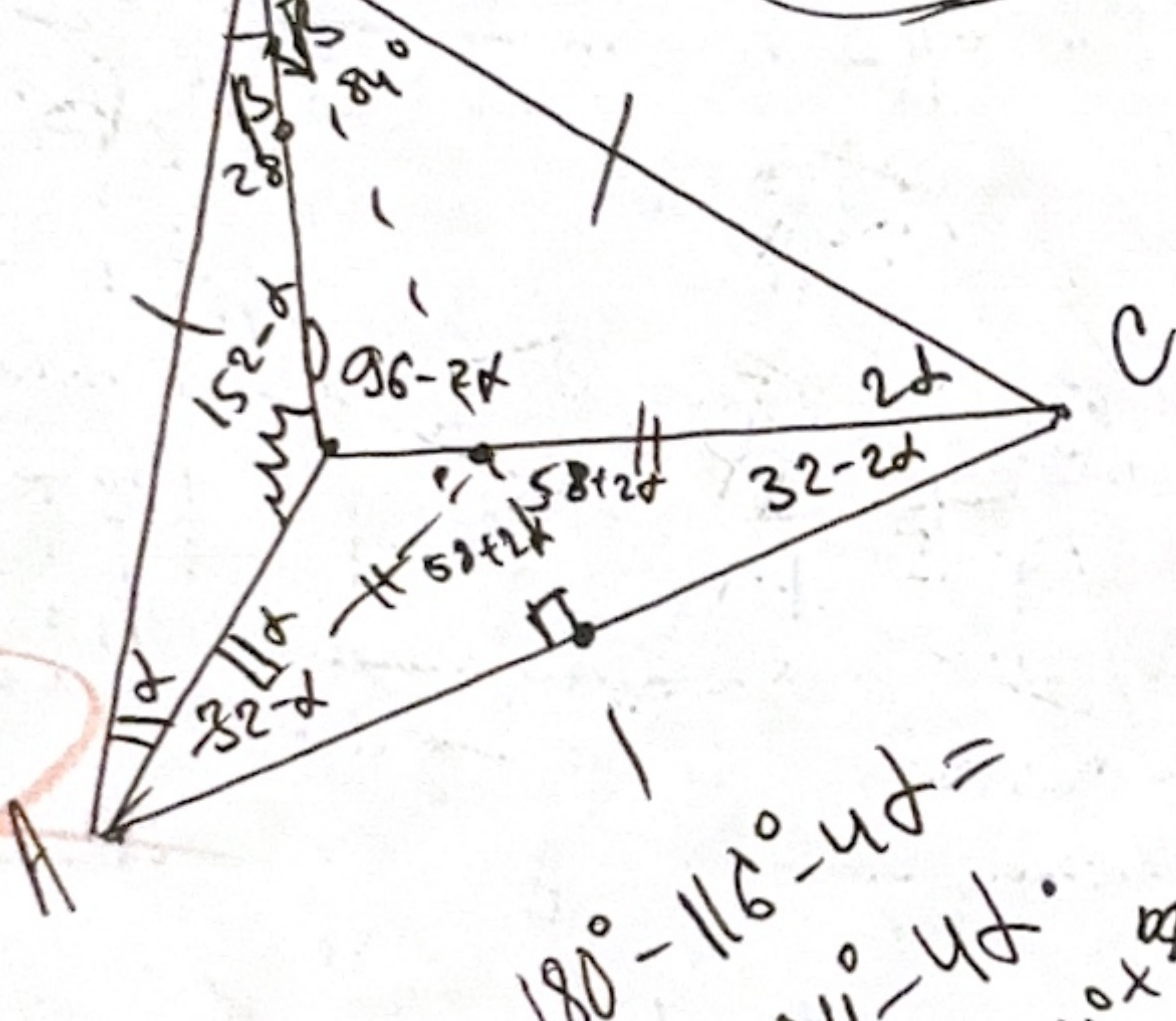
№5 $\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y\operatorname{tg}z$ $\quad 0 < x, y, z < \frac{\pi}{2}$ $\quad x+y+z = \frac{\pi}{2}$

~~№7~~

№6



№6



$\frac{\angle BOA}{\angle BAO}$ - ?

$28 \times 3 = 84$

$4\beta = 180^\circ - 64^\circ = 112$

$\beta = 28^\circ$ $\quad 180 - 28 = 152$

$180 - 84 = 96$

$90 - 32 = 58 + 2\alpha$

$180^\circ - 116^\circ - 4\alpha =$
$= 64^\circ - 4\alpha$

$180^\circ - 64^\circ + 3\alpha = 180 + \ldots$
$= 112 - 3\alpha$

$180^\circ - \alpha - \beta$
$180^\circ - 2\alpha - 3\beta$
$112^\circ + 3\alpha$

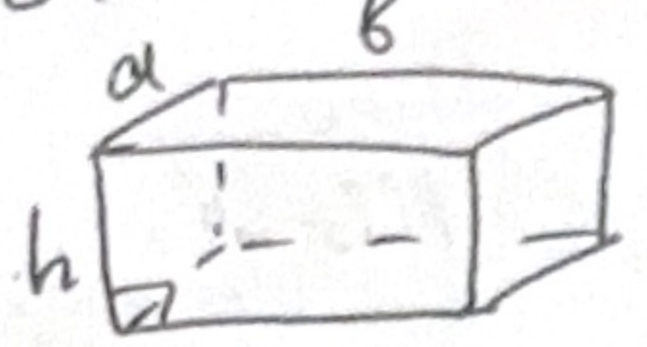
$360^\circ = 360^\circ + 112^\circ - \cancel{64} - 4\beta$

$64 + 4\beta = 112^\circ$

06-42-14-01 (123.4)

ЧИСТОВИК 1

Б1



Пусть h – высота, a – ширина, в – длина прямой прямоугольной призмы.

$V = abh$, $S = 2ab + 2bh + 2ah$, $P = 4a + 4b + 4h$

$V + S + P = 2026 = abh + 2ab + 2bh + 2ah + 4a + 4b + 4h$

Сгруппируем: $ab(h+2) + 2b(h+2) + 2a(h+2) + \underbrace{4h + 8}_{4(h+2)} = 2034$

$(ab + 2b + 2a + 4)(h+2) = 2034$

$(b(a+2) + 2(a+2))(h+2) = 2034$

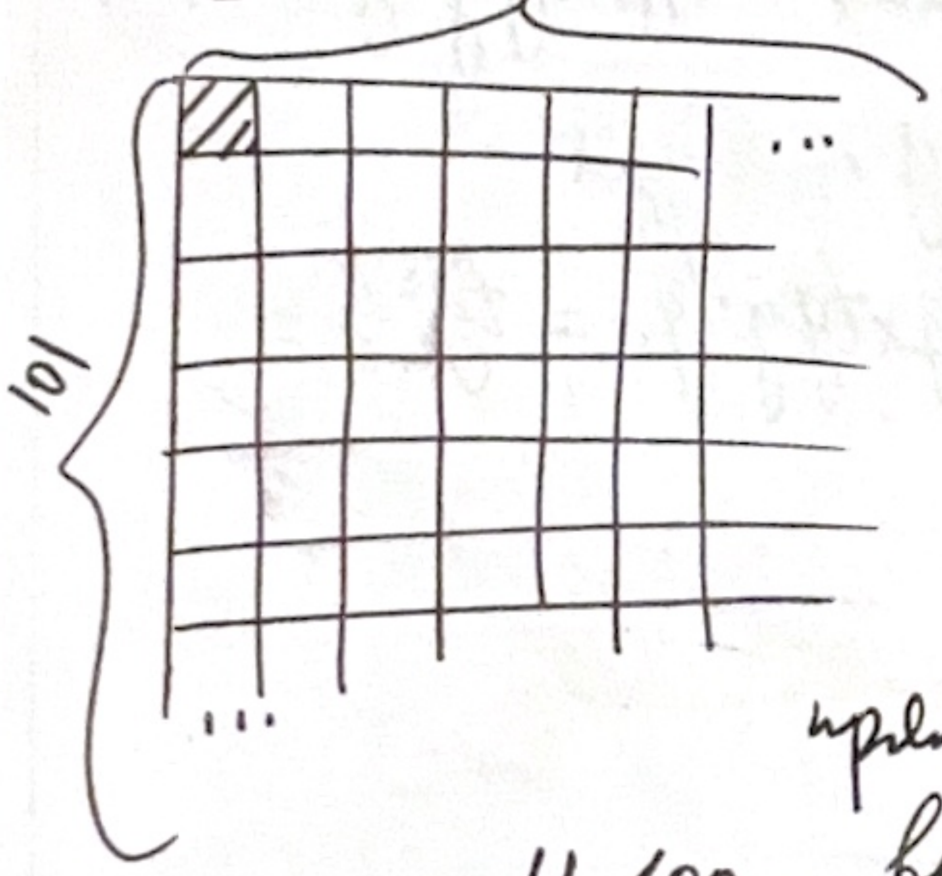
$(a+2)(b+2)(h+2) = 2034$

разложим 2034 на множители: $2034 = 2\cdot 3^2 \cdot 113 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $a+2$, $b+2$ и $h+2$ могут принимать значения 3, 6, 113 или 3, 3, 226 (порядок нам не важен, т.к. V от этого не изменится) $\Rightarrow$ $V_{min} = \underset{1}{(3-2)}\cdot\underset{4}{(6-2)}\underset{111}{(113-2)} = 444$

Ответ: 444.

Б2



Т.к. у оставшейся фигуры не должно быть дырки внутри, то наш прямоугольник хотя бы одной из своих сторон должен прилегать к стороне квадрата*

*(прилегать 4 сторонами не может, т.к. вырезанная фигура должна быть меньше изначальной)

Рассмотрим случай, когда наш прямоугольник прилегает по 3 сторонам:

$4\cdot 100$ – выбираем одну из 4 сторон, далее можем выбрать ширину прямоугольника от 1кл до 100кл (полученная фигура должна быть < изнач.)

прилегает по 2 сторонам: $4\cdot 100\cdot 100$ – ширина и длина прямоугольника (ширина и длина < 101, т.к. прямоуг. должен быть < изн. кв.); выбираем одну из 4 угловых клеток ((это и есть две стороны соприкосновения)

прилегает по 1 стороне: $4\cdot\frac{99\cdot 98}{2}\cdot 100$ – выбираем сторону; определяем границы на этой стороне; ширина прямоугольника (ширина < 101, т.к. оставшаяся фигура не должна распасться.

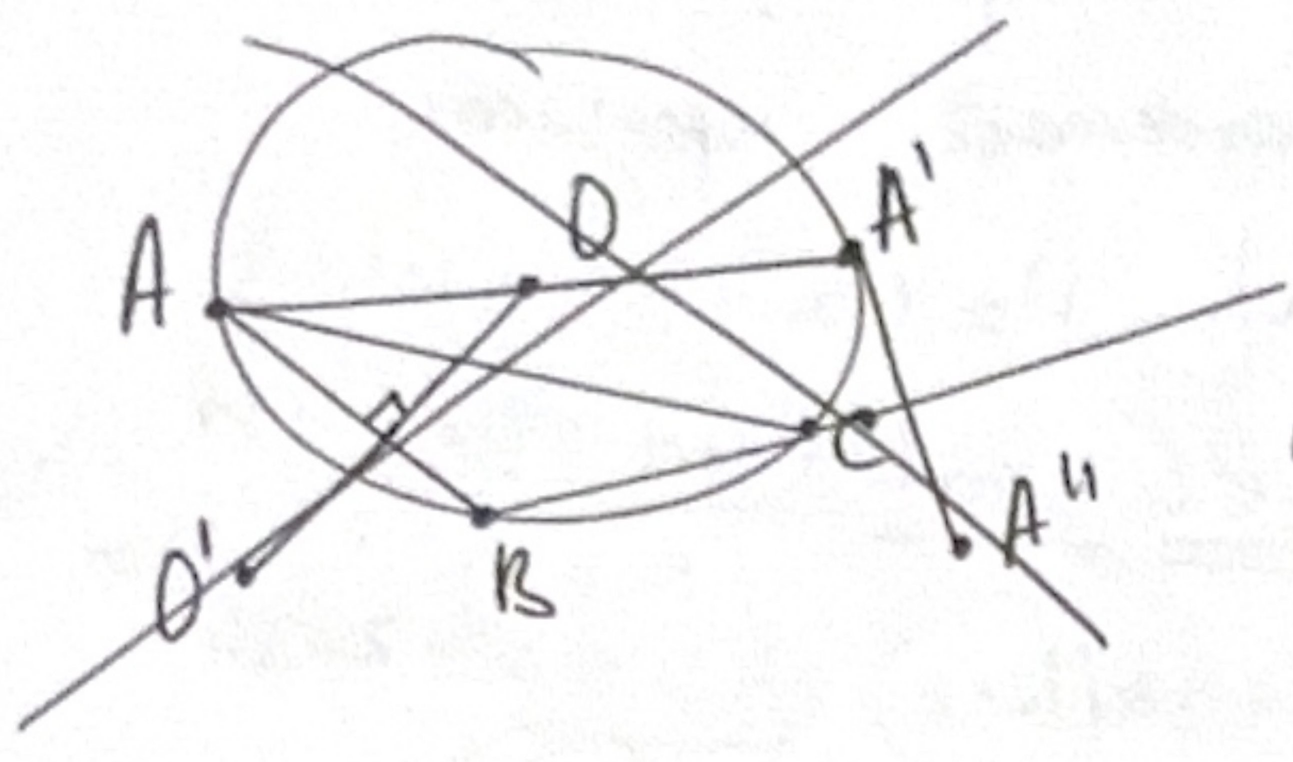
Ответ: 1980800.

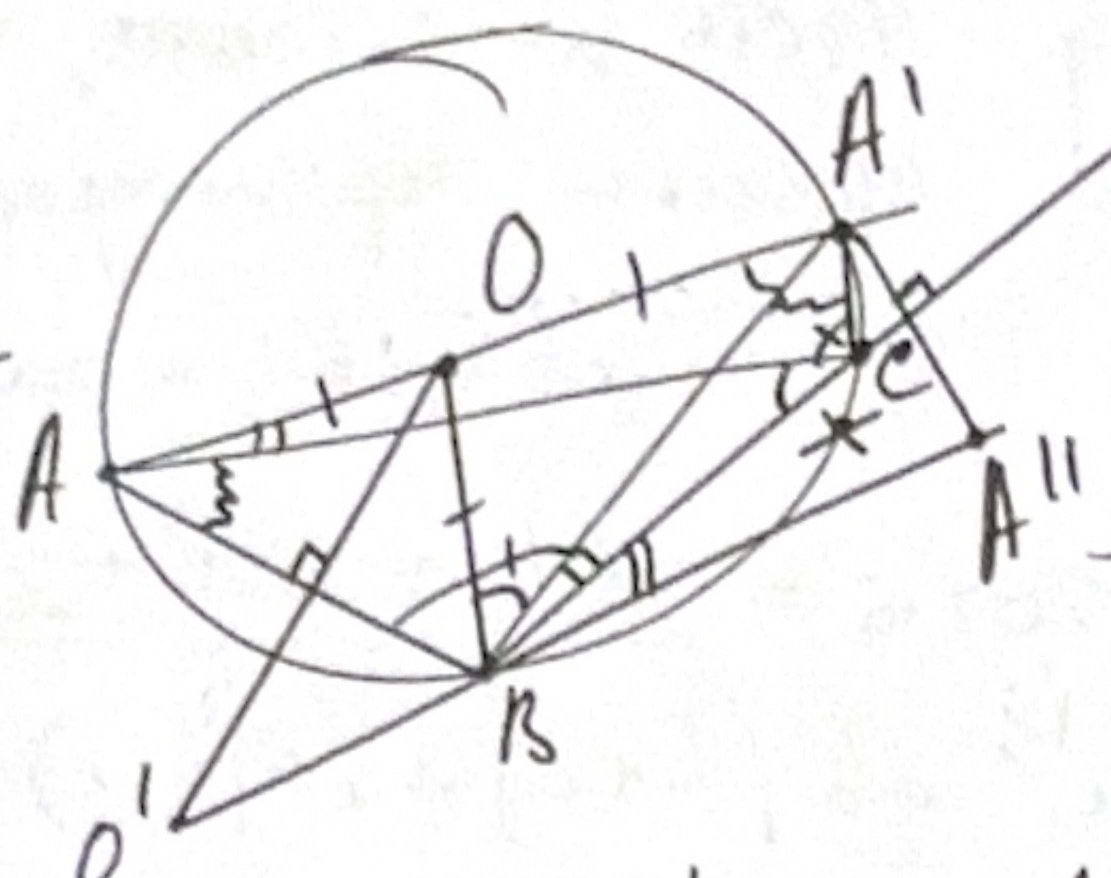
количество способов: $4\cdot 100 + 4\cdot 100^2 + 4\cdot\frac{99\cdot 98}{2}\cdot 100 =$

$= 4\cdot 100\left(1 + 100 + \frac{99\cdot\cancel{98}^{49}}{\cancel{2}}\right) = 400(101 + 99\cdot 49) = 400\cdot 4952 = 1980800$

Листовик 2

№3





Дано:
$\angle ACB = 30^\circ$;
O сим. O' относ AB;
A' диам. против A;
A' сим. A'' относ BC.
$\angle B$ — ?

$\angle A'BC = \angle A''BC$ по равенству $\triangle A'BC$ и $\triangle A''BC$ по двум сторонам $A'C = A''C$, общая сторона и углы в 90° (по симметрии).

$\angle AA'B = \angle ACB$ (опираются на одну дугу)

$\angle OA'B = \angle OBA'$, $OB = OA'$ тк радиусы

$\angle A'BC = \angle A'AC$ (опираются на одну дугу)

$\angle BAC = \angle BA'C$ (опир. на одну дугу)

$\angle ACA' = \angle ABA'$ (опир на одну дугу)

№5

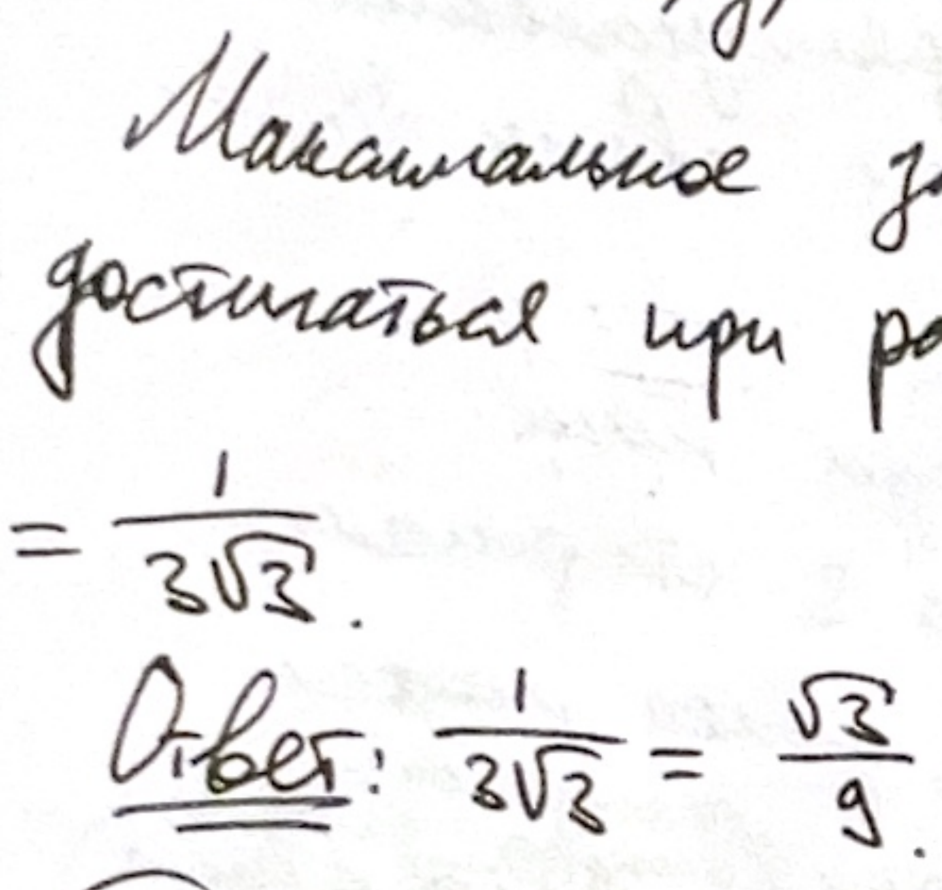
Дано: $0 < x, y, z < \frac{\pi}{2}$; $x+y+z = \frac{\pi}{2}$ Найти: max $tgx\,tgy\,tgz$ — ?

Максимальное значение выражения $tgx\,tgy\,tgz$ будет достигаться при равенстве $x = y = z = \frac{\pi}{6} \Rightarrow tgx\,tgy\,tgz = tg^3\frac{\pi}{6} =$

$= \frac{1}{3\sqrt{3}}$.

Ответ: $\frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9}$.

№8



Робот Казимир закрашивает только клетки граничащие с уже закрашенными $\Rightarrow$ вероятность получить чёрный квадрат из кольца $\frac{1}{13}$.

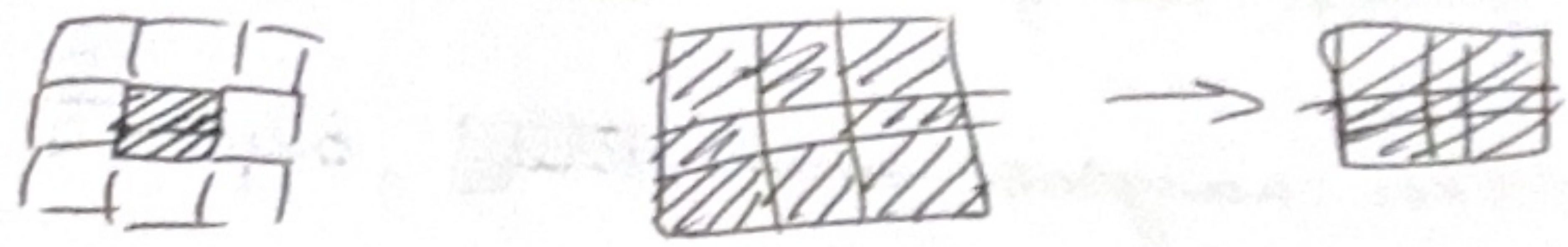
Рассчитаем вероятность получить кольцо:

из мы всегда получим — 4 вр. подходят.

из мы можем получить или , с вероятностью $\frac{2}{6}$ и $\frac{4}{6}$ соответственно.

ЧЕРНОВИК

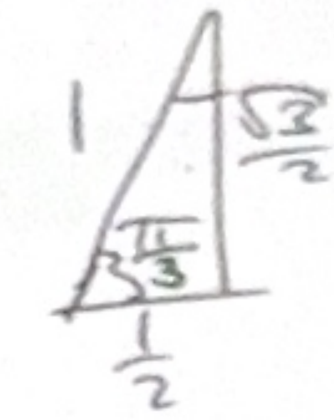
№8



№5

$tg x \, tg y \, tg z$ $\qquad x+y+z=\frac{\pi}{2}$ $\qquad tg\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$0<x,y,z<\frac{\pi}{2}$



$tg\frac{\pi}{12}\cdot tg\frac{\pi}{12}\cdot tg\frac{\pi}{3}=$

$tg 2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$ $\qquad tg\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$

$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta}$

$=\frac{\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})^2}=$

$=\frac{1}{\frac{4}{\sqrt{3}}+2+\sqrt{3}}$

$tg\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$ $\qquad tg\frac{\pi}{12}=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{1+\cos\frac{\pi}{6}}}=$

$=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}}=\sqrt{\frac{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}}=\sqrt{\frac{(2-\sqrt{3})\cdot \cancel{2}}{\cancel{2}(2+\sqrt{3})}}=$

$tg^3\frac{\pi}{6}=\frac{1}{3\sqrt{3}}$ $\qquad =\sqrt{\frac{4-3}{(2+\sqrt{3})^2}}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}$

$\frac{4}{\sqrt{3}}+2+\cancel{\sqrt{3}}\ ?\ \overset{2}{\cancel{3}}\sqrt{3}$ $\qquad \cancel{\boxed{x=y=z}}$ $\qquad tg^3\frac{\pi}{6}$

$4+2\sqrt{3}\ ?\ \cancel{6}2$

$2\sqrt{3}\ \overset{>}{?}\ 2$

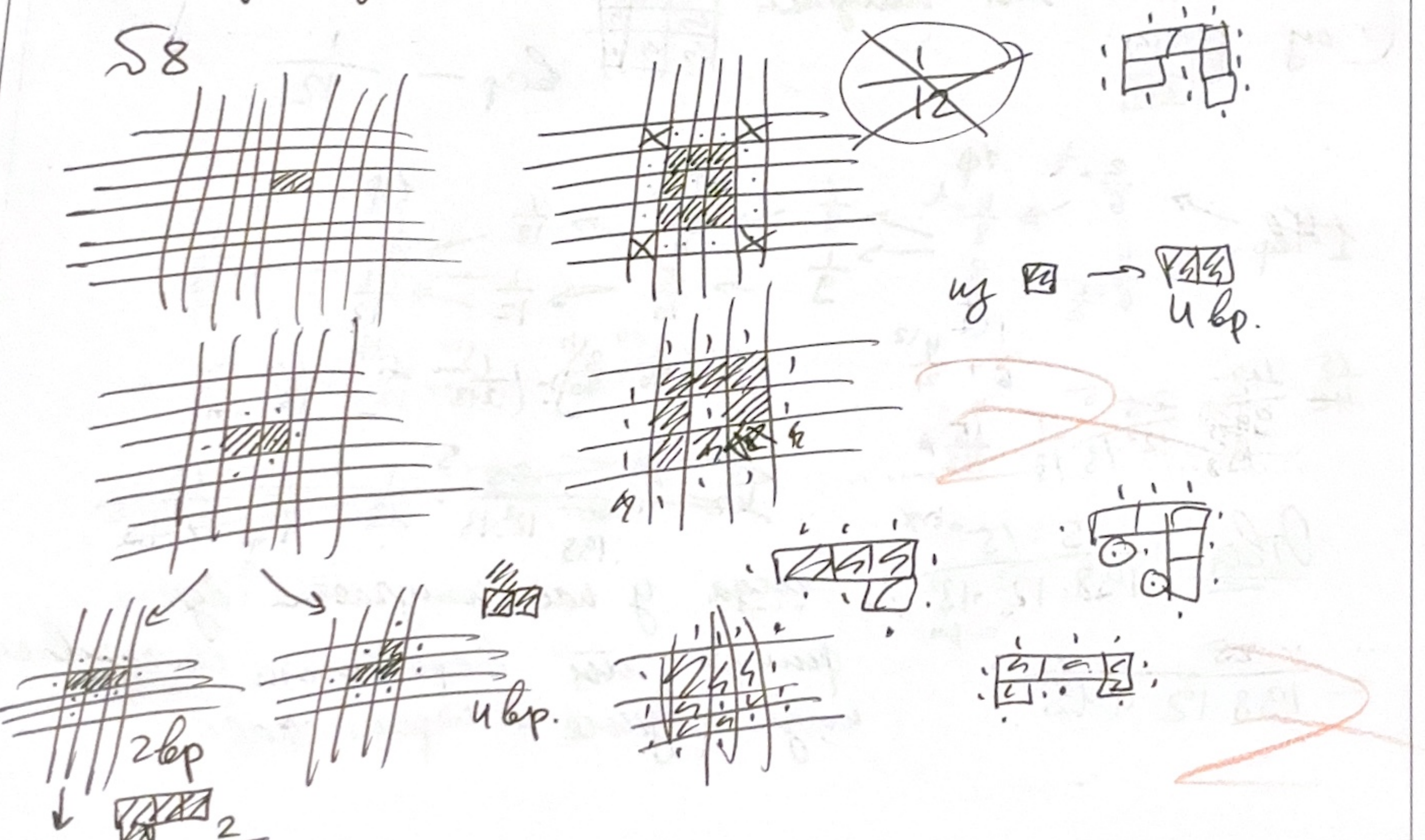
$\cancel{2\sqrt{3}+3\ ?\ 3\sqrt{3}}$

$3>\sqrt{3}$

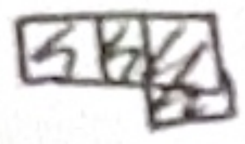
$990 \,|\, 5 = 198$; -5, 49, -40

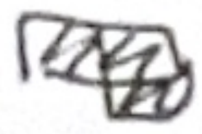
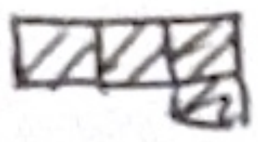
$tg\frac{\pi}{12}\cdot tg\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{2\sqrt{3}+3}$

№8

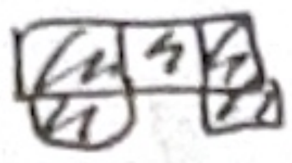


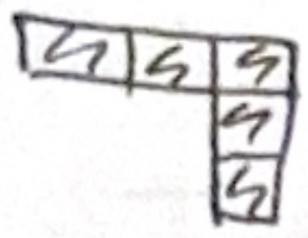
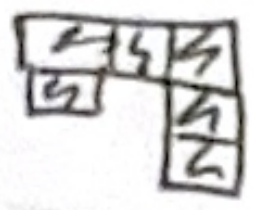
ЧИСТОВИК 3

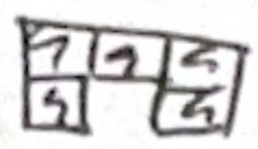
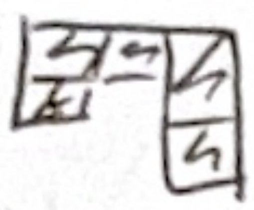
ну  мы должны получить , вер — $\frac{4}{8}$.

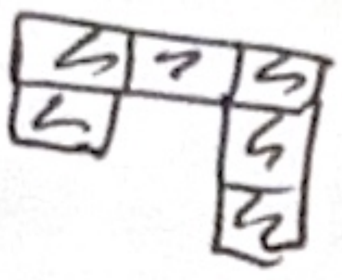
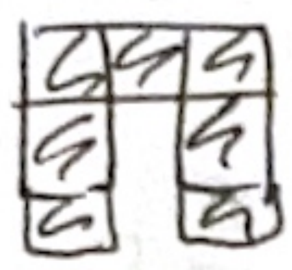
ну  мы должны получить ~~либо~~ , вер. — $\frac{2}{7}$.

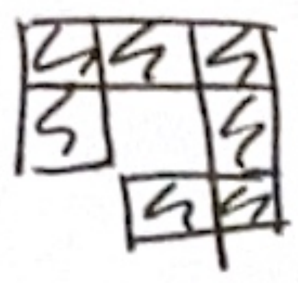
ну  мы можем получить либо , вер. — $\frac{1}{9}$

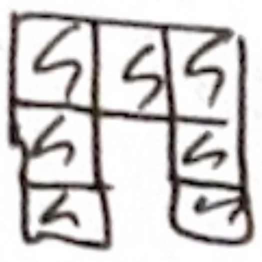
либо , вер. $\frac{1}{9}$

ну  мы получили , вер. — $\frac{2}{11}$

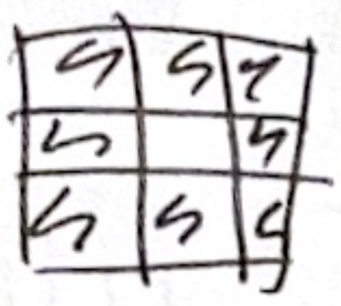
ну  мы получили , вер. — $\frac{2}{10}$

ну  мы получим либо , вер. — $\frac{1}{12}$

либо , вер. — $\frac{1}{12}$

ну 

вер. — $\frac{1}{13}$

ну  мы получили 

вер. — $\frac{1}{12}$

$1\ \text{вер.} \to \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \to \frac{4}{8} = \frac{1}{2}\ (1ф.) \to \frac{1}{9} \to \frac{2}{11}\ (1ф.) \to \frac{1}{12} \to \frac{1}{13}\ (1ф.)$

$1\ \text{вер.} \to \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \to \frac{2}{7} \to \frac{1}{9} \to \frac{2}{10} \to \frac{1}{12} \to \frac{1}{12} \to \frac{1}{13}$

$\frac{15}{42} \cdot \frac{42}{990_{198}} \cdot \frac{25^{5}}{12^2 \cdot 13} \cdot \frac{1}{13}$

$\frac{1}{6} + \frac{4}{21} = \frac{15}{42}$

$\frac{15}{42} \cdot \left(\frac{2}{99} + \frac{2}{90}\right) \cdot \left(\frac{1}{12 \cdot 13} + \frac{1}{12^2}\right) \cdot \frac{1}{13}$

~~$\frac{15}{42} \cdot \frac{42}{990} \cdot \frac{25}{12^2 \cdot 13} \cdot \frac{1}{13} = \frac{5 \cdot 15}{198 \cdot 12^2 \cdot 13^2}$~~

Ответ: $\frac{5 \cdot 15}{198 \cdot 12^2 \cdot 13^2} = \frac{25}{198 \cdot 12 \cdot 4 \cdot 13^2}$.

когда у нас получается одна фигура мы вероятности складываем, когда разные — перемножаем.