0 213971 150005

21-39-71-15
(126.2)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 7-8 классы

Место проведения г. Ульяновск
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Жидяевой Дарьи Алексеевны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«29» марта 2026 года

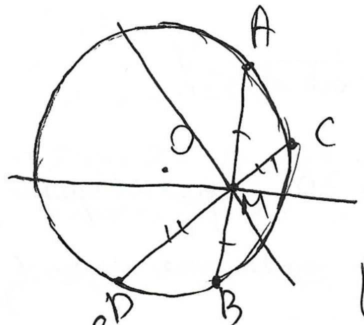
Подпись участника
ЖидДА

70 (семьдесят)

Чистовик

№1

Пусть O – центр окружности, r-радиус, r=5; AB, CD- хорды, которые точкой пересечения делятся пополам. M – их точка пересечения



Заметим, что если одна из данных хорд AB, CD является диаметром, то и вторая тоже, а, следственно и третья

Предположим, что хорды AB и CD не являются диаметрами. Проведем ~~сер. пер~~ серединные перпендикуляры к у отрезков AB и CD, заметим, что центр окружности всегда лежит на ~~сер. пер~~ серединном перпендикуляре к хорде (проведем два радиуса к концам хорды и проведем медиану в образовавшимся равнобедренном треугольнике). Заметим, что AB и CD не совпадают, тогда перпендикуляры к ним тоже. ~~Тог~~ Тогда перпендикуляры не параллельны, значит имеют ~~один~~ одну общую точку – M. Заметим, что O лежит на обеих прямых => это точка пересечения прямых – M. Тогда хорды AB и CD – диаметры. Третья хорда тогда тоже проходит через центр окружности => это диаметр, он ~~р~~равен $2\cdot 5=10$.

Ответ: 10.

№2

Пусть $\overline{abcd}$ – искомое число. Заметим, что:

$10^3 \le \overline{abcd} < 10^4 \Rightarrow 10^6 \le (\overline{abcd})^2 < 10^8$. Тогда $(\overline{abcd})^2$ имеет 7 или 8 цифр.

Если 7 цифр, то пусть $\overset{\vdots\,\overline{abcd}}{(\overline{abcd})^2} = \overline{abcdefg} = \underset{\vdots\,\overline{abcd}}{\overline{abcd}\cdot 1000} + \overline{efg} \Rightarrow \overline{efg} \vdots \overline{abcd}$, но трехзначное не делится на четырехзначное.

Если $(\overline{abcd})^2$ имеет 8 цифр, то пусть

$\underset{\vdots\,\overline{abcd}}{(\overline{abcd})^2} = \overline{abcdefgh} = \underset{\vdots\,\overline{abcd}}{\overline{abcd}\cdot 10000} + \overline{efgh} \Rightarrow \vdots\,\overline{abcd}$.

Продолжение на след. странице

№2 продолжение. Чистовик

Тогда $\overline{abcd}\cdot 10000+\overline{efgh}\ \vdots\ \overline{abcd}$.

Разделим обе части равенства на $\overline{abcd}$ (оно не равно 0).

$\overline{abcd}=10000+\frac{\overline{efgh}}{\overline{abcd}}$. Пусть $\overline{efgh}=\overline{abcd}\cdot X$.

Тогда $\overline{abcd}=10000+X$, где $X\geq 0$. Противоречие, т.к. $\overline{abcd}<10000$. Тогда таких чисел не существует.

Ответ: 0.

№3

$\overline{ТУК}\cdot\overline{ТУК}=\overline{ФАРТУК}$ || $-\overline{ТУК}$.

$\overline{ТУК}\cdot(\overline{ТУК}-1)=\overline{ФАР000}$. Заметим, что $\overline{ТУК}\cdot(\overline{ТУК}-1)\ \vdots\ 1000$, а также $\overline{ТУК}$ и $\overline{ТУК}-1$ взаимопросты => одно четное, другое нечетное. Также одно из этих чисел делится на 125, а второе не делится даже на 5 (вз. просты), т.к. $1000=125\cdot 8$. Рассмотрим трехзначные, кратные 125, и их четных соседей => найдем $\overline{ТУК}$ и $\overline{ТУК}-1$.

1) 125; 124/126 — не подходит; второе должно делиться на 8.
$\not\vdots 8$ $\not\vdots 8$

Также заметим, что если $125k$ – чет, то $125k\pm1$ – нечет, тогда $125k\ \vdots\ 1000$ => $125k\geq 1000$, но это трехзначное.

Тогда можно рассмотреть $125k$, где k – нечет.

2) 375; 376/374 => 375; 376. Проверим
$\vdots 8$ $\not\vdots 8$
$\overline{ТУК}-1$ $\overline{ТУК}$

3) 625; 624/626 => 625 = ТУК. Проверим
$\vdots 8$ $\not\vdots 8$

4) 875; 874/876
$\not\vdots 8$ $\not\vdots 8$.

$$\begin{array}{r} 376\\ \times\ 376\\ \hline 2256\\ +\ 2632\\ 1128\\ \hline 141376 \end{array}$$

Ф = Р не подходит

$$\begin{array}{r} 625\\ \times\ 625\\ \hline 3125\\ +\ 1250\\ 1350\\ \hline 140625 \end{array}$$

подходит.

Других вариантов не существует

Ответ: 140625.

21-39-71-15 (126.2)

№6 Чистовик

Пусть $\overline{abc}$ – искомое трехзначное. По условию

$\frac{\overline{abc}}{a+b+c} \vdots 9 \Rightarrow \overline{abc} \vdots 9 \Rightarrow a+b+c \vdots 9 \Rightarrow \overline{abc} \vdots 81$.

Тогда $\overline{abc} = 81k$, где $2 \le k \le 12$, иначе хотя бы $81 \cdot 13 = 810 + 243 > 999$, или не более 81. Рассмотрим варианты по k.

$k=2 \Rightarrow 81k = 162$ $\quad \frac{162}{1+6+2} = \frac{\cancel{81}^{9} \cdot 2}{\cancel{9}} = 18$ V – первое

$k=3 \Rightarrow 81k = 243$ $\quad \frac{81 \cdot 3}{2+4+3} = 27$ V – второе.

$k=4 \Rightarrow 81k = 324$ $\quad \frac{81 \cdot 4}{3+2+4} = 36$ V – третье.

$k=5 \Rightarrow 81k = 405$ $\quad \frac{81 \cdot 5}{4+0+5} = 45$ V – четвертое

$k=6 \Rightarrow 81k = 486$ $\quad \frac{81 \cdot 6}{4+8+6} = \frac{\cancel{81}^{9} \cdot \cancel{6}^{3}}{\cancel{18}_{2}} = 27$ V – пятое.

$k=7 \Rightarrow 81k = 567$ $\quad \frac{81 \cdot 7}{5+6+7} = \frac{81 \cdot 7}{18}$ – не целое X.

$k=8 \Rightarrow 81k = 648$ $\quad \frac{648}{6+4+8} = \frac{\cancel{64}\,\cancel{81}^{9} \cdot \cancel{8}^{4}}{\cancel{18}_{2}} = 36$ V – шестое.

~~$k=9 \Rightarrow 81k =$~~ Перескочили, т.к. больших не существует, первое и шестое нашли

$k=12 \Rightarrow 81k = 81 \cdot 12 = 810 + 81 \cdot 2 = 810 + 162 = 972$.

$\frac{81 \cdot 12}{9+7+2} = \frac{\cancel{81}^{9} \cdot \cancel{12}^{6}}{\cancel{9 \cdot 2}} = 36$ V – последнее (в порядке возрастания).

Тогда ответ: $162 + 648 + 972 = 810 + 972 = 1782$.

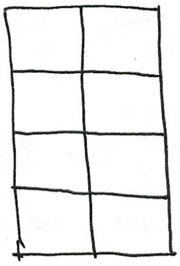
Ответ: 1782

№7

Чистовик

Посчитаем $1+2+\ldots+9=\frac{10\cdot 9}{2}=45$.

Посмотрим на таблицу



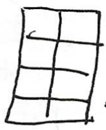
Пусть в первой строке ~~а~~ сумма чисел — a, тогда во второй $a+1$, в третьей $a+2$, в четвертой $a+3$. Тогда сумма чисел в таблице — $4a+6 \overset{4}{\equiv} 2$, а $45 \overset{4}{\equiv} 1$, тогда число, которое мы должны убрать (не использовать) дает остаток 3 при делении на 4.

Тогда это 3 или 7. Рассмотрим два случая.

Сумма чисел: $45-3=4a+6 \Rightarrow a=9 \Rightarrow$ сумма в строках: $9; 10; 11; 12$. Рассмотрим суммы из свободных цифр:

~~9 7~~ $9=1+8$ ~~9~~ $=2+7=4+5$ | $10=1+9=2+8=4+6$

$11=2+9=4+7=5+6$ | $12=4+8=5+7$. Начнем аккуратно считать случаи. $12=4+8$



← 4 и 8

$\Rightarrow$ 10 может быть $1+9$

11 может быть $5+6$

9 может быть $2+7$

↑ и только так.

Тогда мы узнали числа в каждой строке. Но, например, в нижней строке может быть 2 расстановки: $\boxed{4|8}$ или $\boxed{8|4}$.

Тогда, при таком ~~рас~~ варианте будет 2^4 способов (расстановка в строках).

Если $12=5+7$, то $11=2+9$; $10=4+6$; $9=1+8$ и только так. Случай аналогичен $\Rightarrow 2^4$ способов.

Если $4a+6=45-7 \Rightarrow a=8$, сумма в строках: $8; 9; 10; 11$.

Рассмотрим суммы $8=$ ~~1+~~ $2+6=3+5$ | $9=1+8=3+6=4+5$.

$10=1+9=2+8=4+6$ | $11=2+9=3+8=5+6$.

Также посмотрим если $8=2+6 \Rightarrow 10=1+9$; $11=3+8$; $9=4+5$.

Аналогично 2^4 вариантов

Если $8=3+5$, то $9=1+8$; $10=4+6$; $11=2+9$. Аналогично 2^4 вариантов.

Тогда всего есть $2^4\cdot 4=2^6=64$ способа

Ответ: 64.

21-39-71-15
(126.2)

№5 Чистовик

Заметим, что Агриппина не может ехать со скоростью более чем 50 метров за 30 секунд, иначе она выедет
$\parallel$
100 м/мин
на красный на первом светофоре. ~~Докажем, что скорость 100 м/мин подойдет.~~

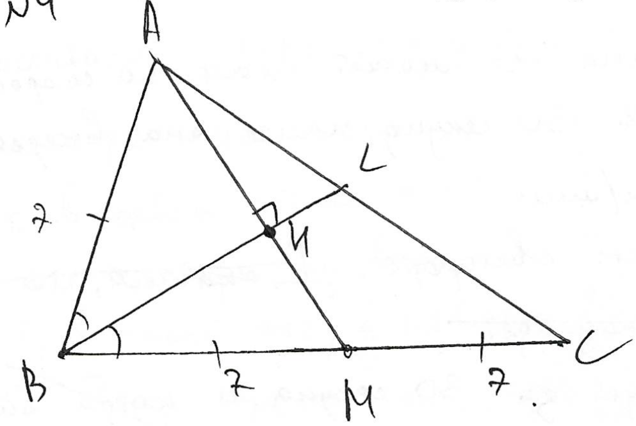
~~Первые 50 м она проедет за 30 секунд и когда она подъедет к первому светофору загорится сразу зеленый, светофор она проедет за (за на 30 м уйдет в $3\frac{1}{3}$ меньше, чем на 100 м => $60 : 3\frac{1}{3} = \frac{60 \cdot 3}{10} = 18$ сек) 18 сек < 50 (1) Далее, 120 м она проедет за $60 \cdot 1\frac{1}{5} = 72$ сек. Тогда, ровно через $18+72+30 = 120$ сек она будет у второго светофора. 3~~

Расстояние между началом пути и началом первого светофора равно $50+30+120 = 200$ м. Она не может успеть на первый (начальный) зеленый свет. Если бы она могла успеть на второй, то её скорость была бы хотя бы (на переключение к второму зеленому уйдет $10+50 = 60$ сек) $\frac{200}{60} > 100$ м/мин. Не подходит. Посмотрим, если она успеет к третьему зеленому свету „впритык" – когда загорится зеленый она подъедет. Так скорость будет наибольшей (если она будет дальше, то за фиксированное время она проехала меньшее расстояние). Тогда она проехала за $10+50+50+50 = 160$ сек. 200 м. Её скорость: ~~20 160 сек = 2~~ $\frac{\cancel{200}^{5}}{\cancel{160}_{4}} = 1\frac{1}{4}$ м/сек. Посмотрим, успеет ли она на первый светофор. $50 : 1\frac{1}{4} = \cancel{65}\ 40$ сек. Заметим, что через ~~75~~ 40 секунд будет гореть зеленый свет. Чтобы проехать светофор ей понадобится $30 : 1\frac{1}{4} = 24$ сек, а ~~све~~ когда она подъедет светофор будет гореть еще 40 секунд. Подходит. Проверим, успеет ли она проехать ~~50 м~~ 10 м второго светофора за 50 секунд $10 : 1\frac{1}{4} = 12{,}5 < 50$. Подходит. Тогда данная скорость ~~минимальна и~~ минимальна и подходит.

Ответ: $1\frac{1}{4}$ м/сек.

№4

Чистовик



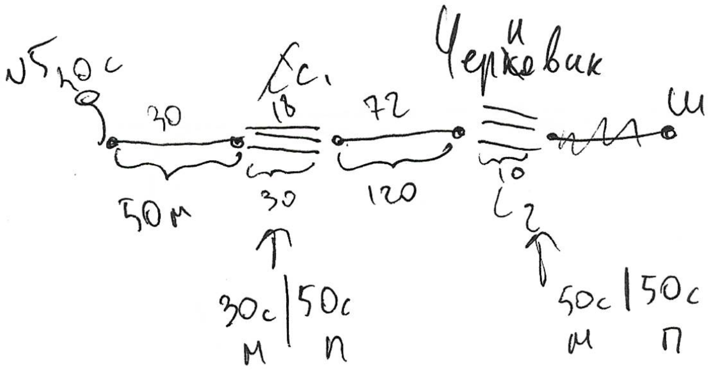
Дано:
BL - биссектриса
~~Ам~~ AM - медиана
$AM \perp BL$.

Решение:
Заметим, что $AB = BM = MC$, т.к. $AB = BM$, ведь в $\triangle ABM$ совпадают биссектриса и высота. Тогда $BC = 14$; $AB = 7 \Rightarrow$ ~~AC~~ $7 < AC < 21$. Тогда возможные периметры $14 + 7 = 21 \Rightarrow$ от $\underset{29}{21+8}$ до $21 + 20 = 41$.

Мы можем построить любой такой треугольник с помощью циркуля и линейки, ведь выполняется неравенство треугольника. Условие про медиану и биссектрису ~~будет~~ будет всегда выполняться ~~П~~ т.к. $2AB = BC \Rightarrow AB = \frac{BC}{2}$ и $\triangle ABM$ всегда равнобедренный $\Rightarrow$ биссектриса и высота совпадают.

Ответ: 29; ...; 41

№5



Итого путь – 210 м.

120м – 72с
20м – 12с

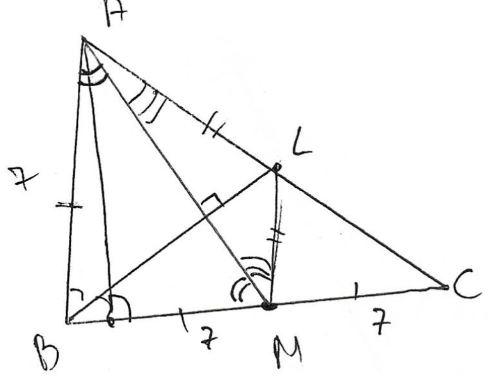
50м – 30с
100 м/мин.
30м – 18с

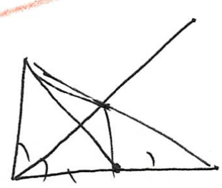
30с

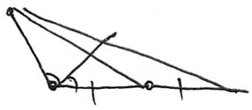
$60:3\frac{1}{3} = \frac{60\cdot 3}{10} = 18.$

$3\frac{1}{3}$

через 90 с будет
через 60 – зел
10м – 6 сек

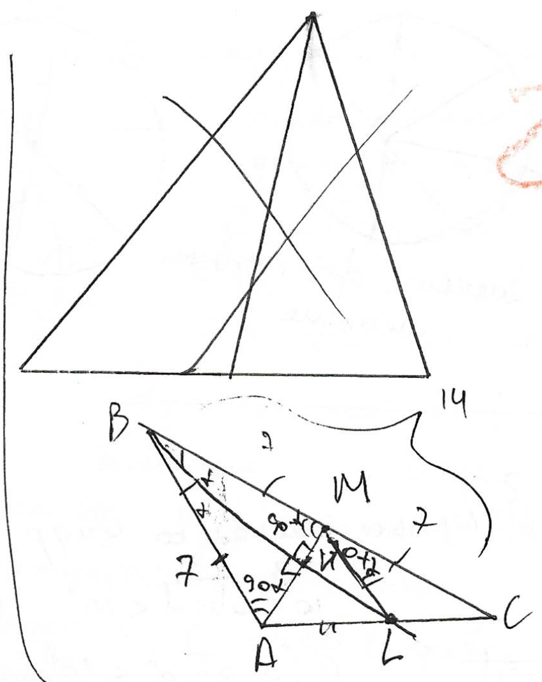


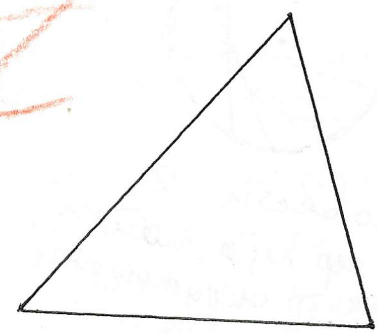




Черновик

№4





$AC = 8/9/10/11 \ldots /20.$

№6

$A \in$

$\frac{n}{S(n)} \vdots 9.$

⇓

$n \vdots 9 \Rightarrow S(n) \vdots 9$

⇓

$n \vdots 81$

$\frac{\overline{abc}}{a+b+c} \vdots 9$

$\overline{abc} \vdots 9 \Rightarrow$

$a+b+c \vdots 9 . < \overline{abc} \vdots 81$ $\qquad a+b+c = 9/18/27$

$81 \cdot 2 = 162$

$\frac{162}{9} = 18$ ✓.

$81 \cdot 12 =$

$= 810 + 162 = 972$ $\qquad \frac{972}{18} = 54.$

~~$81 \cdot 2$. $81 \cdot 3 = 273$ 273~~

$\frac{\cancel{999}}{27} = 37$ ✗.

$9 \quad 6$

$81 \cdot 12$

$81 \cdot 3$

$\frac{243}{9} = 27$ ✓.

№7

a		
$a+1$		
$a+2$		
$a+3$		

$4a+6$ — четное $\Rightarrow$ нечетных четко,

$5н; 4ч$ $18?$. все не делится на 4

-1 нет. $\qquad$ ~~x^2~~ $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$

$1 + \ldots + 9 = 45$. сравнимо с $3 \pmod 4$

$3)$ $\quad 42 = 4a + 6$

$\quad 36 = 4a \Rightarrow a = 9.$

$9 = 1+8/2+7/4+5$

$10 = 2+8/4+6 = 1+9$

$11 = 2+9/3+8/4+7, 6+5$

$12 = 4+8/5+7, 3+9$

№

$(\overline{abcd})^2 = \overline{abcdefgh} = \overline{abcde}$ $\overline{abcd} \cdot 10000 + \overline{efgh}$

$\overline{abcd} = 10000 + X$

$10^3 \leq \overline{abcd} < 10^4$

$10^6 \leq (\overline{abcd})^2 < 10^8$

7 или 8 зн.

$(9999)^2 =$

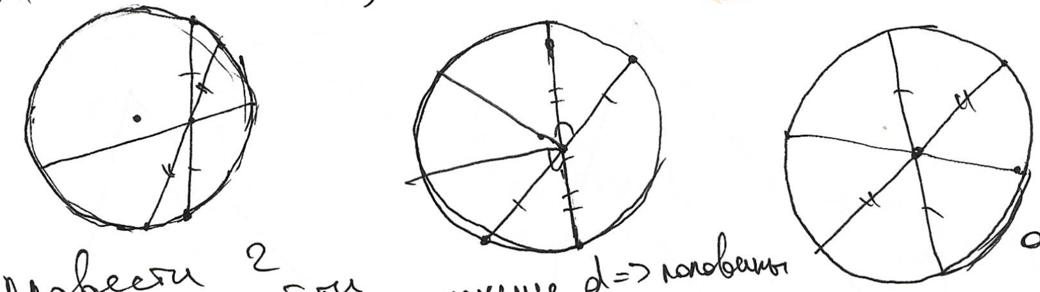
$10000^2 - 2 \cdot 9999 + 1 =$

$= \underbrace{100000000}_{9 зн.} - 2 \cdot 9999 + 1.$

⇓ 8 $\qquad$ 5 зн.

Черновик

№1 $r=5$



d ?

провести 2 сер. пера, найти центр окружности. меньше d => половины меньше r.

№2

$\overline{abcd} \to (\overline{abcd})^2$ первые несколько цифр $= n$

$1010 \cdot 1010 = X$

$10^3 \leq \overline{abcd} < 10^4$ (в кв)

1) $(\overline{abcd})^2 = \overline{abcdefg} \ \vdots\ \overline{abcd}$

$10^6 \leq \overline{abcd} < 10^8$

7 или 8 знаков. 4 ост. 3 ост. 4

$\overline{abcd} \cdot 1000 + \overline{efg} \ \vdots\ \overline{abcd}$

$\overline{efg} \ \vdots\ \overline{abcd}$ X

2) $(\overline{abcd})^2 = \overline{abcdefgh} \ \vdots\ \overline{abcd}$.

$\overline{efgh} \ \vdots\ \overline{abcd}$. $\overline{efgh} = \overline{abcd} \cdot k$, где $k \in \mathbb{N}$

~~а хотя бы~~ $\overline{abcd} \cdot \overline{abcd} = \overline{abcd} \cdot 10000 + \overline{abcd} \cdot k \ \mid \vdots\ \overline{abcd}$ $1 \leq k \leq 9$

$\overline{abcd} = 10000 + k$ (9 вариантов)

$(10000+k)^2 = \cancel{1}$ - хотя бы 5 знаков. Не существует?

№3 ТУКФАР

$k \cdot k = \_k$ ($k = 1/5/6/0$)

$y \neq k = 0$

$ТУК \times ТУК = ФАРТУК$

$ТУК = 1000X + 1$

$10^2 \leq ТУК < 10^3$

$1000 ФАР \vdots ТУК$

$ФАР = ТУК \cdot X$.

$100 \cdot 101 = 10100$

$101 = 101$

$400 \cdot 400 = 160000 = 160 \cdot 1000 + \overline{000} = 160000$.

$ТУК \times ТУК = \overline{ФАРТУК}$.

$ТУК(ТУК-1) = ФАР000$

ТУК или ТУК-1 $\vdots$ 5/2. одно $\vdots 125$, другое $\vdots 8$.

125; 124 X / 126 X

375; 376 / 374 X

625; 624 / 626 X

875; 874 / 876 X X

ТУК 625; 624 / ~~3~~ 375; 376 ТУК.

$$\begin{array}{r} \times\ 376 \\ 376 \\ \hline 2256 \\ 32 \end{array}$$ X

$$\begin{array}{r} \times\ 625 \\ 625 \\ \hline 3125 \\ 1250 \\ 3750 \\ \hline 390625 \end{array}$$

$625 \cdot 625 = 390 \cdot 1000 + 625$

$625 =$